MATHEMATICS

বাংলা একাডেমী : ঢাকা

প্রথম প্রকাশ
ভাদ্র : ১৩৭৮
আগস্ট : ১৯৭১

প্রকাশক
ফজলে রাব্বি
পরিচালক
প্রকাশন-মুদ্রণ-বিক্রয় পরিদপ্তর
বাংলা একাডেমী
ঢাকা

মুদ্রণে
বাংলা একাডেমীর
প্রকাশন-মুদ্রণ-বিক্রয় পরিদপ্তরের
মুদ্রণ বিভাগ

প্রচ্ছদ
আব্দুল বাসেত

সূচীপত্র

অন্তরকলন বিদ্যা (Differential Calculus)

সমাকলন বিদ্যা ও অন্তরকল সমীকরণ

(Integral Calculus and Differential Equations)

বলবিদ্যা : গতিবিদ্যা ও স্থিতিবিদ্যা

গতিবিদ্যা

(Dynamics)

স্থিতিবিদ্যা

(Statics)

পরিভাষা

(ক) কলনবি

Absolute—পরম
Arbitrary constant—স্বেচ্ছ-ধ্রুবক
Auxiliary Equation—সহায়ক সমীকরণ
Calculus—কলনবিদ্যা
Constant—ধ্রুবক
Continuity—সন্তততা
Continuous—সন্তত
Derivative—অন্তরকলজ, ডেরিভেটিভ, ডিফারেন্সিয়াল গুণাঙ্ক, অন্তরকল গুণাঙ্ক
Differential—অন্তরকল, ডিফারেন্সিয়াল
Differential Calculus—অন্তরকলনবিদ্যা
Differential coefficient—অন্তরকল-সহগ
Differential equation—অন্তরকল-সমীকরণ
Differentiation—অন্তরকলন
Discontinuity—অসন্ততা
Discrete—বিচ্ছিন্ন
Elementary—প্রাথমিক
Elimination—অপনয়ন
Eliminant—অপনীতক
Extreme value—প্রান্তিক মান
Function—অপেক্ষক
Function of a Function—অপেক্ষকের অপেক্ষক
General solution—সাধারণ সমাধান
Infinite—অনন্ত, অসীম
Integral—সমাকল
Integral Calculus—সমাকলনবিদ্যা
Integrand—সমাকল্য
Integration—সমাকলন
Integration by parts—অংশতঃ সমাকলন
Interval—বিস্তার
Irrational number—অমূলদ সংখ্যা
Limit—সীমা
Limiting value—সীমান্ত মান
Maxima-minima—চরম ও অবম
Modulus—পরম মান, মডিউলাস
Number—সংখ্যা
Order—ক্রম
Parameter—প্যারামিটার
Particular solution—বিশেষ সমাধান
Rational-Number—মূলদ সংখ্যা
Real number—বাস্তব সংখ্যা
Recurring—আবৃত্ত
Removable (discontinuity)—পরিবর্তন-যোগ্য (অসন্ততা)
Substitution—প্রতিস্থাপন
Standard—আদর্শ
Terminating— সসীম
Transcendental—তুরীয়
Value—মান
Variable—চল

(খ) বলবিদ্যা

action—ক্রিয়া
acceleration—ত্বরণ
acceleration due to gravity—অভিকর্ষজ ত্বরণ
acting—ক্রিয়াশীল
advantage—সুবিধা
amplitude—বিস্তার
angle of projection—প্রক্ষেপ কোণ
balloon—বেলুন

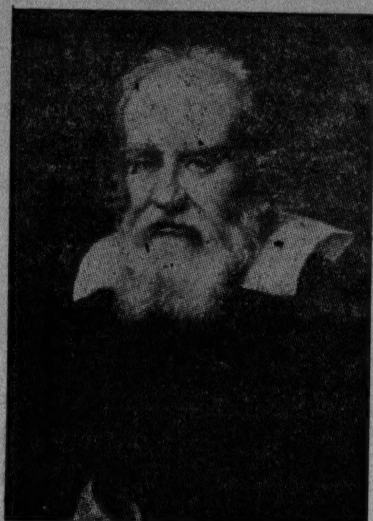
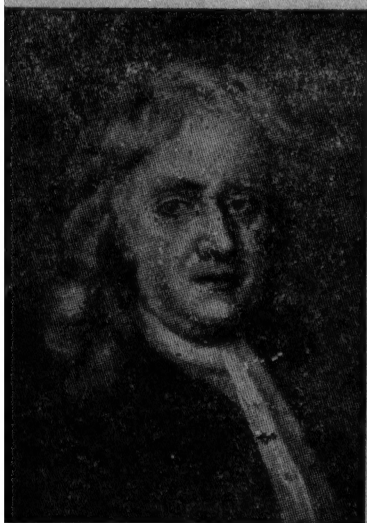
block—ব্লক, কুঁদো
bob—পিণ্ড
body—বস্তু
cancel—অপসারণ
centre of gravity—ভারকেন্দ্র
centre of mass—ভরকেন্দ্র
centroid—ভরকেন্দ্র
cord—দড়ি
couple—যুগ্মবল
diagram—চিত্র
differential screw-jack—বিভেদক স্ক্রু-জ্যাক, ডিফারেন্সিয়াল স্ক্রু-জ্যাক
differential pulley—ডিফারেন্সিয়াল পুলি, বিভেদক কপিকল
dynamic—গতীয়
dynamics—গতিবিদ্যা
effort—উদ্যোগ
equilibrium—সাম্যাবস্থা
equivalent (couple)—সমানফলদায়ী (যুগ্মবল)
falling—পতনশীল
force—বল
free body—স্বাধীন বস্তু
friction—ঘর্ষণ
fulcrum—আলম্ব বিন্দু
funicular polygon—রজ্জু বহুভুজ, ফিউনীকুলার বহুভুজ
gravitation—মহাকর্ষ
gravity—অভিকর্ষ
horizontal—অনুভূমিক
hydrostatics—উদস্থিতিবিদ্যা
inclined—নত
inclined plane—নততল
inertia—জাড্য
initial velocity—প্রারম্ভিক বেগ
kinematics—স্থিতিবিদ্যা
kinetics—গতি বিজ্ঞান
ladder—সিঁড়ি, মই
lamina—পাত
lever—লিভার
load—ভার
machine—যন্ত্র
mass—ভর
matter—জড়
mechanics—বলবিদ্যা
mechanical advantage—যান্ত্রিক সুবিধা
moment—ভ্রামক
momentum—ভরবেগ
motion—গতি
Parallelogram of forces—বলের সামান্তরিক
particle—কণা
pendulum—দোলক
period—দোলনকাল, পর্যায়কাল
periodic—পর্যাবৃত্ত
phase—দশা
pitch—থাক
plane—সমতল
platform—পাটাতন
point of application—প্রয়োগ বিন্দু
position—অবস্থান
pressure—চাপ
projectile—প্রাস
pull—টান
pulley—কপি
push—ঠেলা, ধাক্কা
range—পাল্লা
reaction—প্রতিক্রিয়া
relative—আপেক্ষিক
repulsion—বিকর্ষণ
resistance—রোধ, বাধা
rest—স্থিতি
resultant—লব্ধি
retardation—মন্দন
rigid—দৃঢ়
rotation—আবর্তন

rough – রুক্ষ
screw – স্ক্রু
screw jack – স্ক্রু-জ্যাক
simple harmonic motion – সরল সমঞ্জস গতি
sliding motion – বিসর্প গতি
speed – দ্রুতি
spiral – কুণ্ডলী, স্পাইর‍্যাল
static – স্থিতীয়
Statics – স্থিতিবিদ্যা
support – আলম্ব, অবলম্বন
surface – তল
system of pulleys – কপি কল
tension – টান
thread (of screw) – সূতা, গুণ
thrust – ঘাত
time of flight – উড্ডয়নকাল
principle of transmissibility – সঞ্চালন নীতি
unit – একক
uniform – সর্বত্রসম, সম
vacuo – শূন্য
velocity – বেগ
velocity of projection – প্রক্ষেপ বেগ
velocity ratio – বেগানুপাত
vertical – উল্লম্ব
wave – তরঙ্গ
weight – ভার
work – কার্য

গণিতে ব্যবহৃত কয়েকটি গ্রীক অক্ষর :

α (alpha)
β (beta)
γ (gamma)
Δ, δ (delta)
θ (theta)
λ (lambda)
μ (mu)
π (pi)
ϕ (phi)
Σ, σ (sigma)
ψ (psi)
ω (omega)
ρ (rho)
ξ (xi)
η (eta)

"Give me a place to stand on and I will move the earth,

—*Archimedes (287-212 B. C.)*

"Eupper si mouve"
(And, yet it moves)
—*Galilio Galilie (1564-1642)*

"If I have seen a little further than others, it is because I have stood on the shoulder of giants."

—*Isaac Newton (1642-1721)*

"I have so many ideas that may perhaps be of some use in time if others more penetrating than I, go deeply into them some day and join the beauty of their minds to the labour of mine."—*G. W. Leibniz (1646-1716)*

অন্তরকলনবিদ্যা

(Differential Calculus

প্রথম অধ্যায়

বাস্তব সংখ্যা (Real Number)

§ 1·1. **সূচনা ঃ** **কলনবিদ্যা বা ক্যালকুলাস** (Calculus) বলিতে কি বুঝায় ? এই প্রশ্নের উত্তর সূচনায় সঠিকভাবে দেওয়া সম্ভব নহে। বস্তুতঃ প্রাথমিক অবস্থায় কোন বিষয়ের (subject) সঠিক সংজ্ঞা দেওয়া কঠিন। বিষয়টি সম্বন্ধে কিছু জ্ঞান না জন্মিলে, উহার প্রকৃত স্বরূপ বুঝা সম্ভব হয় না। তবে পঠিতব্য বিষয় সম্বন্ধে প্রাথমিকভাবে কিছু ধারণা থাকিলে উহার অধ্যয়নে আগ্রহ জন্মে। তাই ক্যালকুলাসের আলোচ্য বস্তুর বিষয়ে কিছু বলা হইল।

এ পর্যন্ত বীজগণিত, জ্যামিতি ইত্যাদি বিষয়ে তোমরা যাহা শিখিয়াছ, তাহাতে চারিটি প্রক্রিয়া, যথা যোগ, গুণ এবং উহাদের বিপরীত প্রক্রিয়া বিয়োগ ও ভাগের ব্যবহার দেখিয়াছ। কলনবিদ্যায় এই চারিটি প্রক্রিয়া ছাড়াও একটি নূতন প্রক্রিয়ার সংজ্ঞা দেওয়া হয়। ইহাকে **সীমা প্রক্রিয়া** বা limit operation বলে।

প্রাথমিক বীজগণিত হইতে কলনবিদ্যার পার্থক্য মূলতঃ সীমা প্রক্রিয়ার ব্যবহারের জন্য। এই সীমা প্রক্রিয়ার ব্যবহার তোমরা ত্রিকোণমিতিতে দেখিয়াছ যেখানে প্রমাণ করা হইয়াছে যে বৃত্তের পরিধি এবং ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক। বীজগণিতে আবৃত্ত দশমিকের মান নির্ণয় করার পদ্ধতিতে কিংবা জ্যামিতিতে স্পর্শক নির্ণয় করিবার সময় এই প্রক্রিয়া প্রাথমিক স্তরে ব্যবহার করা হইয়াছে।

কলনবিদ্যায় অপেক্ষকের সীমাস্থ মান বাহির করিবার পদ্ধতির দুই প্রকার প্রয়োগ আছে। প্রথম প্রয়োগে সীমা প্রক্রিয়ার দ্বারা অপেক্ষকের কোন বিন্দুতে তাৎক্ষণিক (instantaneous) পরিবর্তনের হার বা অন্তরকলজ্ (derivative) বাহির করা হয়। দ্বিতীয় প্রয়োগ হইতেছে সীমা প্রক্রিয়ার দ্বারা অপেক্ষকের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের পরিমাণ বা নিশ্চিত সমাকল (definite integral) বাহির করা। প্রথম প্রয়োগটি যেখানে আলোচনা করা হয় তাহাকে কলনবিদ্যার **অন্তরকলন** (differential calculus) শাখা এবং দ্বিতীয় প্রয়োগটি সম্বন্ধে আলোচ্য শাখাটিকে **সমাকলন** (integral calculus) শাখা বলা হয়।

§ 1·2. **ঐতিহাসিক আলোচনা** (Historical notes) :

ক্যালকুলাস (calculus) শব্দটি ল্যাটিন (Latin) ভাষায় একটি পাথরের নাম। এই পাথর দ্বারা রোমানরা (Romans) গণনাকার্য

(calculation) করিত। কিন্তু এখন ক্যালকুলাস বলিতে বুঝায় গণিতের সর্বাপেক্ষা শক্তিশালী শাখা। আধুনিক জ্ঞানের রাজ্যে যেসব ক্ষেত্রে গণিতের সাহায্য লওয়া হয়, তাহাদের সর্বত্রই ইহার ব্যাপকতম ব্যবহার।

প্রাচীনকালে গ্রীক গণিতজ্ঞরা, বৃত্তের ক্ষেত্রফল, অধিবৃত্তের কিছু অংশের দৈর্ঘ্য, স্তম্ভক, শঙ্কু, গোলক প্রভৃতি সুষম (regular) ঘনের ঘনফল বাহির করিবার জন্য যে পদ্ধতি অবলম্বন করিয়াছিলেন, তাহা হইতেছে কোন একটি যোগফলের সীমাস্থ মান নির্ণয় করা। ইহার সহিত কলনবিদ্যার সমাকলন শাখার মিল সুস্পষ্ট।

জেনো (Zeno, খ্রীঃ পূঃ 495-435) এবং **ইউডোক্স** (Eudoxus), খ্রীঃ পূঃ 408-355)-এর লেখায় অনন্ত (infinite) এবং সন্ততা (continuity)-র ধারণা পাওয়া যায়। **আর্কিমিডিস** (খ্রীঃ পূঃ 287-212) বৃত্তের ক্ষেত্রফল বাহির করার জন্য এবং আর্কিমিডিয়ান কুণ্ডল (archimidian spiral) নামে পরিচিত বক্রের অঙ্কনের সময় যে পদ্ধতি ব্যবহার করিয়াছিলেন তাহা বর্তমানকালের কলনবিদ্যার দুই শাখা, সমাকলন এবং অন্তরকলনের প্রাথমিক রূপ।

সপ্তদশ শতাব্দীর প্রথম অর্ধে **ডেকাঁর্তে** (Des'carte, 1596-1650) স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে চলরাশি (Variable quantity) সম্বন্ধে ধারণার উদ্ভাবন করেন। এই ধারণা গণিতরাজ্যে এক নবদিগন্তের সূচনা করে এবং সঙ্গে সঙ্গেই ইউরোপের বিভিন্ন দেশের গণিতজ্ঞেরা, বক্রের স্পর্শক অঙ্কন, রাশির চরম মান বাহির করা, এবং ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয় করা প্রভৃতি বিষয়ে চলরাশির ধারণার দ্বারা আলোচনা শুরু করেন। **ফার্মেট** (Fermate, 1608-1665), **পাস্‌কেল** (Pascal, 1623-1662), **কেপলার** (Kepler, 1571-1630), **রোভারভেল** (Roberval, 1602-1675), **হুউজেন** (Huygens, 1629-1695), **ব্যারো** (Barrow, 1630-1677) এবং অন্য আরো অনেক গণিতজ্ঞ, বিশেষ বিশেষ বক্রের স্পর্শক অঙ্কন এবং বিশেষ বক্রের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বাহির করিবার উপায় উদ্ভাবন করেন। তাঁহারা প্রতিটি সমস্যাই স্বতন্ত্রভাবে আলোচনা করেন এবং বিশেষ কোন সাধারণ নিয়ম নির্ণয় করেন নাই। কিন্তু প্রতিক্ষেত্রেই অন্তরকলজ বা নিশ্চিত সমাকলের ধারণার সূত্রপাত হইয়াছিল। এই সময় প্রাচ্যের গণিতজ্ঞদের মধ্যে জাপানের গণিতবিদ্ **সাকী কোয়া** (Seki Kowa, 1642-1708)-র লেখায় কলনবিদ্যার কিছু ধারণার পরিচয় পাওয়া যায়।

এইসব বিচ্ছিন্ন ধারণার দ্বারা আলোকপ্রাপ্ত হইয়া সপ্তদশ শতাব্দীর শেষ অর্ধে, ইংল্যাণ্ডের গণিতজ্ঞ **নিউটন** (1642-1727) এবং জার্মানীর গণিতজ্ঞ **লিব্‌নিজ্‌** (Leibnitz, 1651-1708), পরস্পর স্বতন্ত্রভাবে কাজ করিয়া উভয়েই **অন্তরকলজ** (derivative) এবং **সমাকল** (integral)-এর সংজ্ঞা দেন। লিব্‌নিজ্‌ অন্তরকলজের জন্য $\frac{dy}{dx}$ চিহ্ন ব্যবহার করেন এবং সমাকলের বর্তমানে ব্যবহার্য চিহ্নেরও প্রবর্তন করেন। নিউটন কলনশাস্ত্রের সাহায্যে বলবিদ্যার আলোচনা করেন। নিউটন এবং লিব্‌নিজ্‌ উভয়কেই কলনবিদ্যার উদ্ভাবক বলা হয়।

নিউটন এবং লিব্‌নিজ্‌-এর কলনবিদ্যার প্রাথমিক নিয়মগুলির আবিষ্কারের পর, ইউরোপের বিভিন্ন দেশের গণিতবিদ্‌গণ কলনবিদ্যার সাহায্যে গণিত তথা বিজ্ঞানের বিবিধ সমস্যার সমাধান করেন এবং তাহার দ্বারা কলনশাস্ত্রেরও উন্নতি বিধান করেন। এইসব গণিতবিদ্‌দের মধ্যে কিছু উল্লেখযোগ্য নাম হইল, **অয়লার** (Euler, 1707-1783), **ডি' এলেমবার্ট** (D' Alembert, 1717-1783), **ল্যাগ্রাঞ্জ** (Lagrange, 1736-1813), **গাউস** (Gauss, 1777-1855), **ল্যাপ্লেস্‌** (Laplace, 1749-1827), **কসি** (Cauchy, 1789-1857), **আবেল** (Abel, 1802-1829), **হয়্যারস্ট্রাস** (Weierstrass, 1815-1897), **রীমান** (Reimann, 1826-1866) ইত্যাদি আরো বহু নাম।

আধুনিক পদার্থ বিজ্ঞান এবং রসায়ন বিজ্ঞানের উন্নতি কলনবিদ্যার দ্বারাই সম্ভব হইয়াছে। বস্তুতঃ আধুনিক জ্ঞানের রাজ্যের যে শাখাতেই গণিতের প্রয়োগ করা হইয়াছে, সেখানেই কলনশাস্ত্রের প্রয়োগ দেখা যায় এবং এই প্রয়োগের ফলে কলনশাস্ত্রেরও উন্নতি বিধান হইতেছে।

§ **1·3.** ক্যালকুলাসের ভিত্তি দুইটি ধারণার উপর। **প্রথম ধারণা** হইতেছে, **অপেক্ষকের ধারণা** (Concept of function); **দ্বিতীয়টি** হইতেছে **সীমাস্থ মানের ধারণা** (Concept of limiting value)। আবার দুইটি ধারণাই সংখ্যার দ্বারা প্রকাশিত। সুতরাং অপেক্ষক এবং তাহার সীমার ধারণা (Concept) আলোচনা করিবার আগে আমরা সংখ্যা সম্বন্ধে আলোচনা করিব।

এই অধ্যায়ে সংখ্যা সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে। পরবর্তী অধ্যায় দুইটিতে যথাক্রমে অপেক্ষক এবং সীমার ধারণা লইয়া আলোচনা করা হইবে।

§ 1·4. মূলদ সংখ্যা (Rational number) ঃ

গণনার জন্য (for counting) 1, 2, 3,…ইত্যাদি সংখ্যার ব্যবহার হয়। এইসব সংখ্যাকে **স্বাভাবিক সংখ্যা** (Natural numbers) বলে। দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল হইতেছে উহাদের মোট পরিমাণ বা সমষ্টি, যেমন $4+3=7$। স্বাভাবিক সংখ্যার গুণকে বারংবার যোগ প্রক্রিয়ার সংক্ষিপ্ত প্রকরণ হিসাবে বর্ণনা করা হয়, যেমন, $4\times3=4+4+4=12$; বিয়োগ এবং ভাগ হইতেছে যথাক্রমে যোগ এবং গুণ প্রক্রিয়ার বিপরীত প্রক্রিয়া। যেমন, যদি $4+3=7$ হয় তবে বলিব, $7-3=4$ এবং $4\times3=12$ হইলে বলিব $12\div3=4$।

যোগ এবং গুণ প্রক্রিয়ার জন্য স্বাভাবিক সংখ্যা **বদ্ধ** (closed) অর্থাৎ দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগ এবং গুণফল উভয়ই স্বাভাবিক সংখ্যা হইবে। কিন্তু বিয়োগ এবং ভাগ প্রক্রিয়া বদ্ধ নহে, যেমন $2-7$ বা $5\div3$ ইত্যাদি স্বাভাবিক সংখ্যা নহে। যে কোন দুইটি সংখ্যার জন্য বিয়োগ এবং ভাগ সম্ভবপর করিবার জন্য নূতন সংখ্যাসমূহের সৃষ্টি হয়।

শূন্য সংখ্যাটি এবং ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যাসমূহের উদ্ভাবনের পর যে কোন সংখ্যা হইতে যে কোন সংখ্যার বিয়োগ করা সম্ভবপর হয়, অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যা, শূন্য এবং অখণ্ড ঋণাত্মক সংখ্যাসমূহের জন্য বিয়োগ প্রক্রিয়া বদ্ধ। এই সকল সংখ্যাকে **অখণ্ড সংখ্যা** (integers) বলে।

ভাগ প্রক্রিয়াকে সর্বদা সম্ভবপর করিবার জন্য ভগ্নাংশের উৎপত্তি হয়, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $-\frac{2}{7}$ ইত্যাদি সংখ্যাকে **ভগ্নাংশ** বলে।

ভগ্নাংশকে সাধারণভাবে $\frac{p}{q}$ (p ও q অখণ্ড সংখ্যা $q\neq0$) আকারে প্রকাশ করা যায়। অখণ্ড সংখ্যা এবং ভগ্নাংশসমূহকে **মূলদ সংখ্যা** (Rational number) বলে। যেকোন অখণ্ড সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ ভগ্নাংশের আকারে প্রকাশ করা যায় যেমন,

$$6=\frac{6}{1}\,(p=6,\ q=1),\quad -7=\frac{-7}{1}\,(p=-7,\ q=1)\ \text{ইত্যাদি।}$$

সুতরাং মূলদ সংখ্যার সংজ্ঞা নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা ঃ p এবং q দুইটি অখণ্ড সংখ্যা এবং $q\neq0$ হইলে, $\frac{p}{q}$ কে একটি মূলদ সংখ্যা বলে।

দুইটি মূলদ সংখ্যা $\frac{p}{q}$ এবং $\frac{r}{s}$ $(q\neq 0,\ s\neq 0)$ এর যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগের সংজ্ঞা নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া হয়।

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+qr}{qs}\ ;\ \frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{ps-qr}{qs}.\qquad \frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}\ ;\ \frac{p}{q}\div\frac{r}{s}=\frac{ps}{qr}$$

(যদি $r\neq 0$ হয়)

উদাহরণ। $\frac{2}{3}+\frac{3}{7}=\frac{2.7+3.3}{3.7}=\frac{14+9}{21}=\frac{23}{21}$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)=\frac{-2}{3}\cdot\frac{-4}{7}=\frac{(-2).(-4)}{3.7}=\frac{8}{21}$$

$$\frac{2}{3}-5=\frac{2}{3}-\frac{5}{1}=\frac{2-15}{3.1}=-\frac{13}{3}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5.4}{6.3}=\frac{20}{18}=\frac{10}{9}$$

দ্রষ্টব্য : (1) কোন সংখ্যাকে 0 সংখ্যা দ্বারা ভাগ করার কোন অর্থ হয় না। কারণ,

মনে কর $15\div 0=a$. $\therefore$ ভাগের সংজ্ঞানুসারে $15=a\times 0$. কিন্তু আমরা জানি $0\times a=0$. $\therefore$ $15=0$, ইহা অসম্ভব। $\therefore$ $15\div 0$-এর কোন অর্থ হয় না।

অতএব কোন সংখ্যাকে 0 দ্বারা ভাগ করা যাইবে না। এই নিয়মের অন্যথায় আমরা যে অবাস্তব ফল পাই, তাহা নিম্নে একটি উদাহরণের সাহায্যে দেওয়া হইল।

মনে কর $a=5$. $\therefore$ $a^2=25$. $\therefore$ $a^2-5^2=0$. আবার $a-5=0$. $\therefore$ $a^2-25=a-5$ বা $(a-5)(a+5)=a-5$. উভয় পক্ষকে $a-5$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $a+5=1$. a-এর মান বসাইয়া পাই $5+5=1$ বা $10=1$. ইহা অসম্ভব। এই অসম্ভবতার কারণ হইতেছে যে উভয় পক্ষকে $a-5$ দ্বারা ভাগ করা হইয়াছে, কিন্তু $a-5=5-5=0$।

লক্ষ্য কর, $\frac{a^2-5^2}{a-5}=\frac{(a+5)(a-5)}{a-5}=a+5$, যখন $a\neq 5$;

$a=5$-এর জন্য $\frac{a^2-5^2}{a-5}$ এর মান অনির্দিষ্ট।

দ্রষ্টব্য (2) : ঐতিহাসিকভাবে, বিপরীত জাতীয় রাশির পরিমাপের জন্য ঋণাত্মক সংখ্যা এবং বস্তুর কিছু অংশের পরিমাপের জন্য ভগ্নাংশের উৎপত্তি হয়।

§ 1·5. **মূলদ সংখ্যাসমূহের কতকগুলি ধর্ম** (Some properties of rational numbers)

(i) দুইটি মূলদ সংখ্যার যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল এবং ভাগফল (যেখানে ভাজক শূন্য নহে) মূলদ সংখ্যা হইবে।

(ii) x, y, z তিনটি মূলদ সংখ্যা হইলে, নিম্নলিখিতগুলি সিদ্ধ হইবে।

(a) $x+y=y+x, \quad xy=yx$

[যোগ ও গুণের বিনিময় নিয়ম (commutative law)]

(b) $(x+y)+z=x+(y+z), x(yz)=(xy).z$

[যোগ এবং গুণের সংযোগ নিয়ম (associative law)]

(c) $(x+y).z=x.z+y.z, \quad x.(y+z)=x.y+x.z$

[বিচ্ছেদ নিয়ম (distributive law)]

(iii) x এবং y দুইটি মূলদ সংখ্যা হইলে, হয় $x>y$, $x<y$ ও $x=y$, এই তিনটির মধ্যে একটি এবং একটিমাত্র সত্য হইবে। এবং z যদি এরূপ একটি মূলদ সংখ্যা হয় যে $x<z$, $z<y$, তবে $x<y$ হইবে। [ক্রমের (order) নিয়ম]

(iv) যে কোন দুইটি মূলদ সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা আছে।

§ 1·6. **মূলদ সংখ্যার দশমিকে প্রকাশ** (decimal expression of a rational number) :

মনে কর, $\frac{p}{q}$ একটি মূলদ সংখ্যা $(q \neq 0)$। ইহাকে দশমিকে প্রকাশ করিতে হইলে প্রথমে আমরা pকে q-এর দ্বারা ভাগ করি এবং ভাগশেষকে 10 দ্বারা গুণ করিয়া আবার q দ্বারা ভাগ করি। দ্বিতীয় ভাগের ভাগশেষকে 10 দ্বারা গুণ করিয়া আবার q দ্বারা ভাগ করা হয়। এইরূপে ভাগশেষগুলিকে 10 দ্বারা গুণ করিয়া q দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলি ক্রমান্বয়ে দশমিক বিন্দুর পর প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ইত্যাদি স্থানের অঙ্কগুলির সমান হইবে।

এখন কিছুক্ষণ পরে যদি ভাগশেষ শূন্য হয়, তবে সংখ্যাটির দশমিকে প্রকাশ সসীম হইবে। যদি ভাগশেষ কখনই শূন্য না হয়, তবে প্রতি বারই ভাগশেষ q অপেক্ষা ছোট বলিয়া $1, 2, 3, \cdots\cdots, q-1$, এই কয়েকটি সংখ্যার মধ্যেই একটি হইবে। যেহেতু $1, 2, 3, \cdots, q-1$, এই কয়টি সংখ্যা সংখ্যায় সসীম এবং ভাগশেষ কখনই শূন্য নহে, সুতরাং কিছুক্ষণ পরেই ভাগশেষ পূর্ববর্তী কোন ভাগশেষের সহিত সমান হইবে। এই স্তর হইতে ভাগ প্রক্রিয়াটি আগের মত হইবে এবং ভাগফলগুলি পূর্ববর্তী ভাগফলগুলির

সহিত সমান হইবে যতক্ষণ না আবার ঐ ভাগফলটি ফিরিয়া আসে। ইহার পর প্রক্রিয়াটি আবার আবৃত্ত (repeated) হইবে। এইরূপে ভাগফলগুলি ক্রমান্বয়ে আবৃত্ত হইবে এবং মূলদ সংখ্যাটির দশমিকে প্রকাশ একটি আবৃত্ত দশমিক হইবে।

অতএব দেখা যাইতেছে যে, কোন মূলদ সংখ্যার দশমিক আকার, হয় সসীম দশমিক, না হয় আবৃত্ত অসীম দশমিক হইবে (either finite or infinite repeating decimal expression)।

উপরোক্ত যুক্তিটিকে পরপৃষ্ঠায় উদাহরণের সাহায্যে বুঝান হইতেছে।

উদাহরণ : $\frac{3}{8}$ এবং $\frac{10}{7}$কে দশমিক আকারে প্রকাশ কর।

```
3
8) 30 (3
   24
  8) 60 (7
     56
    8) 40 (5
       40
```

এখানে তিনবারের পর ভাগশেষ শূন্য হইতেছে। সুতরাং দশমিকটি সসীম হইবে এবং $\frac{3}{8} = \cdot375$.

```
10
7) 10 (1
    7
  7) 30 (4
     28
    7) 20 (2
       14
      7) 60 (8
         56
        7) 40 (5
           35
          7) 50 (7
             49
            7) 10 (1
                7
                3
```

10কে 7 দ্বারা ভাগ করিয়া, ভাগশেষগুলিকে 10 দিয়া গুণ করিয়া 7 দ্বারা ক্রমান্বয়ে ভাগ করিলে ভাগশেষগুলি হইতেছে যথাক্রমে 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3 ইত্যাদি। লক্ষ্য কর ভাগশেষগুলি 7 অপেক্ষা ছোট এবং $7-1=6$ বার ভাগ করিবার পর প্রথম ভাগশেষটি আবৃত্ত হইতেছে।

এখন আবার ভাগ প্রক্রিয়াগুলি আগের মতই হইবে, অর্থাৎ ভাগশেষ এবং ভাগফলগুলি আগের মত হইবে এবং 6 বার ভাগ করিবার পর আবার 3 ভাগশেষ হইবে। এইরূপে প্রক্রিয়াটি আবৃত্ত হইবে।

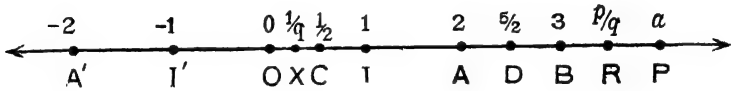
$$\therefore \quad \frac{10}{7} = 1\cdot428571.$$

§ 1·7. **মূলদ সংখ্যার জ্যামিতিক প্রকাশ** (**Geometrical representation of rational numbers**) :

মূলদ সংখ্যাগুলিকে নিম্নলিখিতভাবে একটি সরলরেখার উপরিস্থ বিন্দু হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

একটি সরলরেখার উপর যে-কোন একটি বিন্দু O লওয়া হইল। O বিন্দুটি সরলরেখাকে দুইটি অংশে ভাগ করে। একটি অংশকে ধনাত্মক দিক এবং অপর অংশটিকে ঋণাত্মক দিক হিসাবে লওয়া হয়। সাধারণতঃ O বিন্দুর ডানদিকের অংশটিকে ধনাত্মক দিক ধরা হয়। ধনাত্মক অংশে (অর্থাৎ O বিন্দুর ডানদিকে) আর একটি বিন্দু I লওয়া হইল। 0 (শূন্য) সংখ্যাটিকে O বিন্দুর দ্বারা এবং 1 সংখ্যাটিকে I বিন্দুর দ্বারা সূচিত করা হইল। O বিন্দুকে মূলবিন্দু (origin) এবং OI দৈর্ঘ্যকে একক দৈর্ঘ্য (unit length) বলে। এখন যে কোন মূলদ সংখ্যাকে $\overleftrightarrow{OI}$ সরলরেখার উপর একটি বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

$+a$ যদি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে ইহাকে O বিন্দুর ডানদিকে অবস্থিত একটি বিন্দু P দ্বারা সূচিত করা হইবে, যাহাতে $OP=a.OA$, হয়। যেমন

−2 −1 0 1/q ½ 1 2 5/2 3 p/q a
A′ I′ O X C I A D B R P

চিত্র 1

চিত্রে 2 সংখ্যাটি A বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা হইয়াছে, যেখানে $OA=2.OI$, 3 সংখ্যাটিকে B বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা হইয়াছে, যেখানে $OB=3.OI$, ইত্যাদি।

যে কোন ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $-b$কে O বিন্দুর বামদিকে অবস্থিত এবং O হইতে OI দৈর্ঘ্যের b গুণ দূরত্বের বিন্দুর দ্বারা সূচিত হইবে। যেমন -1কে I′ – বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে $OI'=OI$, -2 সংখ্যাটি O-এর বাম দিকে অবস্থিত A′ বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে $OA'=2.OI$, ইত্যাদি।

কোন ভগ্নাংশ $\frac{p}{q}$ নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশিত হইবে। মনে কর $q>0$ (ইহা সর্বদা সম্ভব, কারণ যদি ভগ্নাংশটি ঋণাত্মক হয়, তবে আমরা pকে ঋণাত্মক লইব, যেমন $-\frac{3}{4}=\frac{-3}{4}$)। $\overline{OI}$ রেখাংশটিকে q সমান অংশে ভাগ কর ;

মনে কর $\overline{OX}$ ঐরূপ একটি অংশ। এখন যদি p ধনাত্মক হয় তবে $\frac{p}{q}$ সংখ্যাটি O বিন্দুর ডানদিকে অবস্থিত বিন্দু R দ্বারা প্রকাশিত হইবে, যেখানে $OR=p.OX$. অনুরূপে যদি $p<0$ হয়, তবে $\frac{p}{q}$ সংখ্যাটি O বিন্দুর বামদিকে অবস্থিত একটি বিন্দু P′-এর দ্বারা প্রকাশিত হইবে, যেখানে $OP'=OP$. যেমন $\frac{5}{2}$ সংখ্যাটি প্রকাশ করিতে হইলে প্রথমে OIকে দুইটি সমান অংশ $\overline{OC}$ ও $\overline{CI}$-এ ভাগ করা হইল। এখন O বিন্দুর ডানদিকে D এমন একটি বিন্দু লওয়া হইল যাহাতে $OD=5.OC$ হয়। D বিন্দুর দ্বারা $\frac{5}{2}$ সংখ্যাটি সূচিত হইবে।

এইরূপে যে কোন মূলদ সংখ্যাকে $\overleftrightarrow{OI}$ সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা যায়। $\overleftrightarrow{OI}$ রেখাটিকে **সংখ্যারেখা** (number line) বলে।

§ 1·8. অমূলদ সংখ্যা (Irrational number) :

আগের অনুচ্ছেদে দেখান হইল যে প্রতিটি মূলদ সংখ্যার জন্য সংখ্যারেখার উপব একটি বিন্দু আছে। এক্ষণে দেখান হইবে যে ইহার বিপরীতটি সত্য-নহে, অর্থাৎ সংখ্যারেখার উপর এরূপ বিভিন্ন বিন্দু আছে যাহাদের কোন মূলদ সংখ্যার দ্বারা সূচিত করা যায় না।

সংখ্যারেখার একক বিন্দু I-এতে একটি লম্ব টানা হইল এবং ঐ লম্ব হইতে $IE=OI$ কাটিয়া লওয়া হইল। OE যোগ করা হইল এবং $\overleftrightarrow{OI}$ রেখায় এরূপ একটি বিন্দু F লওয়া হইল যাহাতে $OF=OE$ হয়।

E

I′ O I F

চিত্র 2

(∵ OIE সমকোণী ত্রিভুজ)

এখন $OF=OE=\sqrt{OI^2+IE^2}$

$=\sqrt{OI^2+OI^2}=\sqrt{2.OI^2}$

(∵ অঙ্কন অনুযায়ী $OI=IE$) $=\sqrt{2}.OI$.

∴ F বিন্দুটির মূলবিন্দু হইতে দূরত্ব হইতেছে OI রেখাংশের $\sqrt{2}$ গুণ। অতএব F বিন্দুটি $\sqrt{2}$ সংখ্যাকে সূচিত করিবে। কিন্তু $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা নহে। ইহা নিম্নলিখিতভাবে প্রমাণ করা যায়।

যদি সম্ভব হয়, মনে কর $\sqrt{2}$ একটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা। মনে কর $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, যেখানে m এবং n দুইটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা। এখন আমরা মনে করিতে পারি যে m এবং n-এর কোন সাধারণ উৎপাদক নাই, কারণ যদি

কোন সাধারণ উৎপাদক থাকে, তবে উহাকে প্রথমেই হর এবং লব হইতে অপসারণ (cancel) করা যায়।

$\because \quad \sqrt{2}=\frac{m}{n}, \quad \therefore \quad n.\sqrt{2}=m$। উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া পাই $2n^2=m^2$। $\therefore$ 2, m^2-এর উৎপাদক, অর্থাৎ m^2 হইতেছে ধনাত্মক যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা। অতএব m-ও একটি যুগ্মসংখ্যা [কারণ, যদি m অযুগ্ম হয়, তবে mকে $m=2p+1$ আকারে লওয়া যায়; এবং তাহা হইলে, $m^2=(2p+1)^2=4p^2+4p+1=2(2p^2+2p)+1$ একটি অযুগ্ম রাশি হইত]। $\therefore$ mকে আমরা $m=2k$ আকারে লিখিতে পারি যেখানে k একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $\therefore$ $2n^2=m^2=(2k)^2$, বা, $n^2=2k^2$। সুতরাং পূর্বের ন্যায়, n^2 এবং সেইহেতু n-ও একটি যুগ্ম সংখ্যা। $\therefore$ 2 সংখ্যাটি m এবং n উভয়েরই উৎপাদক। কিন্তু প্রথমেই আমরা ধরিয়াছিলাম যে m এবং n-এর কোন সাধারণ উৎপাদক নাই। অতএব আমরা একটি কল্পনা-বিরোধী ফল পাইতেছি। $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা ধরা হইয়াছে বলিয়া ইহা হইতেছে। অতএব $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা হইতে পারে না।

অতএব সংখ্যা রেখার F এমন একটি বিন্দু যাহা মূলদ সংখ্যার দ্বারা সূচিত করা যায় না। এইরূপে দেখান যায় সংখ্যা-রেখার উপর অসংখ্য বিন্দু আছে যেগুলিকে মূলদ সংখ্যার দ্বারা সূচিত করা যায় না। এইসব বিন্দু, যেগুলি কোন মূলদ সংখ্যার দ্বারা সূচিত হয় না, তাহাদের প্রতিটির সহিত এক-একটি করিয়া নূতন সংখ্যা যুক্ত করা হয়। এইসব সংখ্যাকে অমূলদ সংখ্যা বলা হয়। সুতরাং, এখন সংখ্যা-রেখার উপর প্রতিটি বিন্দুকে হয় মূলদ সংখ্যা বা অমূলদ সংখ্যার দ্বারা সূচিত করা যাইবে। মূলদ সংখ্যা এবং অমূলদ সংখ্যাসমূহকে সমষ্টিগতভাবে **বাস্তব সংখ্যা** (real number) বলে।

অমূলদ সংখ্যাকে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায় না বলিয়া উহাদের **অমেয়** (incommensurable) বলে। কিন্তু প্রতিটি অমূলদ সংখ্যার একটি নির্দিষ্ট মান আছে, এবং এই নির্দিষ্ট মান মূলদ সংখ্যার দ্বারা যতদূর খুশী সঠিকভাবে প্রকাশ করা যায়। ইহা নিম্নের উদাহরণটির সাহায্যে বুঝান হইতেছে।

আমরা দেখিয়াছি $\sqrt{2}$ ভগ্নাংশ নয়। কিন্তু $\sqrt{2}$এর আসন্ন মান (approximate value) যতদূর খুশী সঠিকভাবে নির্ণয় করা যায়।

$1^2<2<2^2 \quad \therefore \quad 1<\sqrt{2}<2. \quad \therefore$ $\sqrt{2}$-এর মান 1 এবং 2-এর মধ্যে অবস্থিত।

আবার, $1{\cdot}1, 1{\cdot}2, 1{\cdot}3, \cdots\cdots, 1{\cdot}9$কে বর্গ করিয়া পাই

$(1{\cdot}4)^2=1{\cdot}96<2$ এবং $(1{\cdot}5)^2=2{\cdot}25>2$

$\therefore \quad 1{\cdot}4<\sqrt{2}<1{\cdot}5$, অতএব $\sqrt{2}=1{\cdot}4\cdots$

আবার $1{\cdot}41, 1{\cdot}42, \cdots\cdots, 1{\cdot}49$কে বর্গ করিয়া পাই

$(1{\cdot}41)^2=1{\cdot}9881<2$, এবং $(1{\cdot}42)^2=2{\cdot}0164>2$

$\therefore \quad 1{\cdot}41<\sqrt{2}<1{\cdot}42. \quad \therefore \quad \sqrt{2}=1{\cdot}41\cdots$

অনুরূপে $(1{\cdot}414)^2=1{\cdot}999396<2$, $(1{\cdot}415)^2=2{\cdot}002225>2$

$\therefore \quad 1{\cdot}414<\sqrt{2}<1{\cdot}415. \quad \therefore \quad \sqrt{2}=1{\cdot}414\cdots\cdots$

অনুরূপে যে কোন দশমিক স্থান অবধি $\sqrt{2}$-এর মান বাহির করা যায়। অর্থাৎ $\sqrt{2}$ এর মান যতদূর খুশী সঠিকভাবে বাহির করিতে পারা যায়। $\sqrt{2}$-এর দশমিকে প্রকাশ অনাবৃত্ত অসীম হইবে, কারণ যদি সসীম বা আবৃত্ত হইত, তবে $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা হইত। কিন্তু $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা নয়।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, যে কোন অমূলদ সংখ্যার যতদূর খুশী সঠিক আসন্ন মান বাহির করা যায় এবং ঐ সংখ্যার দশমিকে প্রকাশ **অনাবৃত্ত** (non-recurring) অসীম হইবে। বিপরীতভাবে প্রমাণ করা যায় যে, যে-কোন অনাবৃত্ত অসীম দশমিক একটি অমূলদ সংখ্যাকে সূচিত করে।

মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যার পূর্বোক্ত আলোচনা হইতে আমরা বলিতে পারি যে,

কোন বাস্তব রাশির দশমিক আকারে প্রকাশ যদি সসীম বা আবৃত্ত অসীম হয়, তবে উহা একটি মূলদ সংখ্যা হইবে এবং যদি অনাবৃত্ত অসীম হয়, তবে উহা অমূলদ হইবে। বিপরীতক্রমে, সসীম বা আবৃত্ত অসীম দশমিক একটি মূলদ সংখ্যা সূচিত করে এবং অনাবৃত্ত অসীম দশমিক একটি অমূলদ সংখ্যাকে সূচিত করে।

দুইটি বাস্তব সংখ্যার যোগ এবং গুণফল একটি বাস্তব সংখ্যা হইবে। প্রমাণ করা যায় যে, যোগ এবং গুণের জন্য বাস্তব সংখ্যাসমূহ, মূলদ সংখ্যা-সমূহের জন্য § 1·5-এ বর্ণিত নিয়মগুলি সিদ্ধ করে।

দুইটি বাস্তব সংখ্যা a এবং b-এর মধ্যে $(a<b)$ অবস্থিত সব বাস্তব সংখ্যা সমষ্টিকে (collection) একটি **বিস্তার** বলে। যদি এই বিস্তারে প্রান্তবিন্দুদ্বয় a এবং b অন্তর্ভুক্ত হয় তবে বিস্তারটিকে **বদ্ধ বিস্তার** (closed interval) বলে এবং ইহাকে $[a, b]$ সংকেত দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যদি প্রান্ত বিন্দুদ্বয় বিস্তারের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত না হয়, তবে বিস্তারটিকে **অবদ্ধ** বা **মুক্ত বিস্তার** (open interval) বলে এবং ইহাকে (a, b) সংকেত দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং x যদি $[a, b]$ বদ্ধ বিস্তারের একটি সংখ্যা হয় তবে $a \leqslant x \leqslant b$ হইবে। x যদি অবদ্ধ বিস্তার (a, b)-এর একটি সংখ্যা হয় তবে $a < x < b$ হইবে।

অনেক সময় সকল বাস্তব সংখ্যার সমষ্টিকে $-\infty < x < \infty$, সংকেত দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

§ 1·9. **পরম মান** (Absolute value) :

কোন বাস্তবসংখ্যা a-এর পরম মান $|a|$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ইহার সংজ্ঞা নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া হয়।

$|a| = a$, যদি a ধনাত্মক হয়, অর্থাৎ $a > 0$

$= 0$, যদি $a = 0$ হয়

$= -a$, যদি a ঋণাত্মক হয়, অর্থাৎ $a < 0$.

উদাহরণস্বরূপ, যেমন,

$|3| = 3 \quad (\because \quad 3 > 0)$, $|0| = 0$,

$|-5| = -(-5) = 5 \quad (\because \quad -5 < 0)$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{}$-

$|2-3| = |-1| = 1$ ইত্যাদি।

$\therefore$ কোন সংখ্যা a এর পরম মান হইতেছে ঐ সংখ্যার সাংখ্যমান (numerical value)।

$|x| = a$ হইলে হয় $x = +a$ বা, $x = -a$।

উদাহরণমালা 1

উদা. 1. x-এর কোন্ মানের জন্য নিম্নলিখিত রাশিগুলি অনির্ণেয় ?

(i) $\dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ (ii) $\dfrac{\sin x}{x}$ (iii) $\dfrac{x^2 + 4x + 1}{x^2 - 2x + 1}$

(i) $x = 2$-এর জন্য $x - 2 = 0$। যেহেতু হর $x - 2$ শূন্য হইতে পারে না, $\therefore$ $x = 2$-এর জন্য রাশিটি অনির্ণেয়।

(ii) $x = 0$-এর জন্য রাশিটি $\frac{0}{0}$ আকারের হয়। $\because$ 0-এর দ্বারা ভাগ করা যায় না, $\therefore$ রাশিটি $x = 0$-এর জন্য অনির্ণেয়।

(iii) $x = 1$-এর জন্য রাশিটির হর $= 0$ হয়।

$\therefore$ $x = 1$-এর জন্য রাশিটি অনির্ণেয়।

উদা. 2. দেখাও যে $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ রাশি।

যদি সম্ভব হয় মনে কর $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$, যেখানে p এবং q দুইটি পরস্পর মৌলিক ধনাত্মক রাশি (অর্থাৎ p ও q-এর কোন সাধারণ উৎপাদক নাই), $q \neq 0$.

$\because \quad \sqrt{3}=\frac{p}{q}, \quad \therefore \quad \sqrt{3}q=p$. বর্গ করিয়া পাই, $3q^2=p^2$.

$\therefore$ 3, p^2-এর উৎপাদক। অতএব 3, p-এর উৎপাদক [কারণ, $p=3k+1$, বা, $3k+2$ হইলে $p^2=3(3k^2+2k)+1$,

বা, $3(3k^2+4k+1)+1$ হইবে]। $\therefore \quad p=3k$ রূপে লেখা যায় যেথানে k একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $\therefore$ $p^2=9k^2$। $\therefore$ $3q^2=p^2=9k^2$ বা, $q^2=3k^2$। $\therefore$ পূর্বের ন্যায় 3, q^2-এর এবং সেইজন্য qএর উৎপাদক। অতএব, 3, p এবং q উভয়েরই উৎপাদক। কিন্তু আমরা ধরিয়া লইয়াছি যে p এবং q-এর কোন সাধারণ উৎপাদক নাই। $\therefore$ একটি কল্পনাবিরোধী ফল পাইতেছি। ইহা $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$ ধরার জন্য হইয়াছে।

অতএব, $\sqrt{3}$, $\frac{p}{q}$ আকারের হইতে পারে না অর্থাৎ $\sqrt{3}$ অমূলদ।

উদা. 3. $3^{\frac{1}{3}}$-এর দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর।

$$1^3=1<3 \quad \text{এবং} \quad 2^3=8>3$$

$$\therefore \quad 1^3<3<2^3, \quad \text{বা,} \quad 1<3^{\frac{1}{3}}<2$$

এখন, 1·1, 1·2,……1·9-এর ঘন লইয়া পাই

$$(1{\cdot}4)^3=2{\cdot}744<3 \quad \text{এবং} \quad (1{\cdot}5)^3=3{\cdot}375>3.$$

$$\therefore \quad 1{\cdot}4<3^{\frac{1}{3}}<1{\cdot}5$$

1·41, 1·42……1·49-এর ঘন লইয়া পাই

$$(1{\cdot}44)^3=2{\cdot}985984<3 \quad \text{এবং} \quad (1{\cdot}45)^3=3{\cdot}193625>3$$

$$\therefore \quad 1{\cdot}44<3^{\frac{1}{3}}<1{\cdot}45. \quad \text{অতএব} \quad 3^{\frac{1}{3}}=1{\cdot}44\ldots\ldots$$

উদা. 4. দেখাও যে, $|ab|=|a|.|b|$.

যদি $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ হয় তবে $a.b\geqslant 0$

$\therefore \quad |a|=a, \quad |b|=b$, এবং $|ab|=ab=|a|.|b|$

যদি $a\geqslant 0$, $b<0$ হয় তবে, $ab\leqslant 0$ এবং $|a|=a$, ও $|b|=-b$.

$\therefore \quad |ab|=-ab=a.(-b)=|a|.|b|$

অনুরূপে $a<0$, $b\geqslant 0$ হইলে $|ab|=|a|\ |b|$

যদি $a<0$, $b<0$ হয়, তবে $ab>0$ এবং $|a|=-a, \quad |b|=-b$.

$|ab|=ab=(-a).(-b)=|a|.|b|$

$\therefore \quad a$. এবং b-এর যে কোন মানের জন্য $|ab|=|a|.|b|$.

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, $|a+b| \leqslant |a|+|b|$

যেহেতু $|a| = +a$ যখন $a>0$

$= -a$ যখন $a<0$.

সুতরাং $a \leqslant |a|$, $-a \leqslant |a|$

এখন যদি $a+b \geqslant 0$ হয়, তবে

$$|a+b| = a+b \leqslant |a|+|b|$$

এবং যদি $a+b<0$ হয়, তবে

$$|a+b| = -(a+b) = -a-b \leqslant |a|+|b|$$

$\therefore$ a এবং b-এর যে কোন মানের জন্য, $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

উদা. 6. দেখাও যে, যে কোন দুইটি মূলদ সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা আছে।

মনে কর a এবং b দুইটি মূলদ সংখ্যা $(b>a)$ এবং n একটি অখণ্ড ধন সংখ্যা। এখন $\dfrac{b-a}{n}$ একটি মূলদ সংখ্যা। যেহেতু মূলদ সংখ্যা যোগ এবং গুণের জন্য বদ্ধ, সেজন্য $a+\dfrac{b-a}{n}, a+2\dfrac{b-a}{n}, a+3.\dfrac{b-a}{n}, \cdots, a+(n-1).\dfrac{b-a}{n}$, এর প্রতিটিই মূলদ সংখ্যা। এই সংখ্যাগুলি স্পষ্টতঃ a এবং b-এর মধ্যে আছে। সুতরাং a এবং b-এর মধ্যে n সংখ্যক মূলদ সংখ্যা পাওয়া গেল। এখন nকে যতদূর ইচ্ছা বড় লওয়া যায়। সুতরাং বলিতে পারি a এবং b-এর মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা আছে।

[**দ্রষ্টব্য :** যে কোন দুইটি বাস্তব সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য বাস্তব সংখ্যা আছে।]

উদা. 7. দেখাও যে $\dfrac{p}{q}$ একটি মূলদ সংখ্যা হইলে $\dfrac{p}{q}+\sqrt{2}$ এবং $\dfrac{p}{q}.\sqrt{2}$ অমূলদ সংখ্যা।

যদি সম্ভব হয়, মনে কর $\dfrac{p}{q}+\sqrt{2} = $ মূলদ $= \dfrac{r}{s}$, যেখানে r এর s অখণ্ড সংখ্যা এবং $s \neq 0$. $\therefore$ $\sqrt{2} = \dfrac{r}{s} - \dfrac{p}{q} =$ একটি মূলদ সংখ্যা ;

কিন্তু $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা নহে। অতএব $\dfrac{p}{q}+\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা নহে।

অনুরূপে যদি সম্ভব হয়, মনে কর $\dfrac{p}{q}.\sqrt{2} =$ একটি মূলদ সংখ্যা $= \dfrac{r}{s}$ (মনে কর)

$\therefore \quad \sqrt{2} = \frac{r}{s} / \frac{p}{q}$. ($p \neq 0$ ধরিয়া) $= \frac{qr}{ps} =$ মূলদ সংখ্যা; কিন্তু $\sqrt{2}$ অমূলদ সংখ্যা। $\therefore \quad \frac{p}{q}\sqrt{2}$ অমূলদ সংখ্যা।

উদা. 8. দুইটি অমূলদ সংখ্যা লিখ (i) যাহাদের সমষ্টি একটি মূলদ সংখ্যা, (ii) যাহাদের গুণফল একটি মূলদ সংখ্যা।

(i) $2+\sqrt{5}$ এবং $3-\sqrt{5}$ দুইটি অমূলদ সংখ্যা এবং ইহাদের যোগফল হইতেছে $(2+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=5$, যাহা মূলদ।

(ii) $3+\sqrt{5}$ এবং $3-\sqrt{5}$ দুইটি অমূলদ সংখ্যা এবং ইহাদের গুণফল হইতেছে $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=9-5=4=$ মূলদ।

উদা. 9. প্রমাণ কর যে $|x-a|<b$ হইলে $a-b<x<a+b$ হইবে।

যদি $x-a>0$ হয়, তবে $|x-a| = x-a<b, \quad \therefore \quad x<a+b.$

আবার, $\because \quad x-a>0. \quad \therefore \quad x>a,$ বা, $a<x$

$\therefore \quad a-b<x \qquad [\because \quad b$ ধনাত্মক]

সুতরাং $a-b<x<a+b.$

যদি $x-a<0$ হয়, তবে $|x-a| = a-x<b \quad \therefore \quad a-b<x.$

যেহেতু $x-a<0 \quad \therefore \quad x<a,$ বা, $x<a+b$ [যেহেতু b ধনাত্মক]

সুতরাং এইক্ষেত্রেও $a-b<x<a+b.$

[অনুরূপে যদি $a<x<b$ হয়, তবে ইহাকে আমরা $\left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$ এইরূপে লিখিতে পারি।]

প্রশ্নমালা 1

1. x-এর কোন্ মানের জন্য নিম্নলিখিতগুলি অসংজ্ঞেয়?

(i) $\frac{x^2}{x}$ (ii) $\frac{\tan x}{x}$ (iii) $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ (iv) $\frac{x^5-32}{x^2-4}$

2. x-এর কোন্ মানের জন্য নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সত্য নহে?

(i) $\frac{x}{x}=1.$ (ii) $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}=\frac{x^2+xa+a^2}{x+a}$

(iii) $\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}.$ (iv) $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\tan x.$

3. প্রমাণ কর যে $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

4. $\sqrt{7}$-এর চারি দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান বাহির কর।

5. $\sqrt[3]{2}$-এর তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর।

6. যদি r পূর্ণবর্গ নহে এরূপ একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে দেখাও যে $\frac{p}{q}\sqrt{r}$ একটি অমূলদ সংখ্যা যেখানে p, $q \neq 0$, অখণ্ড সংখ্যা।

7. $\frac{4}{5}$ এবং $\frac{10}{11}$-এর মধ্যে আটটি মূলদ সংখ্যা বাহির কর।

8. দেখাও $\sqrt{3} > \sqrt{2}$. $\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{2}$-এর মধ্যে চারিটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

9. প্রমাণ কর যে, a একটি অমূলদ সংখ্যা হইলে, সর্বদা একটি অখণ্ড সংখ্যা n এবং একটি অমূলদ সংখ্যা b পাওয়া যায়, যাহাদের জন্য $a = n + b$ এবং $0 < b < 1$ হয়।

10. দেখাও যে দুইটি অমূলদ সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা আছে।

11. $\frac{1}{2}$ এবং 1-এর মধ্যে

(i) কতগুলি বাস্তব সংখ্যা আছে?

(ii) পূর্ণসংখ্যা নহে এরূপ কোন মূলদ সংখ্যা আছে কি?

(iii) বাস্তব সংখ্যা নহে এইরূপ কোন মূলদ সংখ্যা আছে কি?

[A. I. H. S. '70]

12. বন্ধনীর মধ্যে প্রদত্ত শব্দগুলি হইতে যোগ্য শব্দ দ্বারা নিম্নের শূন্যস্থান পূরণ কর :—

(i) দুইটি··· সমষ্টি সর্বদা····· হয়। [মূলদ সংখ্যা ও অমূলদ সংখ্যা]

(ii) একটি অমূলদ সংখ্যার দশমিক প্রকাশ······দশমিক হয়।

[সসীম, অসীম আবৃত্ত, অসীম অনাবৃত্ত]

(iii) একটি সংখ্যার দশমিক প্রকাশ সসীম, সংখ্যাটি···[মূলদ, অমূলদ]।

13. দেখাও যে, কোন বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গকে 8 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল সবক্ষেত্রে 1 হইবে। [A. I. H. S. '72]

14. প্রমাণ কর যে, যে কোন তিনটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল 6 দ্বারা বিভাজ্য।

15. মানের ক্রম অনুসারে নিম্নলিখিত অমূলদ সংখ্যাগুলি সাজাও।

(i) $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{10}$, (ii) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{7}$,

(iii) $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[6]{25}$, $\sqrt[3]{8}$.

দ্বিতীয় অধ্যায়

চলরাশি এবং অপেক্ষক (Variable and Function)

§ 2·1. **চলরাশি** (variable) **এবং ধ্রুবক** (constant) :

গণিত, পদার্থ বিদ্যা, রসায়ন বিদ্যা, প্রভৃতি প্রাকৃতিক বিজ্ঞানের (Natural Science) এবং অর্থনীতি প্রভৃতি সমাজ বিজ্ঞানের আলোচনার সময় আমরা বিভিন্ন রাশি লইয়া আলোচনা করি। যেমন ভর (mass), সময়, দৈর্ঘ্য, ওজন, তাপমাত্রা (temperature), ভোগ্য পণ্যের দাম (price of commodity), ইত্যাদি। এই সব রাশির পরিমাণকে সাধারণতঃ বাস্তব সংখ্যার দ্বারা পরিমাপ করা হয়। সুতরাং এই সব রাশিকে বাস্তব সংখ্যার দ্বারা সূচিত করা হয়। রাশিগুলির একক (unit) বাদ দিয়া আমরা শুধু মাত্র তাহাদের সাংখ্যমান (numerical value) লই। অর্থাৎ রাশিগুলিকে বিশুদ্ধ বাস্তব সংখ্যা (pure real number) হিসাবে ধরা হয়।

রাশিগুলিকে সাংকেতিক ভাবে a, b, c, x, y, z ····প্রভৃতি ইংরাজি বর্ণমালার অক্ষর দিয়া প্রকাশ করা হয়।

বিভিন্ন গাণিতিক আলোচনায় অধিকাংশ ক্ষেত্রেই একাধিক রাশির ব্যবহার করিতে হয়। এইসব রাশির কোন কোনটির মানের পরিবর্তন হয়, আবার কোন কোন রাশির মান অপরিবর্তিত থাকে। যে সব রাশির মান পরিবর্তিত হয়, তাহাদিগকে **চলরাশি** বা **চল** (variable) বলে, এবং যে সব রাশির মানের পরিবর্তন হয় না, তাহাদিগকে **ধ্রুবক** (constant) বলে।

উদাহরণস্বরূপ মনে কর একটি বস্তুকণা O বিন্দু হইতে যাত্রা আরম্ভ করিয়া $\vec{OP}$ সরলরেখায় সমবেগে (uniform velocity) চলিতেছে। এখন সময়কে t দ্বারা এবং বস্তুকণার O বিন্দু হইতে দূরত্বকে s দ্বারা এবং গতিবেগকে a দ্বারা সূচিত করিলে আমরা দেখিতে পাই যে, ঘড়ির চলার সাথে সাথে t-এর মানের পরিবর্তন হয় এবং বিভিন্ন সময় দূরত্ব s-এর বিভিন্ন মান থাকে, কিন্তু সমবেগে যাওয়ায় গতিবেগ a-এর মানের পরিবর্তন হয় না। সুতরাং এখানে t এবং s চলরাশি, কিন্তু a ধ্রুবক।

উপরোক্ত আলোচনা হইতে চল রাশি এবং ধ্রুবকের সংজ্ঞা নিম্নলিখিত ভাবে দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা : যদি কোন গাণিতিক আলোচনায় একটি রাশি বিভিন্ন মান গ্রহণ করিতে পারে, তবে সেই রাশিকে **চলরাশি** (variable) বলে।

যদি রাশিটির মান আলোচ্য বিষয়ে সর্বদা সমান থাকে (অর্থাৎ মানের পরিবর্তন না হয়) তবে তাহাকে **ধ্রুবক** (constant) বলে।

নিম্নে চল রাশি এবং ধ্রুবকের বিভিন্ন উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

উদা. 1. বৃত্তের ক্ষেত্রফলকে A এবং ব্যাসার্ধকে r দ্বারা সূচিত করিলে $A=\pi r^2$ হয়। এখন r-এর বিভিন্ন মানের জন্য A-এর বিভিন্ন মান হয়, কিন্তু πএর মান ধ্রুবক। অতএব r চলরাশি হইলে A চলরাশি হইবে, কিন্তু π ধ্রুবক।

উদা. 2. ধর একটি পাত্রে কিছু পরিমাণ জলকে উত্তপ্ত করা হইতেছে। এখন জলের উত্তাপকে যদি t° দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে t একটি চলরাশি হইবে, কারণ উত্তপ্ত করিলে জলের তাপমাত্রা বাড়িতে থাকিবে, এবং t বিভিন্ন মান গ্রহণ করিবে।

উদা. 3. মনে কর কোন একটি বস্তুকণা অভিকর্ষজ আকর্ষণে পড়িতেছে। যদি বস্তুকণাটির ভূপৃষ্ঠ হইতে দূরত্ব x হয় এবং গতিবেগ v হয় তবে x এবং v উভয়েই চলরাশি। যদি ত্বরণ g হয়, তবে g ধ্রুবক।

উদা. 4. অধিবৃত্তের সমীকরণ হইতেছে $y^2=4ax$। এখানে x এবং y চলরাশি, a হইতেছে ধ্রুবক।

দ্রষ্টব্য: (1) যদি কোন চলরাশির মান কেবলমাত্র বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে তাহাকে **বাস্তব চলরাশি** (real variable) বা বাস্তব চল বলে। এই পুস্তকে আমরা কেবলমাত্র বাস্তব চলরাশি লইয়া আলোচনা করিব। সুতরাং এখানে চলরাশি বা চল বলিতে আমরা বাস্তব চলরাশি বুঝাইব।

(2) চলরাশিকে সাধারণতঃ ইংরাজি বর্ণমালার নীচের দিকে অবস্থিত অক্ষরসমূহ, x, y, z, u, v, w ইত্যাদির দ্বারা এবং ধ্রুবককে বর্ণমালার উপরের দিকের অক্ষর a, b, c, d ইত্যাদির দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তবে ইহার ব্যতিক্রমও হইতে পারে।

§ 2·2. চলের মান গ্রহণের ক্ষেত্র বা বিচরণ ক্ষেত্র (range of a variable) :

অনেক সময় চলরাশি সকল বাস্তব মান গ্রহণ করিতে পারে না। একটি চলরাশি যে সকল বাস্তব মান গ্রহণ করিতে পারে, সেই সব মানগুলিকে ঐ চলের **বিচরণক্ষেত্র** (range) বলে। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর :

(1) ধর t হইতেছে কোন পাত্রস্থ জলের উত্তাপ। এখন t-এর মান 100°C হইতে বেশী হইতে পারে না ; কারণ, 100°C-এর বেশী উত্তাপ হইলে জল বাষ্প হইয়া যাইবে এবং 0°C হইতে কম হইতে পারে না, কারণ,

0°C-এর কম উত্তাপে জল জমিয়া বরফ হইয়া যাইবে। সুতরাং এই ক্ষেত্রে আমরা বলিতে পারি t-এর মান 0 হইতে 100 পর্যন্ত যে কোন বাস্তব সংখ্যা হওয়া সম্ভব। ইহাকে $0 \leqslant t \leqslant 100$, এইরূপ বদ্ধ বিস্তার (closed interval) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অতএব এখানে t-এর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে $0 \leqslant t \leqslant 100$.

(2) মনে কর x হইতেছে কোন ছাত্রের স্কুল ফাইনাল পরীক্ষায় আবশ্যিক গণিতে প্রাপ্ত নম্বর। এখন সর্বনিম্ন নম্বর 0 হইতে পারে, এবং সর্বোচ্চ নম্বর 100 হইতে পারে। আবার যেহেতু কোন পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর অখণ্ড ধন-সংখ্যার দ্বারা দেওয়া হয়, অতএব x-এর সম্ভাব্য মান হইতেছে 0 এবং 100-এর মধ্যে অবস্থিত পূর্ণসংখ্যাসমূহ।

সুতরাং x-এব বিচরণক্ষেত্র হইতেছে,

$$\{0, 1, 2, 3, \cdots, 98, 99, 100\}.$$

(3) মনে কব $y = \sqrt{(x-1)(2-x)}$, যেখানে y-এর মান বাস্তব। y বাস্তব হইতে হইলে $(x-1)(2-x)$-এর মান ধনাত্মক হইতে হইবে। এখন $(x-1)(2-x)$ ধনাত্মক হইবে যদি xএব মান 1 এবং 2-এর মধ্যে অবস্থিত থাকে। অতএব x-এর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে $1 \leqslant x \leqslant 2$, এই বদ্ধ বিস্তার।

উদাহরণ (1)-এ t-এর মান 0 এবং 100-এর মধ্যে যে-কোন সংখ্যা হইতে পারে। কিন্তু উদাহরণ-2এ x, 0 এবং 100এর মধ্যে সব মান লইতে পারে না। উদাহরণ 1 এর চল t-কে **সন্তত** চল (continuous variable) বলে এবং উদাহরণ (2)-এর চল x-কে বলা হয় **অসন্তত** চল (discontinuous variable) বা **বিশ্লিষ্ট** (discrete) চল। সুতরাং সন্তত চলের সংজ্ঞা নিম্নলিখিত ভাবে দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা : যদি কোন চল কোন একটি বিস্তারের সকল মান গ্রহণ করিতে পারে, তবে ঐ চলকে ঐ বিস্তারে সন্তত চল বলে।

অন্যথায় ইহাকে অসন্তত চল বলে।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) এই পুস্তকে আমরা সাধারণতঃ সন্তত চল লইয়া আলোচনা করিব এবং চল বলিতে একটি সন্তত চলকে বুঝাইব।

(2) অনেক সময় চলের স্বাভাবিক বিচরণক্ষেত্রের সকল সংখ্যা না লইয়া আমরা শর্ত আরোপ করিয়া স্বাভাবিক বিচরণক্ষেত্রের কিছু অংশকে চলের বিচরণক্ষেত্র হিসাবে লই। উদাহরণস্বরূপ যদি একটি বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 1$ হয় তবে, $y = \pm \sqrt{1-x^2}$ হইবে। যেহেতু y বাস্তব, $1-x^2$ ধনাত্মক হইবে।

সুতরাং x-এর মান, -1 এবং $+1$-এর মধ্যে থাকিবে। $\therefore$ x-এর স্বাভাবিক বিচরণক্ষেত্র হইতেছে $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

এখন আমরা যদি বৃত্তের প্রথম পাদে (first-quadrant) অবস্থিত অংশটি লই, তবে x ঋণাত্মক হইতে পারে না। $\therefore$ তখন x-এর বিচরণক্ষেত্র হইবে $0 \leqslant x \leqslant 1$.]

উদা. 1. $y=\sin x$ হইলে, x-এর যে কোন বাস্তব মান হইতে পারে। কিন্তু y-এর মান -1 এবং $+1$-এর মধ্যে থাকিবে। $\therefore$ x-এর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে $-\infty < x < \infty$ এবং y-এর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

যদি x-এর বিচরণক্ষেত্রের উপর শর্ত আরোপ করা হয় যে $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ হইবে, তখন y-এর বিচরণক্ষেত্র হইবে $0 \leqslant x < 1$.

§ **2·3. অপেক্ষক** (Function) :

বিভিন্ন গাণিতিক আলোচনার সময় দেখা যায় দুইটি চলরাশি এমনভাবে যুক্ত যে একটির মান অপরটির মানের উপর নির্ভরশীল। যেমন, একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল তাহার ব্যাসার্ধের উপর নির্ভরশীল। ব্যাসার্ধের প্রতিটি মানের জন্য ক্ষেত্রফলের একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়; এইরূপ ক্ষেত্রে ক্ষেত্রফলকে ব্যাসার্ধের অপেক্ষক বলা হয়। সুতরাং অপেক্ষকের সংজ্ঞা নিম্নলিখিত ভাবে দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা : যদি কোন গাণিতিক আলোচনায় দুইটি চলরাশি x এবং y এমন-ভাবে যুক্ত হয় যে x-এর প্রতিটি সম্ভাব্য মানের জন্য y-এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়, তবে yকে x-এর অপেক্ষক বলা হয়।

x-এর মানের উপর y নির্ভরশীল বলিয়া xকে **স্বাধীন চল** (independent variable) এবং yকে **অধীন চল** (dependent variable) বলে।

উদাহরণস্বরূপ মনে কর x হইতেছে বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং y হইতেছে উহার ক্ষেত্রফল। তাহা হইলে $y=x^2$ হইবে।

এখন $x=1$ হইলে. $y=1^2=1$ হইবে,
$x=1{\cdot}1$ হইলে, $y=(1{\cdot}1)^2=1{\cdot}21$ হইবে,
$x=2$ হইলে, $y=(2)^2=4$ হইবে,
$x=\sqrt{2}$ হইলে, $y=(\sqrt{2})^2=2$ হইবে, ইত্যাদি।

সুতরাং দেখা যাইতেছে x-এর যে কোন মানের জন্য y-এর একটি নির্দিষ্ট মান আছে। অতএব y হইতেছে x-এর অপেক্ষক।

আর একটি উদাহরণ লওয়া যাক্। মনে কর একটি বস্তুকণা O বিন্দু হইতে একটি সরলরেখায় যাত্রা আরম্ভ করে। মনে কর যাত্রাকাল হইতে t সময় পরে

উক্ত কণাটির O বিন্দু হইতে দূরত্ব হইতেছে s। এখন প্রতিটি সময়ে বস্তু কণাটি O বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থান করিবে। অতএব t-এর প্রতিটি সম্ভাব্য মানের জন্য (এখানে t-এর সম্ভাব্য মান হইতেছে যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা) s-এর একটি নির্দিষ্ট মান আছে। অতএব s হইতেছে t-এর অপেক্ষক। ইহাকে সাধারণভাবে আমরা $s=f(t)$, এই প্রতীক (symbol) দ্বারা প্রকাশ করি।

y, x-এর অপেক্ষক হইলে, সাধারণতঃ $y=f(x)$ এইরূপভাবে প্রকাশ করা হয় (ইহাকে y সমান f, x এইরূপে পড়িবে)।

এখানে y এবং $f(x)$ একই রাশিকে সূচিত করিতেছে। $y=f(x)$-এ প্রতীক f অক্ষরটি ইংরাজি function শব্দের প্রথম অক্ষর, x স্বাধীন চল এবং y-এর মান x-এর মান হইতে কোন একটি নিয়মে পাওয়া যাইতেছে, ইহাই বুঝায়।

x-এর অপেক্ষককে $F(x)$, $\phi(x)$, $g(x)$ ইত্যাদি যে কোন প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে।

x-এর যে সকল মানের জন্য $y=f(x)$ অপেক্ষকের মান পাওয়া যায়, সেই সকল মানকে অপেক্ষকটির **সংজ্ঞার ক্ষেত্র** (domain of definition) বলে।

যেমন যদি $y=\sqrt{(x-1)(2-x)}$ হয় তবে,

অর্থাৎ যদি $y=f(x)=\sqrt{(x-1)(2-x)}$ হয় তবে, $f(x)$-এর সংজ্ঞার ক্ষেত্র হইতেছে $1\leqslant x\leqslant 2$, কারণ x-এর অন্য কোন মানের জন্য $f(x)$-এর মান কাল্পনিক (imaginary) সংখ্যা হইবে।

দ্রষ্টব্য ঃ (1) y, x-এর অপেক্ষক হইলে, x-এর প্রতিটি সম্ভাব্য মানের জন্য y-এর একটি মান থাকিবে। এখন এইরূপ হইতে পারে যে y-এর মান x-এর যে কোন মানের জন্য সর্বদা একই (same) থাকিবে। এইক্ষেত্রে আমরা বলিব y হইতেছে ধ্রুবক অপেক্ষক (constant function)।

(2) অপেক্ষকের উপরোক্ত সংজ্ঞানুসারে, x-এর প্রতিটি সম্ভাব্য মানের জন্য y-এর একটি মাত্রই নির্দিষ্ট মান আছে। এইরূপ অপেক্ষককে **এক মানবিশিষ্ট** (single valued) অপেক্ষক বলে। নিম্নলিখিত ভাবে সংজ্ঞাটির সাধারণীকরণ করা যায়। যদি স্বাধীন চল x-এর প্রতিটি সম্ভাব্য মানের জন্য y-এর দুই বা ততোধিক মান পাওয়া যায়, তবে y-কে x-এর **বহু মানবিশিষ্ট** (many valued) অপেক্ষক বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ,

(i) $y^2=x$ হইলে, x-এর প্রতিটি ধনাত্মক মানের জন্য y-এর দুইটি মান

পাওয়া যায় ; যেমন $x=4$, হইলে $y=\sqrt{4}=\pm 2$, ($\because$ 4এর দুইটি বর্গমূল আছে) ইত্যাদি। সুতরাং y হইল x-এর বহু (দুই) মানবিশিষ্ট অপেক্ষক।

(ii) $y=\sin^{-1}x$ হইলে, x-এর $-1\leqslant x\leqslant 1$ বিস্তারে অবস্থিত যে কোন মানের জন্য y-এর অসংখ্য মান পাওয়া যাইবে।

যেমন $x=0$ হইলে, $y=n\pi$, যেখানে $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$

$x=\frac{1}{2}$ হইলে, $y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$, যেখানে $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

ইত্যাদি, সুতরাং y, x-এর বহু মানবিশিষ্ট অপেক্ষক।

সাধারণতঃ y-এর উপর শর্ত আরোপ করিয়া বা y-কে একাধিক গাণিতিক সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করিয়া, বহু মানবিশিষ্ট অপেক্ষককে এক মানবিশিষ্ট অপেক্ষকে পরিণত করা হয়। যেমন, $y=\sin^{-1}x$ অপেক্ষককে, y-এর উপর $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ শর্ত আরোপ করিয়া এক মানবিশিষ্ট করা হয়।

$y^2=x$ অপেক্ষককে $y=\sqrt{x}$ এবং $y=-\sqrt{x}$ এই দুইটি এক মানবিশিষ্ট অপেক্ষক রূপে প্রকাশ করা যায়।

এই পুস্তকে আমরা অপেক্ষক বলিতে এক মানবিশিষ্ট অপেক্ষক বুঝাইব।

(3) যদি সুসংজ্ঞেয় ভাবে প্রাপ্ত কিছু সংখ্যার সমাহার বা সমষ্টি (collection) বা সেট্‌ (set)-এর অন্তর্গত প্রতিটি সংখ্যা x-এর জন্য অপর একটি সেটের অন্তর্গত একটি সংখ্যা y যুক্ত করা যায়, তবে বলা হয় ঐ দুইটি সেটের মধ্যে একটি চিত্রণ (mapping) সূচিত হইয়াছে। চিত্রণটি যদি f দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে ইহাকে আমরা $f: x\rightarrow y$ এই প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করি।

এক্ষণে যদি y, x-এর একটি অপেক্ষক হয়, তবে এই অপেক্ষকটি x-এর বিচরণক্ষেত্রে অবস্থিত সংখ্যাসমূহের সহিত y-এর বিচরণক্ষেত্রে অবস্থিত সংখ্যাসমূহের মধ্যে একটি চিত্রণ সূচিত করে। [এখানে বিচরণক্ষেত্র দুইটির প্রত্যেকটি এক একটি সেট]। যদি অপেক্ষকটি $y=f(x)$ হয়, তবে এই চিত্রণকে $f: x\rightarrow y$, এইরূপে প্রকাশ করা হয়। উদাহরণ স্বরূপ, $f(x)=x^2$ হইলে, $f(x)$ কে $f: x\rightarrow x^2$ এই চিত্রণরূপে প্রকাশ করা যায়।

§ 2·4. বিভিন্ন প্রকার অপেক্ষকের সংজ্ঞা :

x এবং y-এর মধ্যে একটি গাণিতিক সমীকরণ সাধারণতঃ x-এর একটি অপেক্ষককে সূচিত করে ;

যেমন, $y=\sin x$ সমীকরণ হইতে x-এর যে কোন মানের জন্য y-এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় ; $x=0$ হইলে $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ হইলে $y=1$

ইত্যাদি)। সুতরাং y, x-এর একটি অপেক্ষক। এখানে $f(x)=\sin x$, এইরূপ বলিব।

a যদি কোন অপেক্ষক $y=f(x)$-এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রের একটি মান হয়, তবে যখন x-এর মান a, তখন y-এর মানকে $f(a)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন, যদি $y=f(x)=x^2-x+1$ হয়, তবে $f(0)$ হইতেছে $x=0$ বিন্দুতে y-এর মান। এখন যখন $x=0$, তখন $y=0^2-0+1=1$

$\therefore \quad f(0)=1$. অনুরূপে $f(1)=1^2-1+1=1$,

$f(1\cdot1)=(1\cdot1)^2-1\cdot1+1=1\cdot11$, $f(a)=a^2-a+1$ ইত্যাদি।

যদি $f(x)=\sin x$ হয়, তবে $f(0)=\sin 0=0$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ইত্যাদি।

যদি $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ হয়, তবে $f(0)=\frac{-4}{-2}=2$,

$f(1)=\frac{1^2-4}{1-2}=\frac{-3}{-1}=3$, $f(2)=\frac{4-4}{2-2}=\frac{0}{0}$, ইহা অনির্ণেয়।

$\therefore \quad x=0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি অসংজ্ঞেয় (undefined),

$$f(2+h)=\frac{(2+h)^2-4}{(2+h)-2}=\frac{h^2+4h}{h}=h+4.$$

x এবং y-এর মধ্যে যদি $f(x, y)=0$ এইরূপ আকারে একটি গাণিতিক সম্পর্ক থাকে, তবে yকে x-এর একটি **অপ্রত্যক্ষ** (implicit) অপেক্ষক বলে। [$f(x, y)$, দুইটি চল x ও y-এর উপর নির্ভরশীল একটি অপেক্ষক] $f(x, y)=0$কে অনেক সময় $y=\phi(x)$ আকারে সমাধান করা যায়। $y=f(x)$ আকারে প্রকাশিত অপেক্ষককে **প্রত্যক্ষ** (explicit) অপেক্ষক বলে।

যেমন, $x^3-2xy+4y+1=0$ একটি অপ্রত্যক্ষ (implicit) অপেক্ষক। ইহাকে সমাধান করিয়া $y=\frac{x^3+1}{2(x-2)}$ প্রত্যক্ষ (explicit) আকারে প্রকাশ করা যায়। সর্বদাই অপ্রত্যক্ষ (implicit) অপেক্ষককে প্রত্যক্ষ (explicit) আকারে প্রকাশ করা যায় না।

যেমন, $x^2+xy+3y^3+4x^3-3=0$, বা, $e^{xy}+x^2+y^2=0$ ইত্যাদি অপেক্ষককে $y=f(x)$ আকারে প্রকাশ করা যায় না।

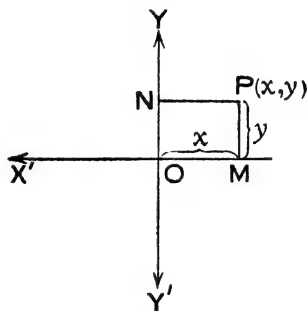
$y=f(x)$ অপেক্ষককে যদি $x=\phi(y)$ আকারে প্রকাশ করা যায় (অর্থাৎ x-এর জন্য সমাধান করা যায়) তবে $\phi(y)$ অপেক্ষককে $f(x)$ অপেক্ষকের **বিপরীত** বা প্রতিলোম (inverse) অপেক্ষক বলে।

যেমন, $y=2x+1$ হইলে $x=\frac{y-1}{2}$ উহার বিপরীত অপেক্ষক। অনুরূপে $y=a^x$ অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক $x=\log_a y$। $y=\sin x$-এর বিপরীত অপেক্ষক $x=\sin^{-1}y$ ইত্যাদি। সব অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক বাহির করা সম্ভব নাও হইতে পারে। যেমন, $y=x^2+x^3+1$কে $x=f(y)$ আকারে প্রকাশ করা সম্ভব নহে। অনেক সময় $y=f(x)$ অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষককে $x=f^{-1}(y)$ লেখা হয়।

§ 2·5. **অপেক্ষকের লেখচিত্র** (Graph of a function) :

মনে কর, $y=f(x)$ একটি অপেক্ষক। $\overleftrightarrow{XX'}$ এবং $\overleftrightarrow{YY'}$ দুইটি লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখা O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রথম অধ্যায়ে দেখান হইয়াছে যে শূন্যকে O বিন্দুর দ্বারা এবং সুবিধামত একক দূরত্ব নির্ধারণ করিয়া, যে কোন সংখ্যাকে $\overleftrightarrow{XX'}$ সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুর দ্বারা প্রকাশ করা যায়। অনুরূপে যে কোন সংখ্যাকে $\overrightarrow{YY'}$ সরলরেখার উপর অবস্থিত বিন্দু-দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

চিত্র 3

মনে কর চলরাশি x-এর কোন মান XX' সরলরেখার উপর M বিন্দুর দ্বারা সূচিত করা হইল এবং y-এর অনুরূপ মান $\overleftrightarrow{YY'}$ সরলরেখার উপর N বিন্দুর দ্বারা সূচিত করা হইল। এখন M এবং N বিন্দু হইতে যথাক্রমে $\overrightarrow{OY}$ এবং $\overrightarrow{OX}$-এর সমান্তরাল সরলরেখা টানা হইল। মনে কর রেখাদ্বয় P বিন্দুতে ছেদ করে। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) বলা হয়। এখন x যখন তাহার বিচরণক্ষেত্রে বিচরণ করে (as x varies in its range) তখন P বিন্দুও xy-তলের উপর বিচরণ করিবে। এবং এই বিচরণ কালে xy-তলের উপর যে রেখা অঙ্কিত করে তাহাকে $y=f(x)$ অপেক্ষকের লেখচিত্র বলে। অর্থাৎ x যখন তাহার বিচরণক্ষেত্রে বিচরণ করে তখন xy-তলের উপর যে সব বিন্দু P পাওয়া যায় তাহাদের ভুজ এবং কোটি যথাক্রমে x এবং $y=f(x)$, সেই সব বিন্দু-সমষ্টিকে (set of those points) $y=f(x)$-এর লেখচিত্র বলে।

দ্রষ্টব্য : (1) কোন অপেক্ষকের লেখচিত্র অঙ্কন করার **সাধারণ নিয়ম** হইতেছে, x-এর কয়েকটি বিশেষ মানের জন্য y-এর মান বাহির করা এবং এই মানদ্বয়কে ভুজ ও কোটি ধরিয়া লেখটির কয়েকটি বিন্দু বাহির করা, তাহার পর ঐ বিন্দুগুলিকে হস্তাঙ্কিত (free hand) রেখার দ্বারা যোগ করা।

(2) লেখচিত্রের সাহায্যে অপেক্ষকের জ্যামিতিক রূপ পাওয়া যায়। এই জ্যামিতিক রূপ হইতে অপেক্ষকের বিভিন্ন ধর্মের আলোচনা করা সহজসাধ্য হয়।

(3) অপেক্ষকের গাণিতিক আকার না থাকিলেও উহার লেখচিত্র অঙ্কন করা যায় এবং ঐ লেখচিত্রের সাহায্যে অপেক্ষকটির স্বরূপ বুঝা সম্ভব হয়। যেমন মনে কর ঘড়িতে যখন t ঘণ্টা সময় তখন কোন রোগীর দেহের উত্তাপ θ°C। এখন প্রতি সময়েই রোগীর দেহের একটি উত্তাপ থাকিবে। অতএব t-এর প্রত্যেক সম্ভাব্য মানের জন্য θ-র একটি মান থাকিবে। $\therefore$ θ হইতেছে t-এর অপেক্ষক। t এবং θ-র মানকে ভুজ এবং কোটি ধরিয়া এই অপেক্ষকের লেখচিত্র অঙ্কন করা যাইবে। কিন্তু t এবং θ কোন গাণিতিক সমীকরণ দ্বারা যুক্ত নহে।

নিম্নে কতকগুলি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদা. 1. $f(x)=2x+1$-এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

প্রথমে লেখটির উপর কয়েকটি বিন্দু বাহির করা যাক্ :

যখন

x	0	1	-1	$-\frac{1}{2}$
y	1	3	-1	0

এখন $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(-1, -1)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। এই সব বিন্দু দিয়া যে রেখাটি যায় (একটি সরলরেখা) তাহা টানা হইল। ইহাই $f(x)=2x+1$-এর লেখচিত্র। লেখ হইতে লক্ষ্য কর

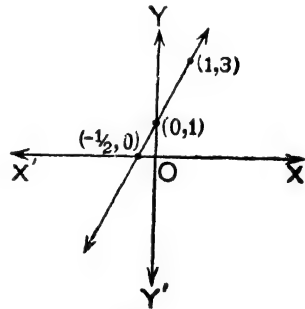
চিত্র 4

(i) অপেক্ষকটি অবিচ্ছিন্ন অর্থাৎ ইহার লেখটির কোথাও কোন ছেদ নাই।

(ii) x-এর মান বাড়িলে, y-এর মান বাড়িতেছে [এইরূপ অপেক্ষককে বর্ধমান (increasing) অপেক্ষক বলে]।

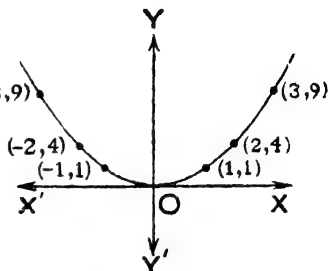
উদা. 2. $f(x)=x^2$-এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

প্রথমে লেখটির কয়েকটি বিন্দু বাহির করা হইল।

যখন,

x	0	1	2	-1	-2	± 3
y	0	1	4	1	4	9

ইত্যাদি

এখন (0, 0), (1, 1), (2, 4), (−1, 1), (−2, 4), (3, 9), (−3, 9) বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং উহাদের হস্তাঙ্কিত রেখার (free hand line) দ্বারা যুক্ত করিয়া $f(x)=x^2$ অপেক্ষকের লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল।

লেখচিত্র হইতে নিম্নলিখিতগুলি সহজেই লক্ষ্য করা যাইতেছে :

চিত্র 5

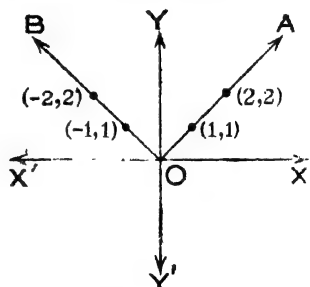
(i) যেহেতু লেখচিত্রটি $\overleftrightarrow{XX'}$ সরলরেখার উপর দিকে অবস্থিত, $f(x)$-এর মান ঋণাত্মক হইতে পারে না। (ii) $f(x)$-এর সর্বনিম্নমান 0, (iii) $f(x)$-এর সসীম সর্ববৃহৎ মান নাই, (iv) $f(x)$-এর লেখচিত্র কোথাও বিচ্ছিন্ন নহে।

উদা. 3. $f(x)=|x|$-এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

যখন

x	0	1	2	-1	-2	-3
$y=f(x)$	0	1	2	$+1$	2	3

ইত্যাদি।

(0, 0), (1, 1,), (2, 2) ইত্যাদি $\overrightarrow{OA}$ রেখার উপর এবং (0, 0), (−1, 1), (−2, 2) ইত্যাদি $\overrightarrow{OB}$ রেখার উপর অবস্থিত। সুতরাং $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ সরলরেখাদ্বয়ের চিত্রে অঙ্কিত অংশ, প্রদত্ত অপেক্ষকের লেখচিত্র। এখানে লক্ষণীয় হইতেছে, (i) $f(x)$ ঋণাত্মক নহে, এবং $f(x)$-এর সর্বনিম্নমান 0, (ii) অপেক্ষকের দুইটি অংশ আছে এবং অংশদ্বয় বিচ্ছিন্ন নহে, (iii) অপেক্ষকটি y-অক্ষে সুসমঞ্জস (symmetrical) ইত্যাদি

চিত্র 6

উদা. 4. $f(x)=\frac{|x|}{x}$-এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

এখানে যখন $x>0$, $y=f(x)=\frac{x}{x}=1$,

যখন $x<0,\ y=f(x)=\dfrac{-x}{x}=-1$ এবং

যখন $x=0,\ y=f(x)=\dfrac{|0|}{0}=\dfrac{0}{0}$, ইহা অনির্ণেয়।

মনে কর A এবং C হইতেছে যথাক্রমে (0, 1) এবং (0, −1) বিন্দুদ্বয় $\overleftrightarrow{AB}$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$ x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা। এখন $y=1$এর লেখ হইতেছে $\overrightarrow{AB}$ এবং $y=-1$-এর লেখ হইতেছে $\overrightarrow{CD}$।

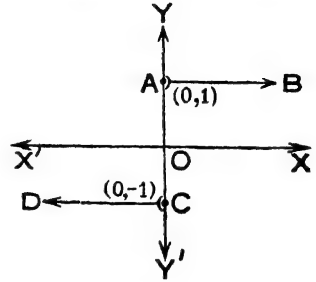
সুতরাং চিত্রে প্রদর্শিত $\overleftrightarrow{AB}$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখাদ্বয়ের A বিন্দু ছাড়া $\overrightarrow{AB}$ অংশ এবং C বিন্দু ছাড়া $\overrightarrow{CD}$ অংশই নির্ণেয় লেখ। এখানে লক্ষণীয় যে,

চিত্র 7

A এবং C বিন্দু লেখটির বিন্দু নয়, তাহা লেখচিত্রে A এবং C বিন্দুর নিকট (এবং) চিহ্ন দ্বারা দেখান হইয়াছে।

(i) প্রদত্ত সংজ্ঞা হইতে $x=0$ বিন্দুতে অপেক্ষকের মান নির্ণয় সম্ভব নহে, (ii) অপেক্ষকটির দুইটি অংশ আছে, (iii) অংশদ্বয় 0 বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন; অর্থাৎ অংশদ্বয়কে কলম না উঠাইয়া একেবারে অঙ্কন করা সম্ভব নহে।

§ 2·6. **অপেক্ষকের সন্ততা** (Continuity of a function):

মনে কর $y=f(x)$-এর সংজ্ঞার ক্ষেত্র হইতেছে x-এর একটি বিস্তার (interval of x)। এখন x-এর বিস্তারে অবস্থিত কোন একটি বিন্দু $x=a$ এর জন্য $f(x)$ অপেক্ষকের যে বিন্দু আছে, ঐ বিন্দুর দুইদিকে $f(x)$-এর লেখচিত্র যদি অবিচ্ছিন্ন হয়, অর্থাৎ $x=a$ বিন্দুর নিকটবর্তী অঞ্চলে $f(x)$-এর লেখ যদি কলম না তুলিয়া অঙ্কন করা যায়, তবে $x=a$ বিন্দুতে অপেক্ষকটিকে **সন্তত** (continuous) বলে। যদি কোন বিস্তারের সকল বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত হয়, তবে $f(x)$কে ঐ বিস্তারে সন্তত বলা হয় (continuous in the interval)। অতএব কোন বিস্তারে $f(x)$ সন্তত হইলে, $f(x)$-এর লেখচিত্রকে ঐ বিস্তারের মধ্যে কলম না তুলিয়া অঙ্কন করা যাইবে।

যদি কোন বিন্দুতে অপেক্ষক $f(x)$-এর লেখচিত্র ভগ্ন হয়, তবে ঐ বিন্দুতে $f(x)$কে অসন্তত (discontinuous) বলা হয়। অসন্তত বিন্দুর নিকট অপেক্ষকের লেখচিত্র কলম না উঠাইয়া অঙ্কন করা যাইবে না।

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের (§ 2·5) উদাহরণ-4-এর অপেক্ষকটি

$\left(f(x)=\frac{|x|}{x} \right)$, $x=0$ বিন্দুতে অসন্তত। অন্য সকল বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত।

উদাহরণ 1, 2, 3-এর অপেক্ষকগুলির লেখচিত্র কোথাও বিচ্ছিন্ন নহে। এই সকল অপেক্ষকের লেখ, কলম না উঠাইয়া একেবারেই অঙ্কন করা যায়। অতএব উক্ত উদাহরণসমূহের অপেক্ষকগুলি সর্বত্র সন্তত।

§ 2·7. মূল প্রাথমিক অপেক্ষক (Basic elementary functions) এবং তাহাদের লেখচিত্র :

মূল প্রাথমিক অপেক্ষকগুলি নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় :

I. **ঘাত-সূচক অপেক্ষক** (Power function) :

ইহার আকার $f(x)=x^n$, যেখানে n একটি ধ্রুবক।

II. **সূচক অপেক্ষক** (Exponential function) :

$f(x)=a^x$. যেখানে a একটি ধনাত্মক সংখ্যা যাহার মান 1 নহে।

III. **লগারিদম্ অপেক্ষক** (Logarithmic function) :

$f(x)=\log_a x$, যেখানে $a>0$, কিন্তু $a\neq 1$. ইহা সূচক অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক।

IV. **ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকসমূহ** (Trigonometrical functions) :

$f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=\tan x$, এবং

ইহাদের অন্যোন্যক (reciprocal)গুলি যথা,

$f(x)=\text{cosec } x$, $f(x)=\sec x$, $f(x)=\cot x$.

V. **ত্রিকোণমিতিক প্রতিলোম বা বিপরীত অপেক্ষক** (Inverse Trigonometrical function) :

$f(x)=\sin^{-1}x$, $f(x)=\cos^{-1}x$, $f(x)=\tan^{-1}x$,

$f(x)=\cot^{-1}x$, $f(x)=\sec^{-1}x$ এবং $f(x)=\text{cosec}^{-1}x$.

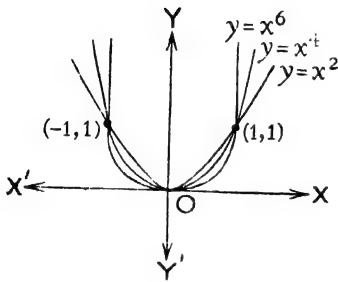
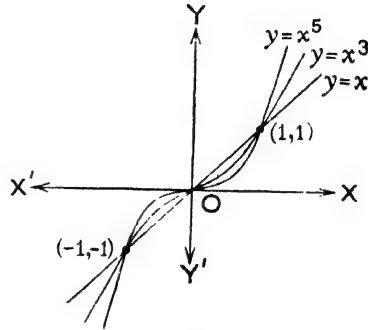
এইসব প্রাথমিক অপেক্ষকগুলির বিচরণক্ষেত্র, সংজ্ঞার ক্ষেত্র এবং লেখ সম্বন্ধে পরপৃষ্ঠায় আলোচনা করা হইল।

I. **ঘাত-সূচক অপেক্ষক :** $y=f(x)=x^n$.

(i) n যদি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে x-এর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে, $-\infty<x<\infty$ এবং y-এর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে,

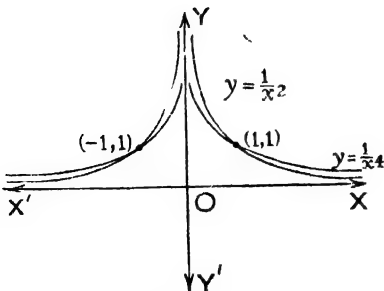
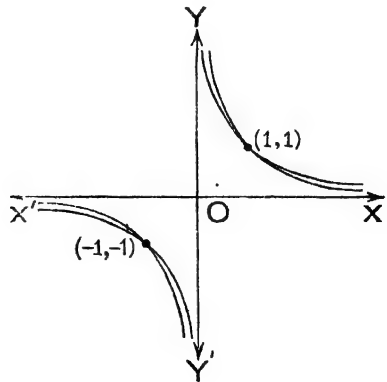
(a) $0\leqslant y<\infty$, যখন $n=$ যুগ্ম (even)

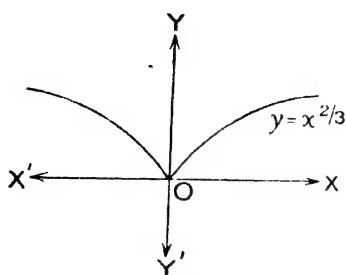
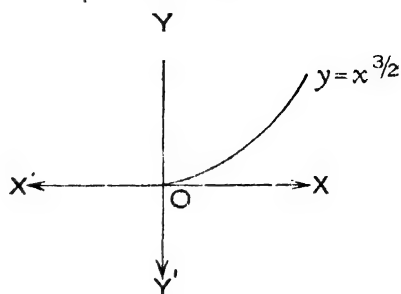
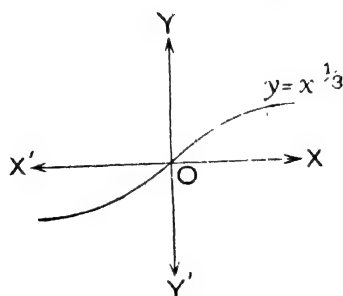
এবং (b) $-\infty<y<\infty$, যখন $n=$ অযুগ্ম (odd)

n-এর বিভিন্ন ধনাত্মক অখণ্ড মানের জন্য অপেক্ষকটির লেখচিত্র নিম্নে দেওয়া হইল

$n=$ যুগ্ম >0 $\qquad$ $n=$ অযুগ্ম >0

চিত্র 8 $\qquad$ চিত্র 9

(ii) n যদি ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে x এবং y-এর বিচরণক্ষেত্র পূর্বের ন্যায়ই হইবে, কেবল $x\neq0$.

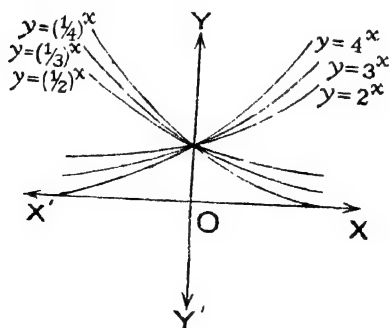
n-এর বিভিন্ন ঋণাত্মক মানের জন্য অপেক্ষকটির লেখচিত্র নিম্নে দেওয়া হইল।

$n=$ যুগ্ম <0 $\qquad$ $n=$ অযুগ্ম <0

চিত্র 10 $\qquad$ চিত্র 11

n-এর ভগ্নাংশ মানের জন্য x^n-এর কয়েকটি লেখ দেওয়া হইল।

চিত্র 12 চিত্র 13

চিত্র 14

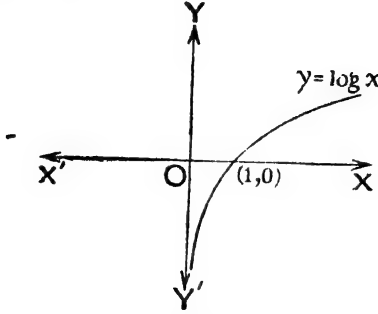
II. **সূচক অপেক্ষক :** $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$.

x-এর বিচরণক্ষেত্র, $-\infty<x<\infty$, এবং

y-এর বিচরণক্ষেত্র, $0<y<\infty$.

a-এর কতকগুলি মানের জন্য অপেক্ষকটির লেখ দেওয়া হইল।

চিত্র 15

III. **লগারিদম্ অপেক্ষক :** $y=f(x)=\log_a x, a\neq 1, a>0.$

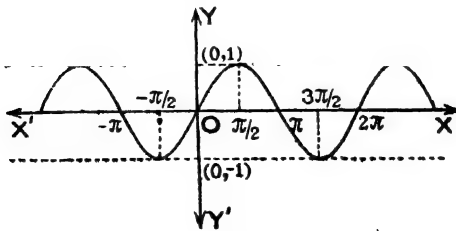
x-এর বিচরণক্ষেত্র $0<x<\infty$ এবং y-এর বিচরণক্ষেত্র $-\infty<y<\infty$। অপেক্ষকটির লেখচিত্র নিম্নরূপ হইবে।

চিত্র 16

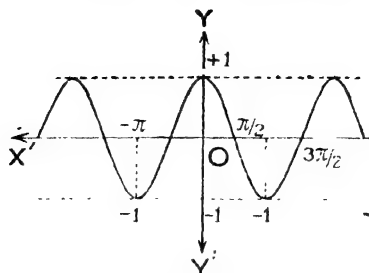
IV. **ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকসমূহ :**

ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক (periodic function)। কোন অপেক্ষক $f(x)$কে পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক বলে, যদি একটি ধ্রুবক a থাকে যাহার জন্য $f(x+a)=f(x)$ হয়, অর্থাৎ $f(x)$-এর মান x এবং $x+a$ বিন্দুতে একই থাকে। aকে অপেক্ষকটির পর্যায়কাল (period) বলে। তোমরা ত্রিকোণমিতিতে পড়িয়াছ যে,

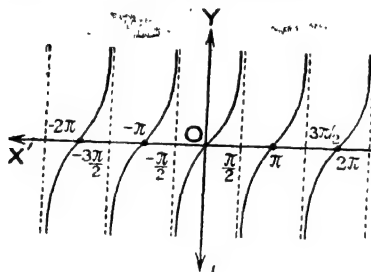
$\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$,
$\tan(x+2\pi)=\tan x$, $\cot(x+2\pi)=\cot x$,
$\sec(x+2\pi)=\sec x$, এবং $\operatorname{cosec}(x+2\pi)=\operatorname{cosec} x$.

সুতরাং ত্রিকোণমিতির অপেক্ষকগুলি পর্যাবৃত্ত এবং প্রত্যেকটির পর্যায়কাল 2π। ত্রিকোণমিতির অপেক্ষকগুলির বিচরণক্ষেত্র এবং লেখ নিম্নে দেওয়া হইল।

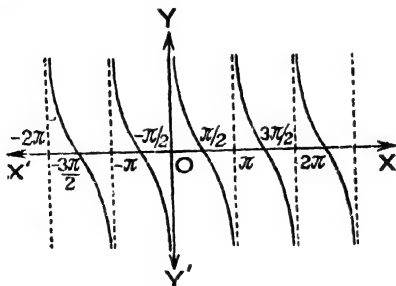
(1) $y=f(x)=\sin x, -\infty<x<\infty, -1\leqslant y\leqslant 1.$

চিত্র 17

(ii) $y = \cos x,\ -\infty < x < \infty,\ -1 \leqslant y \leqslant 1,$

চিত্র 18

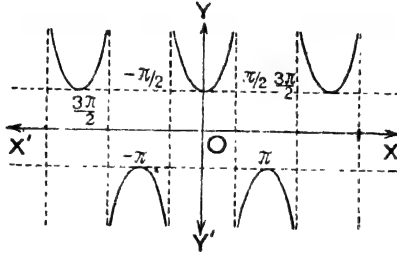
(iii) $y = \tan x$, x-এর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে $(2n+1)\frac{\pi}{2}$,

যেখানে, $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots\cdots$ইত্যাদি ব্যতীত যে কোন বাস্তব সংখ্যা এবং y-এর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে $-\infty < y < \infty$.

চিত্র 19

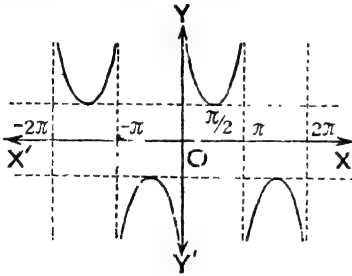
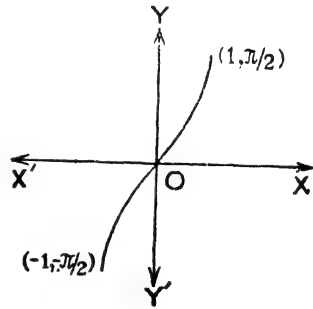
(iv) $y = \cot x$, x-এর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে, $n\pi$,

যেখানে $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots\cdots$ইত্যাদি ব্যতীত যে কোন বাস্তব সংখ্যা এবং y-এর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে $-\infty < y < \infty$.

চিত্র 20

(v) $y = \sec x$, x-এর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে

$(2n+1)\frac{\pi}{2}$, যেখানে $n=0, \pm 1, \pm 2 \cdots\cdots$ ব্যতীত যে কোন বাস্তব সংখ্যা এবং y-এর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে $-\infty < y \leqslant -1$ ও $1 \leqslant y < \infty$, অর্থাৎ $-1 < y < 1$-এর মধ্যের সংখ্যা ব্যতীত যে-কোন বাস্তব সংখ্যা।

চিত্র 21

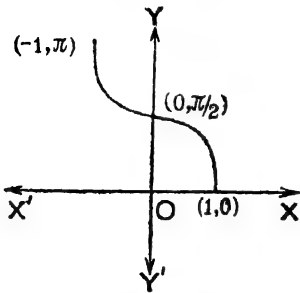
(vi) $y = \text{cosec } x$, x-এর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে

$n\pi$, যেখানে $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$ ব্যতীত যে কোন বাস্তব সংখ্যা এবং y-এর বিচরণক্ষেত্র $-1 < y < 1$-এর মধ্যস্থ কোন সংখ্যা ব্যতীত যে কোন বাস্তব সংখ্যা। (চিত্র 22)

চিত্র 22

চিত্র 23

V. বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক :

(i) $y = \sin^{-1} x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$

প্রকৃতপক্ষে xএর $-1 \leqslant x \leqslant 1$এর মধ্যে অবস্থিত যে কোন মানের জন্য yএর অসংখ্য মান আছে। যে সকল মান $-\frac{\pi}{2}$ ও $+\frac{\pi}{2}$-র মধ্যে আছে আমরা সেই সকল মান লইব। (চিত্র 23)

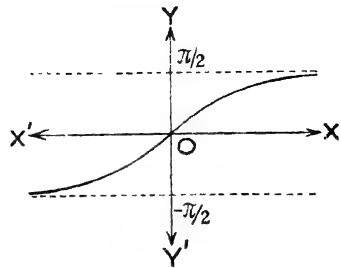
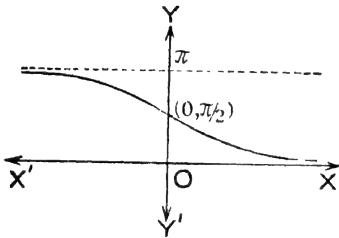
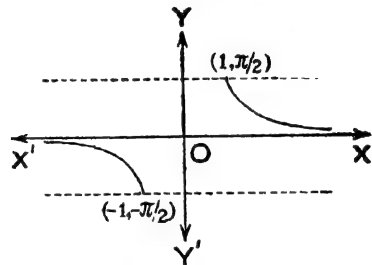
(ii) $y=\cos^{-1}x,\ -1\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq \pi$ (চিত্র 24)

চিত্র 24

চিত্র 25

(iii) $y=\tan^{-1}x,\quad -\infty<x<\infty,\ \frac{-\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ (চিত্র 25)

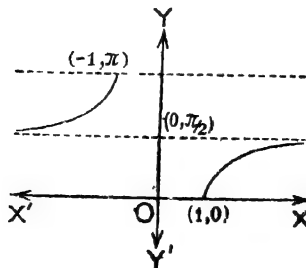
(iv) $y=\cot^{-1}x,\ -\infty<x<\infty,\ 0<y<\pi$ (চিত্র 26)

চিত্র 26

চিত্র 27

(v) $y=\sec^{-1}x,\ -\infty<x\leq-1,\ 1\leq x\leq\infty,\ 0\leq y\leq\pi.$ (চিত্র 27)

(vi) $y=\text{cosec}^{-1}x,\ -\infty<x\leq-1,\ 1\leq x<\infty$;

$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}.$ (চিত্র 28)

চিত্র 28

§ 2·8. অন্যান্য বিভিন্ন ধরনের অপেক্ষক ; অপেক্ষকের অপেক্ষক (Function of a function)

প্রাথমিক অপেক্ষকসমূহের যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ প্রক্রিয়ার দ্বারা নূতন অপেক্ষক পাওয়া যায়। যেমন, x^2, $\sin x$, e^x প্রভৃতি প্রাথমিক অপেক্ষক হইতে আমরা $x^2-3\sin x$, $xe^x+\sin x$, $\dfrac{e^x}{x-\sin x}$ প্রভৃতি অপেক্ষক পাইতে করিতে পারি।

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ (যেখানে $a_0, a_1, \cdots, a_n$ ইত্যাদি ধ্রুবক এবং n একটি অখণ্ড সংখ্যা) আকারের অপেক্ষককে **বহুপদ অপেক্ষক** (polynomial function) বলে।

দুইটি বহুপদ অপেক্ষকের ভাগফলকে **মূলদ** (rational) **অপেক্ষক** বলে। $\dfrac{x^2+3x+4}{x^2+2x+1}$ একটি মূলদ অপেক্ষক। মূলদ অপেক্ষকের সাধারণ আকার হইতেছে $\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$.

বহুপদ অপেক্ষক এবং মূলদ অপেক্ষককে **বৈজিক অপেক্ষক** (algebraic function) বলে।

বৈজিক অপেক্ষক ছাড়া অন্যান্য অপেক্ষককে **তুরীয়** (transcendental) **অপেক্ষক** বলে।

মনে কর $u=\sin x$ এবং $y=e^u$. এখন xএর যে কোন মানের জন্য uএর একটি মান আছে, আবার u-এর ঐ মানের জন্য yএর একটি মান পাই। সুতরাং xএর যে কোন একটি মানের জন্য yএর একটি নির্দিষ্ট মান পাই। অতএব y, xএর অপেক্ষক। y এবং xএর মধ্যে প্রত্যক্ষ সম্পর্ক $y=e^u=e^{\sin x}$. সাধারণভাবে যদি $u=f(x)$ হয় এবং $y=\phi(u)$, তবে আমরা $y=\phi(u)=\phi\{f(x)\}$ এইভাবে লিখিতে পারি। $\phi\{f(x)\}$কে **অপেক্ষকের অপেক্ষক** বলা হয়।

অনেক সময় একাধিক গাণিতিক সম্পর্কের দ্বারা অপেক্ষকের সংজ্ঞা দেওয়া হয়। যেমন, $f(x)=x$ যখন $x>0$.

$\qquad\qquad=-x$ যখন $x<0$.

$f(-x)=f(x)$ হইলে $f(x)$কে **যুগ্ম** অপেক্ষক বলা হয় এবং যদি $f(-x)=-f(x)$ হয়, তবে $f(x)$কে **অযুগ্ম** (odd) অপেক্ষক বলে।

যেমন, x^2, x^4, $\cos x$ ইত্যাদি যুগ্ম অপেক্ষক কারণ $(-x)^2=x^2$,

$\cos(-x) = \cos x$ এবং $x, x^3, \sin x$ ইত্যাদি অযুগ্ম ; কারণ $(-x) = -x$,

$(-x)^3 = -x^3$, $\sin(-x) = -\sin x$. $x^2 + x$ অপেক্ষকটি যুগ্ম বা অযুগ্ম কোনটিই নহে।

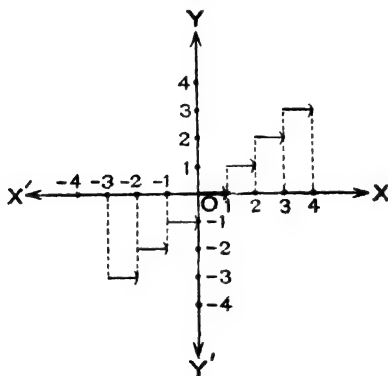
যদি কোন বিস্তারে x-এর মান বৃদ্ধি পাইলে $f(x)$-এর মানও বৃদ্ধি পায় তবে ঐ বিস্তারে $f(x)$-কে বর্ধমান বা ঊর্ধ্বগ অপেক্ষক (increasing function) বলে। x-এর মান বৃদ্ধি পাইলে যদি $f(x)$-এর মান হ্রাস পায় তবে $f(x)$-কে ক্ষিয়মাণ বা নিম্নগ অপেক্ষক (decreasing function) বলে। যেমন $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ বিস্তারে $f(x) = \sin x$ বর্ধমান, কিন্তু ঐ বিস্তারে $f(x) = \cos x$ ক্ষিয়মাণ (অপেক্ষক দুইটির লেখ চিত্র দেখ)।

উদাহরণমালা 2

উদা. 1. $y = [x]$, এর লেখ অঙ্কন কর। যেখানে $[x]$ এর অর্থ x হইতে বৃহত্তর অথবা সমান, এইরূপ বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা।

$[1\cdot5] = 1$, $[1\cdot6] = 1$, $[\cdot6] = 0$

$[-\cdot5] = -1$, $[-1\cdot7] = -2$

$\therefore$ যখন xএর মান $1 \leqslant x < 2$, তখন $y = [x] = 1$.

চিত্র 29

xএর মান যখন $2 \leqslant x < 3$, তখন $y = [x] = 2$, যখন $0 \leqslant x < 1$, $y = 0$, যখন $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $y = -1$, ইত্যাদি।

চিত্র 29টি $y = [x]$এর লেখচিত্র।

ইহাকে step-অপেক্ষক বলে। অপেক্ষকটি 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, ইত্যাদি বিন্দুতে অসন্তত।

উদা. 2. $y=\lfloor x$এর বিচরণক্ষেত্র নির্ণয় কর।

x এর ধনাত্মক অখণ্ড মানের জন্য $\lfloor x$এর সংজ্ঞা দেওয়া হয়। $\therefore$ xএর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, অর্থাৎ $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ $\lfloor x$এর লেখচিত্র হইতেছে (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 6), (4, 24) ইত্যাদি কতকগুলি বিচ্ছিন্ন বিন্দুর সমষ্টি।

উদা. 3. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ হইলে $f(x)-f(x+1)$ এর মান নির্ণয় কর এবং উক্ত মান হইতে $\frac{3}{1^2.2^2}+\frac{5}{2^2.3^2}+\frac{7}{3^2.4^2}+\frac{9}{4^2.5^2}+\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় কর।

$$f(x)=\frac{1}{x^2} \quad \therefore \quad f(x+1)=\frac{1}{(x+1)^2}.$$

$$\therefore \quad f(x)-f(x+1)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-x^2}{x^2(x+1)^2}=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$$

এখন $x=1$ বসাইয়া পাই $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{1^2.2^2}$

$x=2$, ... $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}=\frac{5}{2^2.3^2}$

$x=3$, ... $\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}=\frac{7}{3^2.4^2}$

... ...

$x=n$, ... $\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

যোগ করিয়া পাই. $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{3}{1^2.2^2}+\frac{5}{2^2.3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীটির যোগফল হইতেছে $1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{2n+n^2}{(n+1)^2}.$

উদা. 4. $f(x)=x^2+2x+2$ হইলে, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$এর মান নির্ণয় কর।

$$f(a+h)=(a+h)^2+2(a+h)+2$$
$$f(a)=a^2+2a+2$$

$$\therefore \quad f(a+h)-f(a)=a^2+2ha+h^2+2a+2h+2-(a^2+2a+2)$$
$$=2ha+h^2+2h$$

$$\therefore \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{2ha+h^2+2h}{h}=2a+2+h=2(a+1)+h.$$

উদা. 5. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ হইলে দেখাও যে

(i) $[f(x)]^2=f(x^2)+2$ এবং (ii) $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$.

$$[f(x)]^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2.x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2$$

আবার, $f(x^2)=x^2+\frac{1}{x^2}$; $\therefore\quad [f(x)]^2=f(x^2)+2$.

(ii) $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x')$, যেখানে $x'=\frac{1}{x}$

$$=x'+\frac{1}{x'}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}+x=f(x).$$

উদা. 6. $y=f(x)=\frac{2x-3}{x-2}$ হইলে দেখাও যে $x=f(y)$

$$y=\frac{2x-3}{x-2}\quad \text{বা,}\quad y(x-2)=2x-3,$$

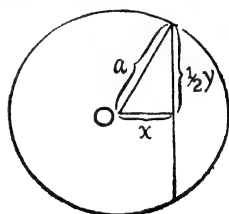
$$\text{বা,}\quad (y-2)x=2y-3,\quad \text{বা,}\quad x=\frac{2y-3}{y-2}=f(y).$$

উদা. 7. a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র হইতে x দূরত্বের জ্যা-এর দৈর্ঘ্য y হইলে, yকে x-এর অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ কর। x এবং y-এর বিচরণক্ষেত্র কি ?

চিত্র 30

চিত্র হইতে স্পষ্টতঃ, $a^2=x^2+\frac{y^2}{4}$

$$\text{বা,}\quad y=2\sqrt{a^2-x^2}.$$

x-এর বিচরণক্ষেত্র হইতেছে $0\leqslant x<a$ এবং y-এর বিচরণক্ষেত্র $0<y\leqslant 2a$

উদা. 8. যদি $f(x)=\log_e{}^x$ এবং $g(x)=e^x$ হয়, তবে দেখাও যে

$$f\{g(x)\}=g\{f(x)\}.$$

$$f\{g(x)\}=f(e^x)=\log_e{}^{e^x}=x\log_e{}^e=x.$$

আবার, $g\{f(x)\}=g\{\log_e{}^x\}=e^{\log_e{}^x}=x$

$$\therefore\quad f\{g(x)\}=g\{f(x)\}.$$

উদা. 9. যদি $f(x)=ax^2+bx+c$ হয় এবং $f(0)=1$, $f(1)=2$ ও $f(-1)=0$ হয়, তবে $f(2)$-এর মান নির্ণয় কর

$$\because\quad f(x)=ax^2+bx+c$$

$\therefore \quad 1 = f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c \qquad \therefore \quad c = 1,$

$2 = f(1) = a.1^2 + b.1 + c$ বা, $a + b = 2 - c = 2 - 1 = 1,$

$0 = f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c, \quad \therefore \quad a - b = -c = -1$

যোগ করিয়া পাই, $2a = 0$

$\therefore \quad a = 0$, এবং $b = 1 \quad \therefore \quad f(x) = 0.x^2 + 1.x + 1 = x + 1$

$\therefore \quad f(2) = 2 + 1 = 3.$

উদা. 10. $f(x) = 2^x$ হইলে দেখাও যে,

$f(x+1) - f(x-1) = \frac{3}{2}f(x), \; \frac{f(x+1)}{f(x-1)} = 4.$

$f(x+1) = 2^{x+1} = 2.2^x, \; f(x-1) = 2^{x-1} = 2^x.2^{-1} = \frac{1}{2}.2^x$

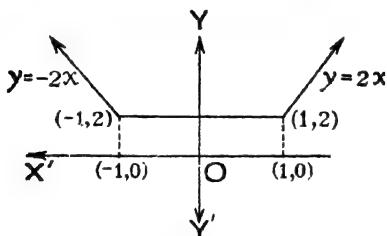
$\therefore \quad f(x+1) - f(x-1) = 2.2^x - \frac{1}{2}.2^x = (2 - \frac{1}{2}).2^x = \frac{3}{2}.2^x = \frac{3}{2}f(x)$

$$\frac{f(x+1)}{f(x-1)} = \frac{2.2^x}{\frac{1}{2}.2^x} = 4.$$

উদা. 11. $f(x) = |x-1| + |x+1|$ -এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

$x < -1$ হইলে $x-1$ এবং $x+1$ উভয়ে ঋণাত্মক

$\therefore \quad |x-1| + |x+1| = -(x-1) - (x+1) = -2x$

$-1 \leqslant x \leqslant 1$ হইলে $x-1$ ঋণাত্মক অথবা শূন্য এবং $x+1$ ধনাত্মক,

চিত্র 31

$\therefore \quad |x-1| + |x+1| = -(x-1) + x + 1 = 2$

$x > 1$ হইলে উভয়েই ধনাত্মক

$\therefore \quad |x-1| + |x+1| = x - 1 + x + 1 = 2x.$

অতএব $f(x) = -2x$ যখন $x < -1$

$= \quad 2$ যখন $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$= \quad 2x$ যখন $x > 1$

$\therefore \quad f(x)$-এর লেখচিত্র তিনটি রেখাংশের দ্বারা গঠিত।

লেখচিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে অপেক্ষকটি সর্বত্র সন্তত।

উদা. 12. একটি জলাধারে জল আনিবার দুইটি কল আছে। প্রথম কলটি খুলিলে জলাধারে জলের উচ্চতা মিনিটে 1 সে.মি. বৃদ্ধি পায় এবং দ্বিতীয়টি খুলিলে উচ্চতা মিনিটে 2 সে.মি. বৃদ্ধি পায়। জলাধারে জলের উচ্চতা যখন 10 সে.মি. তখন প্রথম কলটি খোলা হইল। প্রথম কলটি খুলিবার 15 মিনিট পরে দ্বিতীয় কলটি খোলা হইল এবং দুইটি কল 20 মিনিট খোলা থাকিবার পর প্রথম কলটি বন্ধ করা হইল; ইহার 15 মিনিট পরে দ্বিতীয় কলটিও বন্ধ করা হইল। যদি প্রথম কলটি খুলিবার x মিনিট পরে জলের উচ্চতা y সে.মি. হয়, তবে yকে x-এর অপেক্ষক রূপে প্রকাশ কর।

প্রথম 15 মিনিটে জলের উচ্চতা 10 সে.মি. হইতে প্রতি মিনিটে 1 সে.মি. বৃদ্ধি পায়। $\therefore$ $x<15$ হইলে জলের উচ্চতা হইবে $10+x$. এইরূপে 15 মিনিট পরে যখন জলের উচ্চতা 25 সে.মি. তখন দুইটি কল খুলিয়া দিবার ফলে জলের উচ্চতা মিনিটে $2+1=3$ সে.মি. বৃদ্ধি পাইয়া $(x-15)$ মিনিটে $3(x-15)$ সে.মি. বৃদ্ধি পায়। $\because$ দুইটি কল 15 মিনিট হইতে $15+20=35$ মিনিট পর্যন্ত খোলা ছিল, সুতরাং যখন $15\leqslant x\leqslant 35$, তখন জলের উচ্চতা $25+3(x-15)$ সে.মি. 35 মিনিট পরে প্রথম কলটি বন্ধ করিয়া দিবার ফলে পরবর্তী x মিনিট সময় জলের উচ্চতা 85 সে.মি. হইতে আরও $2(x-35)$ সে.মি. বৃদ্ধি পায়। $\therefore$ যখন $35\leqslant x\leqslant 50$, তখন জলের উচ্চতা হইবে $85+2.(x-35)$ সে.মি.

50 মিনিট পরে দুইটি কল বন্ধ থাকিবার ফলে জলের উচ্চতার আর বৃদ্ধি হইবে না।

$$\begin{aligned}\therefore\quad y&=10+x, \text{ যখন } 0<x\leqslant 15,\\ &=25+3(x-15), \text{ যখন } 15\leqslant x<35,\\ &=85+2(x-35), \text{ যখন } 35<x\leqslant 50\\ &=115, \text{ যখন } x>50.\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 2

1. যদি $f(x)=x^3-2x^2+4x+1$ হয়, তবে $f(0)$, $f(1)$, $f(2\cdot1)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-x)$, $f(a+h)$-এর মান নির্ণয় কর।

2. যদি $f(\theta)=2\cos\theta+1$ হয়, তবে $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)$, $f(x)$-এর মান নির্ণয় কর।

3. যদি $f(x)=x^2$ হয় তবে $f(2)$, $f(2\cdot1)$, $f(2\cdot01)$, $f(2\cdot001)$, $\frac{f(2\cdot0001)-f(2)}{\cdot0001}$ এর মান নির্ণয় কর।

4. $f(x)=\dfrac{(x-3)(x-4)(x+1)}{(2x+3)(x-1)}$ হইলে, $f(3)$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(4)$, $f(-x)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(1)$-এর মান নির্ণয় কর।

5. $f(x)=a^x$ হইলে, $f(0)$, $f(\log_a x)$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2}$ হইলে, $f(0)$, $f(-1)$, $f(2x)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(x+h)$ এর মান নির্ণয় কর।

7. যদি $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ হয়, তবে দেখাও যে $f(\tan x)=\cos 2x$, $f(\sqrt{\cos x})=\tan^2 \dfrac{x}{2}$.

8. যদি $f(\theta)=\sin\theta$ এবং $g(\theta)=\cos\theta$ হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $f(\theta+\phi)=f(\theta)\, g(\phi)+f(\phi).g(\theta)$

(ii) $\{f(\theta)\}^2+\{g(\theta)\}^2=1$

(iii) $\{g(\theta)\}^2-\{f(\theta)\}^2=g(2\theta)$

(iv) $\dfrac{1-g(\theta)}{1+g(\theta)}=\left\{\dfrac{f\left(\frac{\theta}{2}\right)}{g\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right\}^2$

9. যদি $f(x)=3^x$ হয়, তবে দেখাও যে $f(x+1)=3f(x)$,

$f(x+2)-f(x-2)=\frac{80}{9}f(x)$, $\dfrac{f(x+2)+f(x-1)}{f(x+1)}=\dfrac{28}{9}$;

$f(a).f(b)=f(a+b)$.

10. যদি $f(x)=\log_e x$ হয়, তবে দেখাও যে

$f(1)=0$, $f(e)=1$, $f(xy)=f(x)+f(y)$

$f(x^m)=mf(x)$, $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ হইবে।

11. $y=f(x)=\dfrac{3x-7}{7x-3}$ হইলে দেখাও যে,

(i) $x=f(y)$, (ii) $f(x).f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$.

12. যদি $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ হয়, $f^2(x)=x$, যেখানে $f^2(x)=f\{f(x)\}$.

13. দেখাও যে $f(-\theta)=-f(\theta)$ যখন $f(\theta)=\sin\theta$ এবং

$$f(-\theta)=f(\theta) \text{ যখন } f(\theta)=\frac{\sin\theta}{\theta}.$$

14. দেখাও যে $f(x)=x^4+\sin^2 x+2$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক এবং $g(x)=x^7-\sin^3 x$ একটি অযুগ্ম অপেক্ষক।

15. (i) যদি $f(x)$ যুগ্ম অপেক্ষক হয় এবং $g(x)$ একটি অযুগ্ম অপেক্ষক হয়, তবে $f(x).g(x)$ এবং $\frac{f(x)}{g(x)}$ অপেক্ষক দুইটি কি হইবে?

(ii) দেখাও যে $f(x)$ যে কোন অপেক্ষক হইলে (a) $f(x)+f(-x)$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক এবং (b) $f(x)-f(-x)$ একটি অযুগ্ম অপেক্ষক।

16. দেখাও যে দুইটি যুগ্ম অপেক্ষকের যোগফল এবং গুণফল যুগ্ম অপেক্ষক এবং দুইটি অযুগ্ম অপেক্ষকের যোগফল এবং গুণফল যথাক্রমে অযুগ্ম এবং যুগ্ম অপেক্ষক।

17. নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের বিচরণক্ষেত্র বাহির কর।

(i) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ (ii) $f(x)=\sqrt{4+x}+(5-x)^{\frac{1}{4}}$

(iii) $y=(x+a)^{\frac{1}{3}}-(x-b)^{\frac{1}{3}}$ (iv) $f(x)=\frac{a+x}{a-x}$.

(v) $y=x^{-\frac{1}{2}}$ (vi) $y=\log(2x+1)$.

18. নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

(i) $y=-3x+1$, (ii) $y=\cos 2x$,

(iii) $y=x^2-2x+2$ (iv) $y=\frac{1}{x^2}$

(v) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ (vi) $y=\cos x+2\sin x$

(vii) $y=6$ (viii) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$,

19. $[-1, 1]$ বদ্ধ বিস্তারে $f(x)$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞা নিম্নলিখিত ভাবে দেওয়া আছে.

$$f(x)=x^2,\ 0<x<1$$
$$=2x,\ -1<x<0$$

অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

20. $[-2, +2]$ বিস্তারে $f(x)$এর মান নিম্নলিখিত ভাবে দেওয়া আছে,

$$f(x) = -2x, \quad -2 < x < 0$$
$$= 2x+1, \; 0 \leqslant x < 1$$
$$= 4x-1, \; 1 \leqslant x < 2.$$

$f(x)$ অপেক্ষকটি কোন্ বিন্দুতে অসন্তত ?

21. দেখাও যে $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ এর মান হইবে

(i) $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right). \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ যখন $f(x)=\sin x$

(ii) $\frac{1}{\cos(x+h)\cos x} . \frac{\sin h}{h}$ যখন $f(x)=\tan x$

(iii) $-\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)}{\sin(x+h).\sin x}. \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$ যখন $f(x)=\operatorname{cosec} x$

(iv) $e^x . \frac{e^h-1}{h}$ যখন $f(x)=e^x$.

22. একটি 16 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার টিনের টুকরায় চারি কোণ হইতে x সে. মি. বাহুবিশিষ্ট বর্গ কাটিয়া লইয়া উহার দ্বারা একটি উপর-খোলা বাক্স তৈয়ারী করা হইয়াছে। যদি বাক্সের আয়তন v হয়, তবে v-কে xএর অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ কর। xএর বিচরণক্ষেত্র কি ? যখন $x=2$ তখন vএর মান কত ?

23. কোন সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল A এবং একটি বাহুর দৈর্ঘ্য x হইলে, A-কে xএর অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ কর।

24. $f(\theta)=a+b \cos\theta$ হইলে a এবং bএর মান নির্ণয় কর যদি $f(\theta)$র চরম এবং অবম মান (maximum and minimum values) যথাক্রমে 3 এবং 1 হয়।

25. যদি $f(x)=ax+\frac{b}{x}+c$ হয়, এবং $f(-2)=-\frac{1}{2}$, $f(-1)=2$, $f(1)=4$, হয়, তবে $f(2)$-এর মান নির্ণয় কর।

26. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির বিপরীত অপেক্ষক নির্ণয় কর :

(i) $y=\sqrt{1+x^2}, x>0$, (ii) $y=\sqrt{1+x^2}+x$

(iii) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$ (iv) $y=\frac{1+x^2+x^4}{x^2}$.

27. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি $x=\phi(y)$ আকারে প্রকাশ কর।

(i) $a+bx+cy+dxy=0$ (ii) $y=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

28. যাত্রারম্ভ হইতে প্রথম এক কিলোমিটার বা তাহার কম দূরত্বের জন্য একটি ট্যাক্সির ভাড়া 1 টাকা 80 পয়সা। পরবর্তী প্রতি 100 মিটার বা তাহার কম দূরত্বের জন্য ভাড়া হইতেছে 18 পয়সা। যদি x কিলোমিটার দূরত্বের জন্য y টাকা ভাড়া হয়, তবে y-কে x-এর অপেক্ষক রূপে প্রকাশ কর।

29. একটি জলাধারে দুইটি নল আছে, একটি নল দ্বারা জল আনিয়া জলাধারে জলের উচ্চতা মিনিটে 2 সেমি. বাড়ান যায়, এবং অপর নলটির দ্বারা জল বাহির করিয়া জলাধারে জলের উচ্চতা মিনিটে 1 সে.মি. কমান যায়। জলাধারে জলের উচ্চতা যখন 50 সে.মি. তখন দ্বিতীয় নলটির দ্বারা জলাধারের জল আধ ঘণ্টা ধরিয়া বাহির করিবার পর প্রথম নলটি খোলা হইল। দুইটি নল আরো আধ ঘণ্টা খোলা থাকিবার পর দ্বিতীয় নলটি বন্ধ করা হইল। ইহার এক ঘণ্টা পরে প্রথম নলটিও বন্ধ করা হইল। যদি দ্বিতীয় নলটি খুলিবার x মিনিট পরে জলের উচ্চতা y সে.মি. হয়, তবে y এবং x-এর সম্পর্ক নির্ণয় কর।

তৃতীয় অধ্যায়

সীমা (Limit)

§ 3·1. **সীমা** সম্বন্ধীয় ধারণা (concept of limit) কলনবিদ্যায় সর্বাপেক্ষা গুরুত্বপূর্ণ। প্রথম অধ্যায়েই বলা হইয়াছে যে সীমার ধারণা অন্তরকলন এবং সমাকলন, কলনবিদ্যার উভয় শাখারই ভিত্তি এবং এই ধারণাই কলনবিদ্যাকে বীজগণিত হইতে পৃথক্ করিয়াছে। এই অধ্যায়ে স্বজ্ঞাত (intuitive) এবং লৈখিক (graphical) পদ্ধতি দ্বারা সীমার ধারণার ব্যাখ্যা করা হইতেছে। সীমার যথাযথ গাণিতিক সংজ্ঞা পাঠ্য বিষয় বহির্ভূত।

§ 3·2. **চলরাশি xএর ধ্রুবক aএর দিকে অগ্রসর হইবার অর্থ (Meaning of the variable x approaching a constant a) :**

মনে কর x একটি চলরাশি এবং a উহার বিচরণক্ষেত্রে অবস্থিত একটি ধ্রুবক।

x, চলরাশি বলিয়া উহার মান পরিবর্তনশীল। এখন xএর মান এমন ভাবে পরিবর্তন করা যাইতে পারে যে উহার মান ক্রমশঃ ধ্রুবক aএর যত ইচ্ছা নিকটবর্তী হইবে। এই ভাবে xএর মান পরিবর্তন করা হইলে আমরা বলি x, a বিন্দুর দিকে অগ্রসর হইতেছে। আরো স্পষ্ট ভাবে বলা যায় যে x, a-এর দিকে অগ্রসর হইতেছে বলিলে বুঝায় x-এর মান এমন ভাবে পরিবর্তিত হইতেছে যে x এবং aএর মধ্যে দূরত্ব $|x-a|$ কে যে কোন ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা যাইবে। এইরূপ ভাবে x, a-র দিকে অগ্রসর হইলে, আমরা ইহাকে প্রতীক চিহ্ন $x \to a$ দ্বারা প্রকাশ করি।

সুতরাং $x \to a$এর অর্থ হইতেছে, x এমনভাবে মান পরিবর্তন করিতেছে যে শেষ পর্যন্ত x এবং a মধ্যে দূরত্ব $|x-a|$ যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা (যত ক্ষুদ্রই হোক না কেন) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইয়া যাইবে।

নিম্নে, সংজ্ঞাটি সংখ্যারেখার দ্বারা ব্যাখ্যা করা হইল। মনে কর সংখ্যা-রেখার উপর A বিন্দুটি a সংখ্যাকে সূচিত করিতেছে এবং P চলরাশি

B B' A A' A' P

চিত্র 32

x-এর যে কোন অবস্থান সূচিত করিতেছে। এখন x, a-র দিকে অগ্রসর হইবার অর্থ হইতেছে যে P বিন্দুটি ক্রমশ A বিন্দুর দিকে সংখ্যা-রেখা বরাবর

এমনভাবে অগ্রসর হইতেছে যে, Aএর নিকটবর্তী A′ একটি বিন্দু লইলে শেষ পর্যন্ত P বিন্দুটি A′-কে অতিক্রম করিয়া A বিন্দুর নিকটবর্তী হইবে ; অধিকতর নিকটবর্তী আর একটি বিন্দু A″ লইলে, P ঐ বিন্দুকেও অতিক্রম করিয়া A বিন্দুর নিকটবর্তী হইবে। এইভাবে A বিন্দুর যত ইচ্ছা নিকটবর্তী বিন্দু লইলে P শেষ পর্যন্ত ঐ বিন্দুটিকেও অতিক্রম করিয়া A-র নিকটবর্তী হইবে। চিত্রে A′, A″ বিন্দুগুলি Aএর ডান দিকে লওয়া হইয়াছে। অনুরূপে Aএর বাম দিকে, B′, B″ ইত্যাদি বিন্দু লইলে P বিন্দুটি ঐ সকল বিন্দুকেও অতিক্রম করিয়া A বিন্দুর নিকটবর্তী হইবে।

উদাহরণ। $x \to 2$এর অর্থ, x এমনভাবে মান পরিবর্তন করিতেছে যে x এবং 2-এর মধ্যে দূরত্ব $|x-2|$ কে যে-কোন ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা যাইবে।

ধর, ·1 একটি ধনাত্মক সংখ্যা।

x-এর মান শেষ পর্যন্ত এমন হইবে যে,

$|x-2| < \cdot 1$ হইবে বা xএর মান $1\cdot 9 < x < 2\cdot 1$ বিস্তারের মধ্যে থাকিবে (কারণ, $|x-2| < \cdot 1$এর অর্থ $2 - \cdot 1 < x < 2 + \cdot 1$)।

অনুরূপে ·00005 ধনাত্মক সংখ্যাটি লইলে xএর মান শেষ পর্যন্ত এমন হইবে যে, $|x-2| < \cdot 00005$ হইবে।

অর্থাৎ xএর মান $1\cdot 99995 < x < 2\cdot 00005$ বিস্তারের মধ্যে থাকিবে। ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য ঃ (i) $x \to a$ বলিতে xএর মান a-র নিকটবর্তী হইতেছে, ইহাই বুঝান হয়, কিন্তু a মানটি গ্রহণ করিতেছে কি করিতেছে না এই প্রশ্ন উঠে না। সাধারণতঃ আমরা ধরি x, a মান গ্রহণ করিতেছে না।

(ii) x যদি a অপেক্ষা বৃহত্তর মানসমূহের দিক হইতে a-এর দিকে অগ্রসর হয়, অর্থাৎ লেখ চিত্রে A বিন্দুর ডান পার্শ্ব হইতে a-র দিকে অগ্রসর হয়, তবে আমরা বলি $x \to a+$ বা x ডান পার্শ্ব হইতে a-র দিকে অগ্রসর হইতেছে।

অনুরূপে x যদি a-র ক্ষুদ্রতর মানসমূহের দিক হইতে a-র দিকে অগ্রসর হয়, অর্থাৎ লেখচিত্রে A বিন্দুর বাম পার্শ্ব হইতে A-র দিকে অগ্রসর হয়, তবে আমরা বলি $x \to a-$ বা x বাম পার্শ্ব হইতে a-র দিকে অগ্রসর হইতেছে।

$x \to a$এর অর্থ, $x \to a+$ এবং $x \to a-$ উভয়ই। অর্থাৎ x, a-এর দিকে অগ্রসর হইতেছে বলিবার অর্থ x বামপার্শ্ব এবং ডানপার্শ্ব উভয় দিক হইতে a-র দিকে অগ্রসর হইতেছে।

(iii) $x \to a$-র অর্থ হইল x, a বিন্দুর নিকট একটি বিশেষভাবে মান পরিবর্তন করে। x, এই বিশেষভাবে মান পরিবর্তন করিলে উহার কোন অপেক্ষক $f(x)$ কিভাবে মান পরিবর্তন করিবে ইহাই এই অধ্যায়ের মূল আলোচ্য বিষয়। পরবর্তী অনুচ্ছেদে এই বিষয় আলোচনা করা হইল।

(iv) x, a-র দিকে অগ্রসর হইলে, উহার কোন অপেক্ষক $f(x)$ কিভাবে মান পরিবর্তন করিবে, তাহা নির্ণয় করিতে হইলে, সাধারণতঃ আমরা a বিন্দুর ক্রমশঃ নিকটবর্তী সংখ্যাসমূহ লই এবং ঐ বিন্দুসমূহে $f(x)$এর মান-নির্ণয় করিয়া উহার মানের কিভাবে পরিবর্তন হইতেছে তাহা নির্ণয় করি। এখন, যদি এই মানগুলি সুবিধামত লওয়া হয়, তবে যেন মানগুলি ডান এবং বাম উভয়দিক হইতে a-র দিকে অগ্রসর হয়।

উদাহরণস্বরূপ $x \to 2$, হইলে উহার কোন অপেক্ষক $f(x)$ কিভাবে মান পরিবর্তন করিবে তাহা নির্ণয় করিতে হইলে, 2 বিন্দুর নিকট x-এর মান-সমূহের জন্য $f(x)$এর মান বাহির করিতে হইবে।

বিন্দুগুলি 1·9, 1·99, 1·999....ইত্যাদি এবং 2·1, 2·01, 2·001 ইত্যাদি লওয়া যায়। 1·9, 1·99, 1·999 ইত্যাদি বিন্দুগুলির দ্বারা x বামপক্ষ হইতে ক্রমশঃ 2এর নিকটবর্তী হইতেছে এবং 2·1, 2·01, 2·001···ইত্যাদি বিন্দুগুলির দ্বারা x, ডানপক্ষ হইতে 2এর দিকে অগ্রসর হইতেছে। লক্ষ্য কর বিন্দুগুলি এমনভাবে লওয়া হইয়াছে যে ঐ বিন্দুগুলির দ্বারা x, 2এর যত ইচ্ছা নিকটবর্তী হইতে পারে অর্থাৎ ঐ বিন্দুগুলি হইতে x-এর এমন মান লওয়া যায় যাহার ফলে $|x-2|$ যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

বিন্দুগুলি 1·9, 1·99,···2·1, 2·01,···ইত্যাদি না লইয়া অন্য কোনরকম ভাবেও লওয়া যায়, যেমন বিন্দুগুলি 1·95, 1·995, 1·9995,···ইত্যাদি এবং 2·5, 2·05, 2·005, 2·0005,···ইত্যাদি এইভাবেও লওয়া যায়। এই সকল মানের জন্যও x ক্রমশঃ বাম এবং ডান উভয়পক্ষ হইতে 2এর দিকে অগ্রসর হইতেছে। সুতরাং বিন্দুগুলিকে আমরা যে কোন প্রকারে লইতে পারি; শুধুমাত্র দেখিতে হইবে যে বিন্দুগুলি $x=2$ বিন্দুর উভয়দিকে থাকিবে এবং উহাদের দূরত্ব 2 বিন্দু হইতে ক্রমশঃ ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে।

উদা. $x \to 0$এর জন্য কোন অপেক্ষকের মান পরিবর্তনের স্বরূপ বুঝিতে হইলে, অপেক্ষকটির নিম্নলিখিত মান নির্ণয় করিতে পারি।

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ইত্যাদি এবং $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\cdots$ইত্যাদি। প্রথম বিন্দুগুলির দ্বারা $x \to 0+$ হইতেছে এবং দ্বিতীয় বিন্দুগুলির দ্বারা $x \to 0-$

হইতেছে। লক্ষ্য কর উপরোক্ত মানগুলি গ্রহণ করিলে x এবং 0-র মধ্যে দূরত্ব, $|x - 0| = |x|$ -কে যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা সম্ভব।

যেমন ধর, ·000005 একটি ধনাত্মক সংখ্যা। এখন যদি xএর মান $\pm\frac{1}{200001}$, $\pm\frac{1}{200002}$ ইত্যাদি হয় তবে $|x| < \cdot000005 = \frac{1}{200000}$ হইবে। এইরূপে যেকোন ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা লওয়া হোক না কেন উপরোক্ত সংখ্যাসমূহে এমন সব মান আছে যাহার জন্য $|x|$ -এর মান ঐ সংখ্যা অপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর হইবে।

এখন মানগুলি $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{5}, \cdots$ ইত্যাদি না লইয়া অন্য মানও লওয়া যায়। যেমন, $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{16}, \ldots$ ইত্যাদি মান-সমূহের দ্বারাও, x, 0 বিন্দুর দিকে অগ্রসর হয়।

§ 3·3. **স্বজ্ঞাতভাবে সীমা সম্বন্ধে আলোচনা** (Discussion of limit in intuitive way) :

মনে কর y, xএর অধীন একটি চলরাশি। এখন y-এর মান x-এর মানের উপর নির্ভরশীল।

যদি xএর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার দিকে অগ্রসর হয়, অর্থাৎ x যদি একটি বিশেষ পদ্ধতিতে মান পরিবর্তন করে তবে yএর মান কিভাবে পরিবর্তিত হইবে তাহা আলোচনা করা হইতেছে।

প্রথমে কয়েকটি উদাহরণ লওয়া যাক্।

উদা. 1. মনে কর $y = 2x + 1$ এবং $x \to 1$, অর্থাৎ xএর মান 1এর দিকে অগ্রসর হইতেছে।

নিম্নে xএর 1 বিন্দুর নিকটবর্তী মানসমূহের জন্য $y = 2x + 1$এর মান-সমূহকে তালিকাভুক্ত করা হইল :

প্রথমে মনে করা যাক্ $x \to 1+$

x	1·1	1·01	1·001	1·0001	ইত্যাদি।
$y = 2x + 1$	3·2	3·02	3·002	3·0002	

স্পষ্টতঃ দেখা যাইতেছে, যখন x ডান দিক হইতে 1এর নিকটবর্তী হয়, তখন yএর মানও ক্রমশঃ 3এর নিকটবর্তী হইতেছে। প্রকৃতপক্ষে xএর মান 1-এর যথেষ্ট নিকটবর্তী লইয়া, y এবং 3এর মধ্যে দূরত্ব যত ইচ্ছা ছোট করা যায়। সুতরাং যখন $x \to 1+$ করা হয় তখন $y \to 3$ হইতেছে। এইরূপ হইলে বলা হয় যে যখন xএর মান ডানদিক হইতে 1এর দিকে অগ্রসর হয়, তখন yএর সীমাস্থমান 3 (as x tends to 1 from the right hand side, the limiting value of y is 3)। 3কে yএর ডানপক্ষের

সীমা (right hand limit) বলা হয় এবং ইহাকে $\lim_{x \to 1+} y=3$ এই প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অনুরূপে মনে কর x বামদিক হইতে 1এর নিকটবর্তী মানসমূহ গ্রহণ করিতেছে। তখন yএর মানসমূহ তালিকাভুক্ত করা হইল।

x	·9	·99	·999	·9999
y	2·8	2·98	2·998	2·9998

ইত্যাদি।

স্পষ্টতঃ যখন x বামদিক হইতে 1এর দিকে অগ্রসর হইতেছে, তখন yএর মান 3এর দিকে অগ্রসর হইতেছে। প্রকৃতপক্ষে xএর মান 1এর যথেষ্ট নিকটবর্তী লইয়া y এবং 3এর মধ্যে দূরত্ব $3-y$এর মান যত ইচ্ছা ছোট করা যায়। এইরূপ অবস্থায় আমরা বলি যখন x বামপক্ষ হইতে 1এর দিকে অগ্রসর হয়, তখন y-এর সীমাস্থ মান 3 (as x approaches 1 from the left hand side, the limit of y is 3)। 3কে yএর বামপক্ষের সীমা (left hand limit) বলা হয় এবং ইহাকে $\lim_{x \to 1-} y=3$ এই প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

এখানে y-এর বামপক্ষ এবং ডানপক্ষের সীমা দুইটি সমান। এই সাধারণ সীমা 3কে x যখন 1এর দিকে অগ্রসর হয় তখন yএর সীমাস্থ মান বলা হয় এবং ইহাকে $\lim_{x \to 1} y=3$ এই প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং $\lim_{x \to 1} y=3$এর অর্থ এই যে xএর মান 1এর যথেষ্ট নিকটবর্তী লইয়া y এবং 3এর দূরত্ব $|y-3|$ -কে যতখুশী ছোট করা যাইবে।

সাধারণভাবে $y=f(x)$ যদি xএর অপেক্ষক হয়, তবে $\lim_{x \to a} f(x)=l$ প্রতীকের অর্থ হইতেছে যে, xএর মান a-র যথেষ্ট নিকটবর্তী লইয়া $f(x)$ এবং lএর মধ্যের দূরত্ব $|f(x)-l|$ -কে যতইচ্ছা ছোট করিয়া ফেলা সম্ভব।

উপরোক্ত আলোচনা হইতে অপেক্ষকের সীমার সংজ্ঞা নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা : যখন কোন চলরাশি x উহার বিচরণক্ষেত্রে অবস্থিত কোন ধ্রুবক a-র দিকে অগ্রসর হয়, তখন ধ্রুবক 'l'কে, অপেক্ষক $f(x)$এর সীমা বলা হয় যদি a-র নিকটবর্তী xএর এমন সকল মান পাওয়া যায়, যাহার জন্য $f(x)$ এবং lএর দূরত্ব $|f(x)-l|$ যে কোন পূর্ব নির্ধারিত (যত খুশী ছোট) ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ছোট হয় এবং ইহাকে $\lim_{x \to a} f(x)=l$ এই সংকেত দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

নিম্নে আরো কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা সংজ্ঞাটি বুঝান হইল।

উদা. দেখাও যে $\lim_{x\to 2} 5x = 10.$

এখানে $f(x)=5x$ এবং x, 2এর দিকে অগ্রসর হইতেছে। সুতরাং 2-এর নিকটবর্তী মানসমূহের জন্য $5x$-এর মান লইয়া আলোচনা করিতে হইবে। নিম্নের তালিকাটিতে 2এর নিকটবর্তী মানসমূহের জন্য $f(x)=5x$ এর মান বাহির করা হইল।

x	1·9	1·99	1·999	1·9999
$f(x)=5x$	9·5	99·5	9·995	9·9995

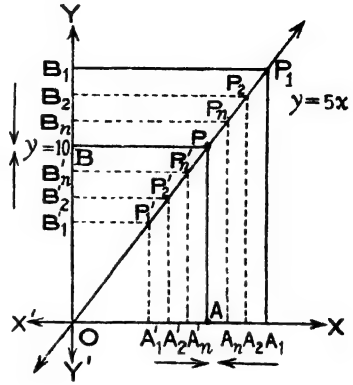
x	2·1	2·01	2·001	2·0001
$f(x)=5x$	10·5	10·05	10·005	10·0005

উপরের তালিকা হইতে স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে, বামপক্ষ বা ডানপক্ষ যে কোন পক্ষ হইতে x, 2এর দিকে অগ্রসর হইলে, yএর মান 10এর দিকে অগ্রসর হইতেছে। প্রকৃতপক্ষে 2এর নিকটবর্তী xএর এমন সকল মান পাওয়া যায় যাহার জন্য $5x$ এবং 10এর দূরত্ব $|5x-10|$-এর মানকে যে কোন (যত খুশী ক্ষুদ্র) পূর্ব নির্ধারিত ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ছোট করিয়া ফেলা যাইবে। যেমন ধর ·1 সংখ্যাটি লওয়া হইল। এখন 2এর নিকটবর্তী xএর এমন সকল মান আছে যাহার জন্য $|5x-10|<\cdot 1$ হইবে। প্রকৃতপক্ষে $|5x-10|<\cdot 1$ হইলে $|x-2|<\frac{\cdot 1}{5}$ বা ·02 $\therefore$ যখন $|x-2|<\cdot 02$, অর্থাৎ যখন xএর মান $1\cdot 98<x<2\cdot 02$ বিস্তারে থাকিবে তখন $|5x-10|$-এর মান ·1 অপেক্ষা ছোট হইবে।

আবার পূর্ব নির্ধারিত সংখ্যাটি ·005 হইলে, যখন xএর মান $1\cdot 999<x<2\cdot 001$ বিস্তারে থাকিবে তখন $|5x-10|<\cdot 005$ হইবে। অনুরূপে দেখান যায় যে সর্বদা 2এর নিকটবর্তী x-এর এমন সকল মান পাওয়া যাইবে যাহার জন্য $|5x-10|$-এর মান যে কোন পূর্ব নির্ধারিত ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ছোট করিয়া ফেলা যাইবে। সুতরাং আমরা বলিতে পারি যখন $x\to 2$ হয়, তখন $f(x)$এর সীমাস্থ মান 10। ইহাকে $\lim_{x\to 2} 5x=10$ এই রূপে প্রকাশ করা হয়।

উপরোক্ত আলোচনাটি লেখ চিত্রের সাহায্যে করা হইতেছে।

$y=5x$এর লেখ চিত্রে x-অক্ষের উপর অবস্থিত A বিন্দুটি হইতেছে $x=2$. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ইত্যাদি x-অক্ষের উপর Aএর ডান দিকে অবস্থিত বিন্দুসমূহ। $P_1, P_2, \cdots, P_n$ ইত্যাদি বিন্দুসমূহ হইতেছে $y=5x$এর

লেখের উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহ যাহাদের ভুজ হইতেছে যথাক্রমে OA_1, OA_2, $\cdots$, OA_n ইত্যাদি। B_1, B_2, $\cdots$, B_n ইত্যাদি y-অক্ষের উপর অবস্থিত বিন্দু-সমূহ, যাহারা P_1, P_2, $\cdots$, P_n ইত্যাদি বিন্দুর কোটি। B বিন্দুটি হইতেছে $y=10$ বিন্দুটি। এখন, x যখন A_1, A_2, $\cdots$, A_n ইত্যাদি বিন্দুসমূহ অতিক্রম করিয়া A বিন্দুর দিকে অর্থাৎ 2এর দিকে অগ্রসর হইতেছে, তখন y ক্রমশঃ B_1, B_2, $\cdots$, B_n ইত্যাদি বিন্দু অতিক্রম করিয়া B বিন্দুর দিকে অর্থাৎ $y=10$-এর দিকে অগ্রসর হইতেছে।

চিত্র 33

সুতরাং যখন x ডানপক্ষ হইতে Aএর দিকে অগ্রসর হইতেছে, y তখন B বিন্দুর দিকে অগ্রসর হইতেছে, অনুরূপে A বিন্দুর বামদিকে A_1', A_2' $\cdots$, A_n' ইত্যাদি বিন্দু লইয়া দেখান হইয়াছে যে x যখন, A_1', A_2', $\cdots$, A_n' ইত্যাদি বিন্দুকে অতিক্রম করিয়া বামপক্ষ হইতে Aএর দিকে অগ্রসর হয়, y, তখন B_1', B_2', $\cdots$, B_n' ইত্যাদি বিন্দুকে অতিক্রম করিয়া B বিন্দুর অর্থাৎ $y=10$ বিন্দুর দিকে অগ্রসর হইতেছে। সুতরাং x ডান বা বাম যে কোন দিক হইতে A বিন্দু বা $x=2$ বিন্দুর দিকে অগ্রসর হইলে y উভয়ক্ষেত্রে B বিন্দু বা $y=10$ বিন্দুর দিকে অগ্রসর হইতেছে। এইরূপ ক্ষেত্রে আমরা বলি $\lim\limits_{x\to 2} y=10$ বা $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=10$.

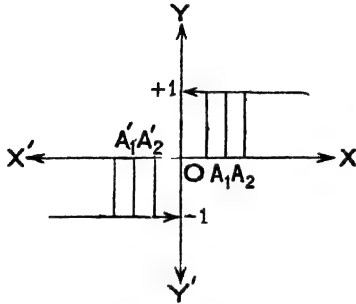
এইবার একটি অপেক্ষক লওয়া হইতেছে যাহার নির্দিষ্ট একটি বিন্দুতে সীমাস্থ মান বাহির করা যাইবে না।

উদা. মনে কর $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, যখন $x\neq 0$, এবং $x\to 0$.

এখানে $x=0$ বিন্দুতে $f(x)$ অসংজ্ঞেয়, কিন্তু 0-এর নিকটবর্তী যে কোন বিন্দুতে $f(x)$এর মান পাওয়া যাইবে। সুতরাং x 0এর দিকে অগ্রসর হইলে অর্থাৎ 0-এর নিকটবর্তী বিন্দুসমূহে $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ এর মান সম্বন্ধে আলোচনা করা যাইবে।

প্রথমে মনে কর $x \to 0+$. $x=0$ বিন্দুর ডান পার্শ্বে অবস্থিত বিন্দুসমূহে $f(x)$এর মান নিম্নলিখিত তালিকার দ্বারা দেওয়া হইল :

x	$\cdot 1$	$\cdot 01$	$\cdot 001$	$\cdot 0005$
$f(x): \frac{\mid x \mid}{x}$	1	1	1	1

, কারণ $f(\cdot 1) = \frac{\mid \cdot 1 \mid}{\cdot 1} = \frac{\cdot 1}{\cdot 1} = 1$ ইত্যাদি

চিত্র 34

স্পষ্টতঃ 0-এর ডান পক্ষে অবস্থিত সকল বিন্দুর জন্য $\mid f(x)-1 \mid$ এর মান সর্বদা 0.

∴ বলিতে পারি $\mid f(x)-1 \mid$ এর মান যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা (তাহা যত খুশী ছোট হোক না কেন) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা যাইবে।

$$\therefore \lim_{x \to 0+} \frac{\mid x \mid}{x} = 1.$$

এইবার মনে কর $x \to 0-$. নিম্নে $x=0$ বিন্দুর বাম পার্শ্বে অবস্থিত বিন্দুসমূহে $f(x)$এর মানসমূহ তালিকাবদ্ধ করা হইল।

x	$-\cdot 1$	$-\cdot 01$	$-\cdot 0001$
$f(x) = \frac{\mid x \mid}{x}$	-1	-1	-1

ইত্যাদি

কারণ $f(-\cdot 1) = \frac{\mid -\cdot 1 \mid}{-\cdot 1} = \frac{\cdot 1}{-\cdot 1} = -1$ ইত্যাদি

সুতরাং 0-এর বামপক্ষে অবস্থিত বিন্দুসমূহের জন্য $\mid f(x)-(-1) \mid$ এর মান সর্বদা 0.

∴ বলিতে পারি $\mid f(x)-(-1) \mid$ এর মান যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা সম্ভব।

$$\therefore \lim_{x \to 0-} \frac{\mid x \mid}{x} = -1.$$

এই ক্ষেত্রে বামপক্ষের এবং ডানপক্ষের সীমাস্থ মান সমান নহে। সুতরাং যখন $x \to 0$ তখন $f(x) = \frac{\mid x \mid}{x}$ এর সীমাস্থ মান নাই অর্থাৎ $\lim_{x \to 0} \frac{\mid x \mid}{x}$ এর কোন মান নাই।

$\frac{\mid x \mid}{x}$ এর লেখচিত্রের দুইটি অংশ। একটি অংশ প্রথম পাদে অবস্থিত এবং অপরটি তৃতীয় পাদে অবস্থিত। দুইটি অংশই x-অক্ষের সমান্তরাল এবং

x-অক্ষ হইতে 1 দূরত্বে অবস্থিত। প্রথম অংশে দেখ A_1, A_2, ...ইত্যাদি বিন্দু ডানপক্ষ হইতে 0এর দিকে অগ্রসর হইলে yএর মান সর্বদাই 1 থাকিতেছে, সুতরাং বলিতে পারি y, 1এর দিকে অগ্রসর হইতেছে। অনুরূপে A_1', A_2', ...ইত্যাদি বিন্দু বামপক্ষ হইতে 0এর দিকে অগ্রসর হইলে, y-এর মান সর্বদা -1 থাকে। সুতরাং বলিতে পারি y, -1-এর দিকে অগ্রসর হইতেছে।

লক্ষ্য কর 0 বিন্দুতে লেখচিত্রটি বিচ্ছিন্ন এবং ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটির সীমাস্থ মান নাই। অন্যত্র লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন এবং ঐ সকল বিন্দুতে অপেক্ষকটির সীমাস্থ মান নির্ণয় করা সম্ভব।

উদা. $f(x)=[x]$ এবং $x \to 2$ যেখানে $[x]$এর অর্থ x-অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অথবা সমান এইরূপ বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা।

প্রথমে মনে কর $x \to 2+$. 2 অপেক্ষা বড় এবং 2এর নিকটবর্তী মানসমূহে $[x]$এর মান বাহির করা হইল।

x	2·1	2·01	2·001
$[x]$	2	2	2

ইত্যাদি।

স্পষ্টতঃ, $\lim\limits_{x \to 2+} [x]=2$.

এবার মনে করা যাক $x \to 2-$. 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং 2-এর নিকটবর্তী মানসমূহে $[x]$এর মান বাহির করা হইল।

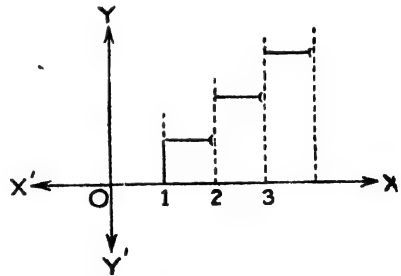
x	1·9	1·99	1·999
$[x]$	1	1	1

ইত্যাদি।

$\therefore$ স্পষ্টতঃ $\lim\limits_{x \to 2-} [x]=1$.

চিত্র 35

এখানে ডানপক্ষ এবং বামপক্ষের সীমাস্থ মান ভিন্ন। সুতরাং যখন x, 2-এর দিকে অগ্রসর হয়, তখন $[x]$ এর কোন সীমাস্থ মান নাই।

এক্ষণে $[x]$এর লেখচিত্রে দেখ যে $x=2$এর নিকট লেখ চিত্রটি বিচ্ছিন্ন। অনুরূপে $x=1$, $x=3$ ইত্যাদি বিন্দুতে লেখ চিত্রটি বিচ্ছিন্ন এবং এই সব বিন্দুতে অপেক্ষকটির সীমাস্থ মান নাই। 1, 2, 3, ... ইত্যাদি বিন্দু ছাড়া (অর্থাৎ x-এর অখণ্ড মান ছাড়া) অন্যত্র লেখচিত্রটি বিচ্ছিন্ন নহে এবং ঐ সকল বিন্দুতে অপেক্ষকটির সীমাস্থ মান আছে।

দ্রষ্টব্য : (i) $\lim_{x\to a} f(x)=l$-কে অনেক সময় $\mathop{Lt}_{x\to a} f(x)=l$ বা, $\mathop{L}_{x\to a} f(x)=l$ প্রতীক দ্বারাও প্রকাশ করা হয়। $\lim_{x\to a} f(x)=l$-কে এইরূপভাবে পড়িবে, লিমিট x টেণ্ডস্ টু a, $f(x)$ সমান l, বা, x, a-র দিকে অগ্রসর হইলে, $f(x)$এর সীমাস্থ মান lএর সমান।

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ নির্ণয় করিতে হইলে, $f(x)$এর মান $x=a$ বিন্দুর দুই পার্শ্বে অবস্থিত বিন্দুসমূহে জানিতে হইবে, $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান না জানিলেও চলিবে। প্রকৃতপক্ষে $\lim_{x\to a} f(x)$ এবং $f(a)$এর মধ্যে প্রভেদ আছে। $\lim_{x\to a} f(x)$এর মান a বিন্দুর নিকটবর্তী বিন্দুসমূহে $f(x)$এর মানের উপর নির্ভর করে, $x=a$ বিন্দুর মানের উপর নির্ভরশীল নহে। অপরপক্ষে $f(a)$এর মান শুধুমাত্র $x=a$ বিন্দুর উপর নির্ভরশীল, নিকটবর্তী বিন্দুসমূহের উপর নির্ভরশীল নহে। পরবর্তী অনুচ্ছেদে $\lim_{x\to a} f(x)$ এবং $f(a)$ মধ্যের সম্বন্ধ লইয়া আলোচনা করা হইয়াছে।

(iii) $\lim_{x\to a} f(x)=l$ হইলে $\lim_{x\to a+} f(x)=l$ এবং $\lim_{x\to a-} f(x)=l$ হইবে।
যদি $\lim_{x\to a+} f(x)\neq\lim_{x\to a-} f(x)$ হয়, তবে a বিন্দুতে $f(x)$এর সীমাস্থ মান নাই। অতএব কোন বিন্দুতে সীমাস্থ মান নির্ণয় করিতে হইলে আমরা ডান পক্ষের এবং বাম পক্ষের সীমা দুইটি নির্ণয় করিয়া দেখিব উহারা সমান কিনা। অর্থাৎ $\lim_{x\to a} f(x)$ এর অর্থ $\lim_{x\to a+} f(x)=l_1$, $\lim_{x\to a-} f(x)=l_2$ এবং $l_1=l_2$.

উদা. 1. দেখাও যে $\lim_{x\to a} x=a$.

এখানে $f(x)=x$ এবং দেখাইতে হইবে $l=a$।

সুতরাং $|f(x)-l| = |x-a|$। এখন xকে a-র যথেষ্ট নিকটবর্তী লইয়া $|f(x)-l|$ বা $|x-a|$ এর মান যত ইচ্ছা ছোট করিয়া ফেলা সম্ভব। প্রকৃতপক্ষে x, a-এর যত নিকটবর্তী হইবে, $f(x)$, lএর ঠিক ত'ত নিকটবর্তী হইবে, কারণ $|f(x)-l|=|x-a|$

$\therefore$ $\lim_{x\to a} f(x)=l$ হইবে। l-এর মান বসাইয়া পাই $\lim_{x\to a} x=a$.

উদা. 2. দেখাও যে $\lim_{x\to a} c=c$।

এখানে $f(x)=c$ এবং $l=c$। $\therefore \quad |f(x)-l| = |c-c| =0$
এখন 0 যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

অতএব বলিতে পারি যে x-এর যে কোন মানের জন্য $|f(x)-l|$কে যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা সম্ভব ; ইহা x-এর যে কোন মানের জন্য সম্ভব বলিয়া, a-র নিকটবর্তী x-এর মানসমূহের জন্য $|f(x)-l|$কে যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করিয়া ফেলা সম্ভব।

$$\therefore \quad \lim_{x\to a} f(x)=l \qquad \text{বা,} \quad \lim_{x\to a} c=c.$$

উদা. 3. দেখাও যে $\lim_{x\to 2} x^2=4$. x-এর মান কোন্ বিস্তারের মধ্যে থাকিলে $|x^2-4|$ এর মান ·01 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ?

এখানে $f(x)=x^2$ এবং $l=4$.

এখন নিম্নে 2-এর নিকটবর্তী মানসমূহের জন্য $f(x)$-এর মানগুলি তালিকাভুক্ত করা হইল।

x	2·1	2·01	2·001	2·0001	ইত্যাদি
$f(x)=x^2$	4·41	4·0401	4·004001	4·00040001	

স্পষ্টতঃ যখন $x\to 2+$, $f(x)\to 4$.

$x=$	1·9	1·99	1·999	1·9999	ইত্যাদি
$f(x)=x^2$	3·61	3·9601	3·996001	3·99960001	

স্পষ্টতঃ যখন $x\to 2-$, $f(x)\to 4$.

$\therefore$ x ডানপার্শ্ব বা বামপার্শ্ব যে কোন দিক হইতে 2-এর দিকে অগ্রসর হইলে $f(x)$-এর মান 4এর দিকে অগ্রসর হয়, এবং $|f(x)-4|$ এর মানকে যতইচ্ছা ক্ষুদ্র করিয়া ফেলা সম্ভব।

$$\therefore \quad \lim_{x\to 2} f(x)=4 \qquad \text{বা,} \quad \lim_{x\to 2} x^2=4.$$

এখন যদি $|x^2-4|<·01$ হয়, তবে $|x+2|\ |x-2|<·01$
x, 2-এর নিকটবর্তী বলিয়া আমরা বলিতে পারি $x>0$

$\therefore \quad 2<|x+2|$.

অতএব $2|x-2|<|x+2|\ |x-2|<·01$.

বা, $|x-2|<\dfrac{·01}{2}$ বা, $|x-2|<·005$.

বা, $1·995<x<2·005$.

সুতরাং x-এর মান $1·995 < x < 2·005$ বিস্তারে থাকিলে $| x^2 - 4 |$ এর মান ·01 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

উদা. 4. $f(x) = \frac{x^2}{x}$ অপেক্ষকের $x = 0$ বিন্দুতে সীমাস্থ মান বাহির কর।

এখানে $x = 0$, বিন্দুতে অপেক্ষকটি অনির্ণেয় (কারণ $f(0) = \frac{0}{0}$ যাহা অনির্ণেয়)।

$\therefore$ $f(0)$এর অস্তিত্ব নাই। কিন্তু $x = 0$ বিন্দুর নিকটবর্তী বিন্দুসমূহে $f(x)$-এর সসীম মান আছে। ঐ সব বিন্দুতে $f(x)$-এর মান নিম্নে তালিকাভুক্ত করা হইল।

$x =$	1	·1	·01	·001
$\frac{x^2}{x} =$	1	·1	·01	·001

ইত্যাদি এবং

$x =$	− ·1	− ·01	− ·001
$\frac{x^2}{x} =$	− ·1	− ·01	− ·001

ইত্যাদি। স্পষ্টতঃ x বামদিক বা ডানদিক, যে কোন দিক হইতে 0-এর নিকটবর্তী হইলে $\left| \frac{x^2}{x} - 0 \right|$এর মান ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইতেছে।

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0.$$

দ্রষ্টব্য। $y = \frac{x^2}{x}$এর লেখ চিত্র কেবলমাত্র (0,0) বিন্দুটি ব্যতীত $y = x$ অপেক্ষকের লেখ চিত্রের ন্যায় হইবে।

উদা. 5. দেখাও যে $\lim_{x \to 2} (2x + 4) = 8$. x-এর মান কোন্ বিস্তারে থাকিলে $| (2x + 4) - 8 |$ এর মান (i) ·1 অপেক্ষা (ii) ·0004 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ?

এখানে $f(x) = 2x + 4$, $l = 8$ এবং $x \to 2$.

এখন $x = 2$ বিন্দুর নিকটবর্তী মানসমূহের জন্য $f(x)$-এর মান নির্ণয় করা হইল।

$x =$	2·1	2·01	2·001	2·0001
$f(x) =$	8·2	8·02	8·002	8·0002

এবং

$x =$	1·9	1·99	1·999
$f(x) =$	7·8	7·98	7·998

ইত্যাদি। স্পষ্টতঃ x যখন ডানপার্শ্ব বা বামপার্শ্ব হইতে 2-এর দিকে অগ্রসর হইতেছে, $f(x)$ তখন 8এর নিকটবর্তী হইতেছে এবং x-এর মান 2-এর যথেষ্ট নিকটবর্তী লইয়া $f(x)$ এবং 8-এর মধ্যে দূরত্ব যত ইচ্ছা ক্ষুদ্র করিয়া ফেলা যায়।

$$\therefore \quad \lim_{x \to 2} f(x) = 8 \quad \text{বা,} \quad \lim_{x \to 2} (2x + 4) = 8.$$

এখন $|(2x+4)-8|<\cdot 1$, হইলে $|2(x-2)|<\cdot 1$,

বা, $|x-2|<\cdot 1/2$, বা, $|x-2|<\cdot 05$

বা, $1\cdot 95<x<2\cdot 05$।

$\therefore$ $1\cdot 95<x<2\cdot 05$ বিস্তারে অবস্থিত x-এর যে কোন মানের জন্য $|(2x+4)-8|<\cdot 1$ হইবে।

আবার, $|(2x+4)-8|<\cdot 0004$ হইলে $|x-2|<\frac{\cdot 0004}{2}$

বা, $|x-2|<\cdot 0002$ বা, $1\cdot 9998<x<2\cdot 0002$.

$\therefore$ $1\cdot 9998<x<2\cdot 0002$ বিস্তারে অবস্থিত x-এর যে কোন মানের জন্য $|(2x+4)-8|<\cdot 0004$ হইবে।

উদা. 6. দেখাও যে $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}} x^3=2$

এখানে $a=\sqrt[3]{2}=1\cdot 259\cdots\cdots$ এবং $f(x)=x^3$, $l=2$.

এখন

$x=$	1	1·2	1·25	1·259
$x^3=$	1	1·728	1·953125	1·995616979

ইত্যাদি।

স্পষ্টত: $x\to\sqrt[3]{2}-$ হইলে $x^3\to 2$ হইতেছে।

আবার

x	1·3	1·26
x^3	2·197	2·00376

ইত্যাদি

স্পষ্টত: যখন $x\to\sqrt[3]{2}+$ তখন $x^3\to 2$.

$$\therefore \lim_{x\to\sqrt[3]{2}} x^3=2.$$

উদা. 7. দেখাও যে $\lim\limits_{x\to 5}(x-5)=0$.

এখানে $f(x)=x-5$, এবং $x\to 5$। সুতরাং 5-এর নিকটবর্তী বিন্দু-সমূহে $f(x)$এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

$x=$	4·9	4·99	4·999	4·9999
$f(x)=$	−·1	−·01	−·001	−·0001

ইত্যাদি

$x=$	5·1	5·01	5·001
$f(x)=$	·1	·01	·001

ইত্যাদি

সুতরাং স্পষ্টত: যখন $f(x)$ বাম বা ডান দিক হইতে 5এর দিকে অগ্রসর হয়, তখন $f(x)$ এর মান 0এর দিকে অগ্রসর হইতেছে।

$$\therefore \lim_{x\to 5} f(x)=0, \quad \text{বা,} \quad \lim_{x\to 5}(x-5)=0।$$

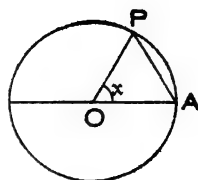
উদা. 8. দেখাও যে $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

চিত্র 36

মনে কর, O কেন্দ্রযুক্ত বৃত্তের OA একটি ব্যাসার্ধ এবং P বিন্দুটি এইরূপ যে $m\angle AOP = x$ (রেডিয়ান)।

এক্ষণে, OAP ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল < OAP বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল

বা, $\frac{1}{2}\,OA.OP \sin x < \frac{1}{2}\,OA^2.x$

বা, $\sin x < x$.

স্পষ্টতঃ, যখন $x<0$, $|\sin x| < |x|$

$\therefore$ x-এর যে কোন মানের জন্য, $|\sin x - 0| = |\sin x| < |x|$

এক্ষণে x-কে 0-এর যথেষ্ট নিকটবর্তী লইয়া $|\sin x - 0|$-এর মান যত ইচ্ছা ক্ষুদ্র করিয়া ফেলা যাইবে। প্রকৃতপক্ষে $|x|$-এর মান 0-এর যত নিকটবর্তী হইবে, $|\sin x|$ এর মান তাহা অপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর হইবে।

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

উদা. 9. দেখাও যে $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a.$

$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{1}{2}(x-a) \cos \frac{1}{2}(x+a).$

$\therefore \quad |\sin x - \sin a| = 2\,|\sin \frac{1}{2}(x-a)|\;|\cos \frac{1}{2}(x+a)|$

$\leqslant 2.\frac{1}{2}\,|x-a|\,.1, \quad [\because \; |\cos \frac{1}{2}(x+a)| \leqslant 1$

বা, $\leqslant |x-a|$. এবং $|\sin x| < |x|$

$\therefore$ x, a-এর যত নিকটবর্তী হইবে, $\sin x$, $\sin a$-এর তদপেক্ষা নিকটবর্তী হইবে এবং $|\sin x - \sin a|$-কে যত ইচ্ছা ক্ষুদ্র করিয়া ফেলা যাইবে।

$$\therefore \quad \lim_{x\to a} \sin x = \sin a.$$

উদা. 10. দেখাও যে, $\lim_{x\to 0} \left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 0$

$$\left|x \sin \frac{1}{x} - 0\right| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| = |x|\,\left|\sin \frac{1}{x}\right|$$

এক্ষণে $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1$. $\quad \therefore \; \left|x \sin \frac{1}{x} - 0\right| \leqslant |x|$

এখন, যেহেতু $x \to 0$, সুতরাং x-এর মান যে কোন সংখ্যা (ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর লওয়া যায় এবং তখন $|x|$ -এর মান যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা (যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

অতএব $\left|x \sin \frac{1}{x} - 0\right| < |x|$ হওয়ায় x-এর মান 0-এর যথেষ্ট নিকটবর্তী লইয়া $\left|x \sin \frac{1}{x} - 0\right|$-এর মান যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা (যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা যাইবে ; অর্থাৎ

$$\lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 0.$$

প্রশ্নমালা 3(A)

1. দেখাও যে

(i) $5, 4, \frac{11}{3}, \frac{7}{2}, \frac{17}{5}$………ইত্যাদি মান দ্বারা $x \to 3+$ হয়।

(ii) $2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{14}{5}$………ইত্যাদি মান দ্বারা $x \to 3-$ হয়।

2. 3 বিন্দুর নিকটবর্তী মানসমূহে $f(x) = 3x + 4$এর মান নির্ণয় করিয়া দেখাও যে $\lim_{x \to 3} (3x + 4) = 13.$

xএর মান কোন্ বিস্তারে থাকিলে $|f(x) - 13| < \cdot 0005$ হইবে ?

3. $x \to 0$ হইলে, $f(x) = |x|$ এর মান পরিবর্তনের স্বরূপ নির্ণয় কর।

4. $f(x) = x$, যখন $x > 0$,
$\quad = x + 1$, যখন $x \leqslant 0$,

যখন $x \to 0$, তখন $f(x)$এর মান পরিবর্তনের স্বরূপ নির্ণয় কর, $\lim_{x \to 0} f(x)$ এর মান আছে কি ?

$y = f(x)$এর লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া দেখাও যে উহা $x = 0$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

5. দেখাও যে $\lim_{x \to 5} 3 = 3, \quad \lim_{x \to a} 4 = 4, \quad \lim_{x \to a} c = c.$

6. দেখাও যে $\lim_{x \to 4} x = 4, \quad \lim_{x \to 2 \cdot 1} x = 2 \cdot 1.$

7. দেখাও যে $\lim_{x \to 2 \cdot 4} x^2 = 5 \cdot 76.$

8. দেখাও যে $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = 0$; $y = \frac{x^3}{x}$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া দেখাও যে উহা $x = 0$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন, কিন্তু বিচ্ছিন্ন অংশদ্বয়ের দূরত্ব শূন্য।

9. দেখাও যে $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$। অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

10. দেখাও যে $\lim_{x\to 1} f(x)$এর অস্তিত্ব নাই, যেখানে

$f(x)=3x$ যখন $x\geqslant 1$

$= x$ যখন $x<1$

$y=f(x)$এর লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া দেখাও যে উহা $x=1$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন এবং বিচ্ছিন্ন অংশদ্বয়ের $x=1$, বিন্দুতে দূরত্ব হইতেছে 2।

11. দেখাও যে, (i) $\lim_{x\to 3}(x-3)=0$ (ii) $\lim_{x\to a}(x-a)=0.$

12. দেখাও যে, (i) $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$. (ii) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x=1$

(iii) $\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=0.$

13. দেখাও যে,

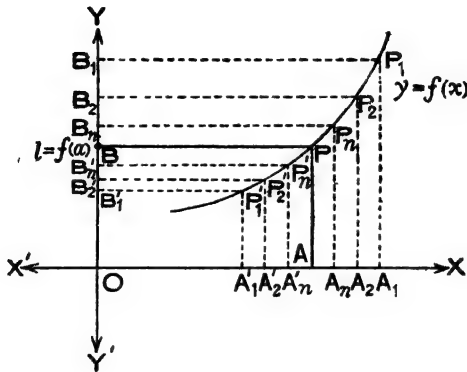
(i) $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0.$ (ii) $\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0$

§ 3·4. **সন্তত্তা** (Continuity) :—

পূর্বের অধ্যায়ে সন্ততার সংজ্ঞায় বলা হইয়াছিল যে, কোন অপেক্ষককে কোন একটি বিন্দুতে সন্তত বলা হইবে যদি ঐ বিন্দুর দুইপার্শ্বে অঙ্কিত অপেক্ষকটির লেখচিত্র অবিচ্ছিন্ন হয়।

মনে কর $y=f(x)$ অপেক্ষকটি $x=a$ বিন্দুতে সন্তত। সুতরাং $x=a$ বিন্দুর জন্য অপেক্ষকটির লেখচিত্রের উপর অবস্থিত P বিন্দুর দুইপার্শ্বে লেখ চিত্রটি অবিচ্ছিন্ন হইবে। মনে কর $A_1, A_2, A_3,\cdots$ ইত্যাদি $x=a$ বিন্দুর ডানদিকে অবস্থিত x-অক্ষের উপর বিন্দুসমূহ। $A_1, A_2, A_3,\cdots$বিন্দুসমূহ হইতে x-অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্বসমূহ লেখচিত্রটিকে $P_1, P_2, P_3,\cdots$ইত্যাদি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, এবং $P_1, P_2, P_3,\cdots$ইত্যাদি বিন্দুতে x-অক্ষের সমান্তরালসমূহ y-অক্ষকে $B_1, B_2, B_3,\cdots$ইত্যাদি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। মনে কর x-অক্ষের উপর A বিন্দুটি হইতেছে $x=a$ এবং উক্ত বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর লম্বটি লেখচিত্রটিকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং P বিন্দু হইতে অঙ্কিত x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাটি y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ∴ B বিন্দুটি হইতেছে $y=f(a)$। এখন লেখচিত্র হইতে দেখা

যাইতেছে যে, যখন x চলরাশিটি A_1, A_2, A_3 ইত্যাদি বিন্দুকে অতিক্রম করিয়া A বিন্দুর দিকে অগ্রসর হইতেছে তখন y চলরাশি B_1, B_2, B_3 ইত্যাদি বিন্দু অতিক্রম করিয়া B বিন্দু বা $y=f(a)$ বিন্দুর দিকে অগ্রসর হইতেছে। xকে ডানপক্ষ হইতে A বিন্দুর যথেষ্ট নিকটে লইয়া yকে $f(a)$-র যত ইচ্ছা নিকটবর্তী করা যাইতেছে। সুতরাং বলিতে পারি $\lim\limits_{x \to a+} f(x)=f(a)$।

অনুরূপে x-অক্ষের উপর A বিন্দুর বামপার্শ্বে A_1', A_2', A_3',…ইত্যাদি বিন্দু

চিত্র 37

লইয়া দেখান হইয়াছে যে, x যখন, A_1', A_2',…ইত্যাদি বিন্দু অতিক্রম করিয়া বামদিক হইতে A-এর দিকে অগ্রসর হয়, y তখন, B_1', B_2', B_3',…ইত্যাদি বিন্দু অতিক্রম করিয়া B বিন্দুর দিকে অগ্রসর হয়। সুতরাং বলিতে পারি যে, $\lim\limits_{x \to a-} f(x)=f(a)$।

অতএব দেখা যাইতেছে যে, যদি $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকটি সন্তত হয়, তবে $\lim\limits_{x \to a+} f(x)=\lim\limits_{x \to a-} f(x)=f(a)$ হয়।

এখন বামপক্ষের এবং ডানপক্ষের সীমা সমান বলিয়া $\lim\limits_{x \to a} f(x)$এর অস্তিত্ব আছে এবং এইক্ষেত্রে $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$.

সুতরাং যে বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত, ঐ বিন্দুর দিকে x অগ্রসর হইলে $f(x)$-এর সীমাস্থ মান হইবে ঐ বিন্দুতে $f(x)$এর মানের সমান (at the point of continuity, the limiting value of $f(x)$ is the value of $f(x)$ at

that point). অতএব কোন বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত হইলে ঐ বিন্দুতে $f(x)$এর সীমাস্থ মান নির্ণয় করিবার পদ্ধতি হইল অপেক্ষক $f(x)$-এ x-এর স্থলে ঐ বিন্দুর মান বসাইয়া দেওয়া। যেমন $f(x)=2x+1$এর লেখচিত্র কোথাও বিচ্ছিন্ন নহে। $\therefore$ $x=1$ বিন্দুতে $f(x)=2x+1$ সন্তত। অতএব $x=1$ বিন্দুতে $f(x)=2x+1$এর সীমাস্থ মান হইবে ঐ বিন্দুতে $f(x)$এর মান, অর্থাৎ $f(1)$।

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=2.1+1=3.$$

অনুরূপে $\lim_{x\to 2} x^2=2^2=4$, কারণ $y=x^2$এর লেখচিত্র $x=2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন। সুতরাং 2 বিন্দুতে x^2-এর সীমাস্থ মান ঐ বিন্দুতে x^2-এর মানের সহিত সমান।

দ্রষ্টব্য : কোন অপেক্ষকের সন্ততার ধারণা আমরা ঐ অপেক্ষকের লেখচিত্রের সাহায্যে আলেচনা করিয়াছি এবং দেখিয়াছি যে, যে সকল বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত, ঐ সকল বিন্দুতে $f(x)$এর সীমাস্থ মান এবং $f(x)$এর মান সমান হইবে। ইহা সন্ততার স্বজ্ঞাত সংজ্ঞা (intuitive difinition)। গাণিতিক-ভাবে সন্ততার সংজ্ঞা নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া হয়।

যদি $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ হয় তবে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-কে সন্তত বলা হয় বা $x=a$ বিন্দুকে $f(x)$এর সন্ততার বিন্দু (point of continuity) বলা হয়।

যদি $f(x)$-এর সংজ্ঞা $[a, b]$ বদ্ধ বিস্তারের মধ্যে দেওয়া থাকে (if $f(x)$ is defined in the interval $[a, b]$), তবে $[a, b]$ বিস্তারের প্রান্তবিন্দু-দ্বয় (end points) a এবং bএতে $f(x)$-কে সন্তত বলা হইবে যদি,

$\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$ এবং $\lim_{x\to b-} f(x)=f(b)$ হয়।

(লক্ষ্য কর $[a, b]$ বিস্তারের মধ্যে $f(x)$এর মান দেওয়া থাকার ফলে xএর a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা b অপেক্ষা বৃহত্তর মানের জন্য $f(x)$এর কোন মান জানা যায় না। সুতরাং $\lim_{x\to a-} f(x)$ এবং $\lim_{x\to b+} f(x)$এর মান নির্ণয় করা সম্ভব নহে।)

$[a, b]$ বদ্ধ বিস্তারের সকল বিন্দুতেই $f(x)$ সন্তত হইলে, আমরা বলি $f(x)$, বদ্ধ বিস্তার $[a, b]$ -তে সন্তত।

উদা. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$ এর মান বাহির কর।

$f(x) = \sin x$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র $\frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন। সুতরাং $\frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকটি সন্তত। অতএব $\frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$এর সীমাস্থ মান, ঐ বিন্দুতে $f(x)$ এর মানের সমান হইবে।

$$\therefore \quad \lim_{x \to \pi/2} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

প্রকৃতপক্ষে $y = \sin x$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র সর্বত্রই অবিচ্ছিন্ন। সুতরাং অপেক্ষকটি সর্বত্রই সন্তত। অতএব xএর যে কোন মান a-তে $f(x)$এর সীমাস্থ মান $f(a)$এর সমান হইবে।

$\therefore \quad \lim_{x \to a} \sin x = \sin a$, যেখানে a এর যে কোন বাস্তব মান হইতে পারে।

$\therefore$ কতকগুলি বিশেষ মানের জন্য $\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$

$$\lim_{x \to \pi/3} \sin x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{6}} \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},$$

$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} \sin x = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$ ইত্যাদি।

দ্বিতীয় অধ্যায়ে যে সকল প্রাথমিক অপেক্ষক সম্পর্কে আলোচনা করা হইয়াছে, তাহাদের অধিকাংশের লেখচিত্র অবিচ্ছিন্ন। উহাদের সীমাস্থ মান সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

e^x, $\sin x$, $\cos x$, অপেক্ষকগুলির লেখচিত্র সর্বত্রই অবিচ্ছিন্ন। সুতরাং x-এর সকল মানের জন্যই উহারা সন্তত। অতএব, যে কোন বিন্দু $x = a$তে উহাদের সীমাস্থ মান ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকগুলির মানের সমান।

সুতরাং, $\lim_{x \to a} e^x = e^a$, $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$

$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$, যেখানে a যে কোন একটি বাস্তব সংখ্যা।

$\tan x$-এর লেখচিত্র $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \cdots$ইত্যাদি বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন; অন্যত্র ইহা অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore \quad \lim_{x \to a} \tan x = \tan a$, যখন $a \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, n একটি অখণ্ড সংখ্যা বা শূন্য।

অনুরূপে, $\lim_{x\to a} \cot x=\cot a$, যখন $a\neq n\pi$

$\lim_{x\to a} \sec x=\sec a$, যখন $a\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to a} \operatorname{cosec} x=\operatorname{cosec} a$, যখন $a\neq n\pi$ ।

$\lim_{x\to a} \log x=\log a$, যখন $a>0$ ।

$\lim_{x\to a} x^n=a^n$, a-এর সকল বাস্তব মানের জন্য যখন $n>0$ ।

এবং $x\neq 0$ জন্য, যখন $n<0$ ।

উদা. 1. একটি অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞা নিম্নলিখিতরূপে পাওয়া যায় ।

$$f(x)=-x \quad \text{যখন } x\leqslant 0$$
$$= x \quad \text{যখন } 0<x<1$$
$$=2-x \quad \text{যখন } \geqslant 1$$

দেখাও যে অপেক্ষকটি $x=0$ ও $x=1$ বিন্দু দুইটিতে সন্তত (continuous). [C. U. 1942]

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(x)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0-} f(x)=0=\lim_{x\to 0+} f(x) \quad \therefore \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

আবার $f(0)=0$. সুতরাং $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

অতএব $f(x)$ অপেক্ষকটি $x=0$ বিন্দুতে সন্তত ।

আবার, $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} x=1$,

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(2-x)=2-1=1$$

এবং $f(1)=2-1=1$

$$\therefore \lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$$

অতএব $x=1$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত ।

উদা. 2. একটি অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞা নিম্নলিখিতরূপে পাওয়া যায়

$$f(x)=x^2 \quad \text{যখন } 0<x<1$$
$$=x \quad \text{যখন } 1\leqslant x<2$$
$$=\tfrac{1}{4}x^3 \quad \text{যখন } 2\leqslant x<3.$$

দেখাও যে $f(x)$, $x=1$ এবং $x=2$-এ সন্তত । [C. U. 1941]

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} x^2=1.$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} x = 1.$$

সুতরাং $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 1+} f(x)$ $\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 1$

আবার $f(1)=1$. সুতরাং $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ এবং অপেক্ষকটি $x=1$-এ সন্তত।

আবার $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} x = 2.$

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \tfrac{1}{4}x^3 = 2.$$

$\therefore \lim_{x\to 2-} f(x) = 2 = \lim_{x\to 2+} f(x)$ $\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = 2,$

আবার $f(2) = \frac{1}{4}(2^3) = \frac{1}{4}.8 = 2$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. সুতরাং অপেক্ষকটি $x=2$ বিন্দুতে সন্তত।

উদা. ৪. $f(x) = -1$ যখন $x<0$
$= 0$ যখন $x=0$
$= 1$ যখন $x>0$

$x=0$ বিন্দুতে $f(x)$-এর সন্ততা পরীক্ষা কর।

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} -1 = -1.$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 1 = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0-} f(x) \neq \lim_{x\to 0+} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$-এর অস্তিত্ব নাই এবং $f(x)$, $x=0$ বিন্দুতে সন্তত নহে।

প্রশ্নমালা ৪ (B)

1. অপেক্ষকসমূহের লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া নিম্নলিখিত সীমাস্থ মানগুলি নির্ণয় কর।

(i) $\lim_{x\to \sqrt{2}} x^2$ (ii) $\lim_{x\to 4} (3x+4)$

(iii) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec} x$ (iv) $\lim_{x\to 0} e^x$

(*b*) নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহ কোন্ কোন্ বিন্দুতে অসন্তত, তাহা নির্ণয় কর :—

(i) $\dfrac{1}{x-2}$ (ii) $\dfrac{x^2-5x+b}{x^2-3x+2}$ (iii) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2. লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া $f(x) = |x-1|$ অপেক্ষকটির $x=1$ বিন্দুতে সীমান্থ মান নির্ণয় কর।

3. (i) $f(x) = x$ যখন $x<0$
$= 2x+1$ যখন $0 \leqslant x < 1$
$= 3x$ যখন $x \geqslant 1$

হইলে, $f(x)$ অপেক্ষকটি কোন কোন বিন্দুতে অসন্তত তাহা নির্ণয় কর।

(ii) $f(x) = \dfrac{x^2-25}{x-5}$ যখন $x \neq 5$

$= 10$ যখন $x=5$.

$f(x)$ অপেক্ষকটি $x=5$ বিন্দুতে সন্তত কিনা নির্ণয় কর।

(iii) একটি অপেক্ষক $\phi(x)$-এর সংজ্ঞা $-1 \leqslant x \leqslant 2$ বিস্তারে নিম্নরূপ :—

$\phi(x) = 3+2x$ যখন $-1 \leqslant x < 0$
$= 3-2x$ যখন $0 \leqslant x < \frac{3}{2}$
$= -3-2x$ যখন $\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2.$

$x=0$ এবং $x=\frac{3}{2}$ বিন্দু দুইটিতে অপেক্ষকটির সন্ততা পরীক্ষা কর।

4. 2^x অপেক্ষকের লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া উহা কোন্ বিন্দুতে অসন্তত তাহা বাহির কর।

§ 3·5. **অসন্ততা (Discontinuity) :**

$f(x)$ যদি $x=a$ বিন্দুতে সন্তত না হয়, তবে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$কে অসন্তত বলা হয়। সুতরাং অসন্তত বিন্দুতে $f(x)$-এর লেখচিত্র বিচ্ছিন্ন হইবে।

$x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত হইলে,

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = f(a) \text{ হয়।}$$

অতএব $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ অসন্তত হইলে, হয়

(i) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-} f(x)$ হইবে,

অর্থাৎ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$-এর অস্তিত্ব নাই,

নতুবা (ii) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) \neq f(a)$

অর্থাৎ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$-এর মান আছে, কিন্তু উহা a বিন্দুতে $f(x)$-এর মানের সহিত সমান নহে।

প্রথম ধরণের অসন্ততায় $f(x)$ অপেক্ষকের লেখচিত্র অসন্তত বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন হইবে এবং ঐ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন প্রান্তদ্বয়ের নির্দিষ্ট কিছু দূরত্ব থাকিবে।

দ্বিতীয় ধরনের অসন্ততায়, $f(x)$ অপেক্ষকের লেখচিত্র অসন্তত বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন হইবে, কিন্তু ঐ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন প্রান্তদ্বয়ের দূরত্ব যে কোন নির্দিষ্ট সংখ্যা

হইতে কম হইবে (অর্থাৎ শূন্য হইবে)। $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর মানকে যথাযথ ভাবে লইয়া এই ধরণের অসন্ততাকে সন্ততায় পরিণত করা যায়। এইজন্য এইরূপ অসন্ততাকে পরিবর্তনযোগ্য অসন্ততা (removable discontinuity) বলে।

উপরোক্ত আলোচনা নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে বুঝান হইতেছে।

উদা. 1. $f(x)=2x+1$, যখন $x\geqslant 1$.
$\quad\quad =2x-1$, যখন $x<1$.

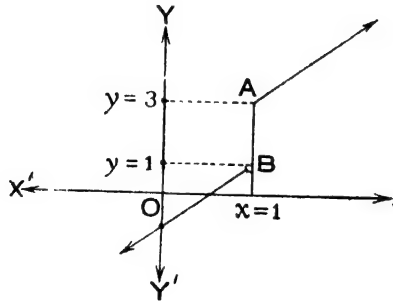
এখানে $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(2x+1)$ (কারণ, $\because$ $x\to 1+$, $\therefore$ x, 1 হইতে বড়, $\therefore$ সংজ্ঞানুসারে $f(x)=2x+1$ হইবে)
$=2.1+1=3.$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} 2x-1=2.1-1=1$

(কারণ, $\because$ $x\to 1-$ $\therefore$ x, 1 হইতে ছোট,
$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে $f(x)=2x-1$)

$\therefore \lim\limits_{x\to 1+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1-} f(x)$।

অতএব $x=1$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি অসন্তত। $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$-এর সীমাস্থ মান নাই এবং $x=1$ বিন্দুতে অসন্ততাটি পরিবর্তনযোগ্য নহে।

নিম্নে লেখচিত্রটি দেখ।

চিত্র 38

লেখচিত্রটি $x=1$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। বিচ্ছিন্ন অংশদ্বয়ের মধ্যে $x=1$ বিন্দুতে দূরত্ব হইতেছে $AB=3-1=2$ যাহা একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা।

উদা. 2. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

$x=1$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি অনির্ণেয়।

যখন $x\to 1$, তখন xএর মান 1 নহে, অর্থাৎ ধরিতে পারি $x\neq 1$,

$x\neq 1$ হইলে, $x-1\neq 0$, সুতরাং $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ এতে লব এবং হরকে $x-1$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $f(x)=x+1$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2.$$

অতএব $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$এর মান আছে কিন্তু, $f(1)$ অনির্ণেয় সুতরাং $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$কে $f(1)$এর সমান বলিতে পারি না। অতএব $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ অসন্তত।

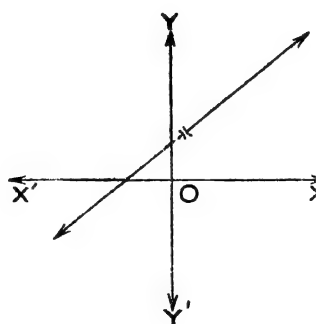
এখন $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মানকে যদি 2 ধরা হয়, অর্থাৎ যদি $f(x)$ এর সংজ্ঞা নিম্নলিখিত ভাবে দেওয়া হয়,

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, \text{ যখন } x\neq 1$$
$$=2, \quad \text{ যখন } x=1,$$

তবে $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2=f(1)$, (সংজ্ঞানুসারে)।

সুতরাং এখন $x=1$ বিন্দু $f(x)$ সন্তত। অতএব $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$এর মানকে যথাযথ ভাবে লইলে, $x=1$ বিন্দুতে অপেক্ষকের অসন্ততা দূরীভূত করিয়া সন্ততায় পরিণত করা যায়।

সুতরাং $x=1$ বিন্দুটিতে অসন্ততা পরিবর্তনযোগ্য (removable discontinuity)।

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$এর লেখ চিত্রের দুইটি অংশ। অংশ দুইটি $x=1$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন ; কিন্তু বিচ্ছিন্ন অংশদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব যে কোন সংখ্যা অপেক্ষা ছোট, অর্থাৎ শূন্য। প্রকৃতপক্ষে $x=1$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির অনির্ণেয় হওয়ায়, শুধুমাত্র ঐ বিন্দুতে লেখচিত্রে ভগ্নতা (break) থাকিবে। এখন ঐ বিন্দুতে $f(x)$এর মান 2 লইলে ঐ ভগ্নতা থাকিবে না এবং ঐ বিন্দুতে লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন হইবে।

চিত্র 39

উদা. 3. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ যখন $x\neq 0$;
$\qquad =2 \quad$ যখন $x=0$।

(এখানে $\sin x$এর মান বাহির করিবার সময় xএর মান রেডিয়ানে ধরিতে হইবে)।

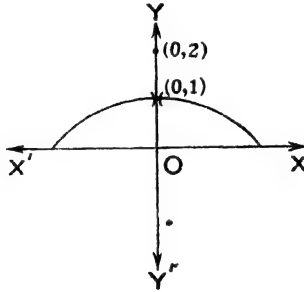
এখানে $f(0)=2$ এবং 0-এর নিকটবর্তী মানসমূহের জন্য $f(x)$-এর মান নিম্নলিখিত তালিকাটিতে দেখান হইল।

$x=$	1	·1	·01	·001
$\sin x=$	·84147	·0998334	·00999984	·00099999983
$\frac{\sin x}{x}=$	·84147	·998334	·999984	·99999983

অনুরূপে,

$x=$	-1	$-·1$	$-·01$	$-·001$
$\sin x=$	$-·84147$	$-·0998334$	$-·009999834$	$-·00099999983$
$\frac{\sin x}{x}=$	·84147	·998334	·9999834	·99999983

ইত্যাদি।

অতএব স্পষ্টত: দেখা যাইতেছে যে x যখন ডানপক্ষ বা বামপক্ষ হইতে 0-এর দিকে অগ্রসর হয়, তখন $\frac{\sin x}{x}$ এর মান 1-এর দিকে অগ্রসর হইতেছে।

চিত্র 40

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1. \quad \text{এখন } f(0)=2.$$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$. অতএব $x=0$ বিন্দুতে $f(x)$ অসন্তত। এখন $x=0$ বিন্দুতে $f(x)$এর মান 2 না লইয়া যদি 1 লওয়া হয়, তবে

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \text{ হইবে।}$$

$x=0$ বিন্দুতে $f(x)$-এর মান যথাযথ ভাবে লইলে 0 বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত হইবে। অতএব $x=0$ বিন্দুতে অসন্ততা পরিবর্তনযোগ্য।

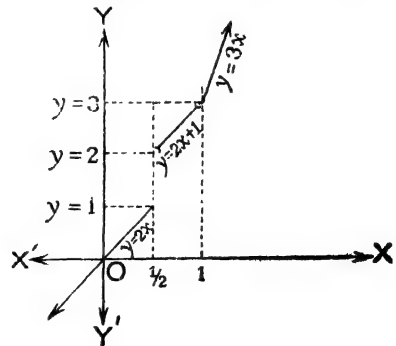
অপেক্ষকটির লেখচিত্রটির তিনটি অংশ, y-অক্ষের দুই দিকে দুইটি অংশ এবং $(0, 2)$ বিন্দুটি।

লেখচিত্রটি $(0, 1)$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। বিচ্ছিন্ন অংশদ্বয়ের দূরত্ব যে কোন সংখ্যা হইতে ছোট, অর্থাৎ শূন্যর সমান। এখন যদি $(0, 1)$ বিন্দুতে $f(x)$এর মান 1 ধরা হয় তবে $(0, 2)$ বিন্দুটির পরিবর্তে $(0, 1)$ বিন্দুটি লেখের অন্তর্গত হইবে এবং অপেক্ষকটি $x=0$ বিন্দুতে সন্তত হইবে।

[$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$, এই সীমাটি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় সীমা অনুচ্ছেদ 3·7এ ইহার সম্বন্ধে আরো আলোচনা হইবে।]

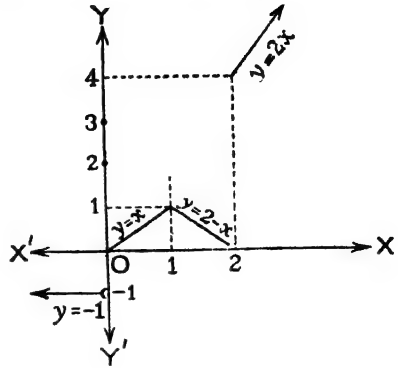
উদা. 4. যদি
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x, & x &\leq \tfrac{1}{2} \\ &= 2x+1, & \tfrac{1}{2} &< x < 1 \\ &= 3x, & x &> 1\,; \end{aligned}$$
হয়, তবে অপেক্ষক $f(x)$এর অসন্তত বিন্দুগুলি নির্ণয় কর।

মনে কর $y=f(x)$. এখন $y=f(x)$ এর লেখচিত্রের তিনটি অংশ আছে, একটি অংশ $x\leq\frac{1}{2}$ এর জন্য, একটি $\frac{1}{2}<x<1$ এর জন্য এবং তৃতীয়টি $x>1$এর জন্য। অপেক্ষকটির লেখচিত্র নিম্নে অঙ্কিত হইল।

লেখচিত্র হইতে দেখ $x=\frac{1}{2}$ এবং $x=1$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি বিচ্ছিন্ন। $x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন অংশদ্বয়ের দূরত্ব 1. সুতরাং $x=\frac{1}{2}$ বিন্দুটিতে অপেক্ষকটির অসন্তত পরিবর্তনযোগ্য নহে। কিন্তু $x=1$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন অংশদ্বয়ের দূরত্ব শূন্য। অতএব $x=1$ বিন্দুটিতে অসন্তত পরিবর্তনযোগ্য। অন্যান্য সকল বিন্দুতে লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন $\therefore$ $x=\frac{1}{2}$ এবং $x=1$ বিন্দু দুইটি কেবলমাত্র $f(x)$ অপেক্ষকের অসন্তত বিন্দু।

চিত্র 41

উদা. 5. যদি
$$\begin{aligned} f(x) &= -1, & x &< 0 \\ &= x, & 0 &\leq x < 1 \\ &= 2-x, & 1 &\leq x < 2 \\ &= 2x, & x &\geq 2 \end{aligned}$$

হয়, তবে $f(x)$-অপেক্ষকের অসন্ততার বিন্দুগুলি নির্ণয় কর। প্রদত্ত অপেক্ষকের চারিটি অংশ আছে। উহাদের লেখচিত্র নিম্নে দেওয়া হইল।

স্পষ্টত: $x=0$ এবং $x=2$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির লেখচিত্র বিচ্ছিন্ন এবং ঐ বিন্দু দুইটিতে বিচ্ছিন্ন অংশদ্বয়ের দূরত্ব যথাক্রমে 1 এবং 4। $\therefore$ $x=0$ এবং $x=2$ বিন্দু দুইটিতে অপেক্ষকটির অসন্ততা পরিবর্তনযোগ্য নহে। অপর সকল বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত।

চিত্র 42

উদা. 6. $\underset{x\to 0}{Lt}\left(x \sin\frac{1}{x}\right)$-এর মান নির্ণয় কর।

দেখাও যে $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ অপেক্ষকটি $x=0$ বিন্দুতে অসন্তত। অসন্ততার প্রকৃতি নির্ণয় কর।

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|. \quad \text{এক্ষণে,} \quad \left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1.$$

$$\therefore \quad \left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant |x|.$$

এক্ষণে, যখন $x\to 0$ হয়, তখন x-এর মান 0-এর যথেষ্ট নিকটবর্তী লইয়া $|x|$ কে যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা (যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা যায় ও সুতরাং $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|$কে যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা (যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা যায়। সুতরাং $\underset{x\to 0}{Lt}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$. এক্ষণে $x=0$ বিন্দুতে $\sin\frac{1}{x}$-এর অস্তিত্ব নাই। সুতরাং $x=0$ বিন্দুতে $\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$ অর্থাৎ $f(0)$-এর অস্তিত্ব নাই। সুতরাং অপেক্ষকটি $x=0$ বিন্দুতে অসন্তত। এক্ষণে যদি অপেক্ষকটির নিম্নরূপ সংজ্ঞা দেওয়া যায় $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ যখন $x\neq 0$

$f(x)=0$ যখন $x=0$,

তবে $x=0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির অসন্ততা দূরীকৃত হয়। কারণ, এই নূতন সংজ্ঞা অনুসারে $\underset{x\to 0}{Lt} f(x)= \underset{x\to 0}{Lt}\left(x \sin\frac{1}{x}\right)=0=f(0)$

সুতরাং $x=0$ বিন্দুতে প্রদত্ত অপেক্ষকের অসন্ততা পরিবর্তনযোগ্য।

প্রশ্নমালা 3(C)

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ নির্ণয় কর। $x=3$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির অসন্ততা কি ধরণের ?

2. যদি
$$\begin{aligned} f(x) &= -x, & x&<0\\ &=x, & 0&\leqslant x\leqslant 1\\ &=2x, & 1&< x<2\\ &=3x, & x&\geqslant 2\end{aligned}$$
হয়, তবে অপেক্ষকটির অসন্ততার বিন্দুগুলি বাহির কর এবং উহারা কি ধরণের অসন্ততা তাহা নির্ণয় কর।

3. $x=2$ বিন্দুতে $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞা নাই। $f(2)$-এর মান কি হইলে $x=2$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির অসন্ততাকে সন্ততায় পরিবর্তিত করা যাইবে ?

4. একটি অপেক্ষক $\phi(x)$-এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ :
$$\begin{aligned}\phi(x) &=\tfrac{1}{2}-x \text{ যখন } x<\tfrac{1}{2}.\\ &=\tfrac{1}{2} \text{ যখন } x=\tfrac{1}{2}\\ &=\tfrac{3}{2}-x \text{ যখন } x>\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$
দেখাও যে অপেক্ষকটি $x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে অসন্তত।

§ 3·6. সীমা সম্বন্ধীয় উপপাদ্যসমূহ (Limit theorems)

সীমা সম্বন্ধীয় বিভিন্ন নিয়মের সাহায্যে অনেক অপেক্ষকের সীমা সহজেই নির্ণয় করা যায়। নিম্নে প্রমাণ ব্যতীত সীমা সম্বন্ধীয় কয়েকটি উপপাদ্যের বিবৃতি দেওয়া হইল।

যদি $f(x)$ এবং $g(x)$, x-এর দুইটি অপেক্ষক হয়, এবং যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$, ও $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ (l ও m উভয়েই সসীম) হয়, তাহা হইলে প্রমাণ করা যায় যে,

(1) $\lim\limits_{x\to a} c.f(x)=cl=c.\lim\limits_{x\to a} f(x)$, যেখানে c একটি ধ্রুবক ;

(2) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=l+m=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=l-m=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

(4) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x).\, g(x)\}=l.m=\lim\limits_{x\to a} f(x).\, \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l}{m}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, যেখানে $m\neq 0$;

(6) $\lim\limits_{x\to a} f\{g(x)\}=f(m)=f\{\lim\limits_{x\to a} g(x)\}$, যদি $f(x)$ একটি সন্তত অপেক্ষক হয়।

দ্রষ্টব্য : 1. উপপাদ্যগুলিকে নিম্নলিখিতভাবে বিবৃত করা যায় :

যদি দুইটি অপেক্ষকের কোন বিন্দুতে সীমাস্থ মান থাকে, তবে ঐ দুইটি অপেক্ষকের যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল ও ভাগফলের সীমাস্থ মান থাকে এবং ঐ সীমাস্থ মান যথাক্রমে অপেক্ষক দুইটির সীমাস্থ মানের যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল বা ভাগফলের সমান হইবে, (ভাগফলের ক্ষেত্রে হরের সীমাস্থ মান শূন্য হইবে না।)

2. (2), (3) এবং (4) উপপাদ্যগুলি দুই-এর বেশী অপেক্ষকের জন্য সত্য। অর্থাৎ যখন অপেক্ষক সমূহের সীমাস্থ মান থাকে তখন,

$$\lim_{x\to a}\{f_1(x)\pm f_2(x)\pm f_3(x)\pm\cdots\cdots\}$$

$$=\lim_{x\to a} f_1(x)\pm\lim_{x\to a} f_2(x)\pm\lim_{x\to a} f_3(x)\pm\cdots\cdots$$

এবং $\lim\limits_{x\to a}\{f_1(x).\, f_2(x).\, f_3(x)\cdots\cdots\}$

$$=\lim_{x\to a} f_1(x).\, \lim_{x\to a} f_2(x).\, \lim_{x\to a} f_3(x)\cdots\cdots$$

(3) $f(x)$ এবং $g(x)$-এর $x=a$ বিন্দুতে সীমাস্থ মান না থাকিলে, উপপাদ্যসমূহ সত্য নাও হইতে পারে।

যেমন, $\dfrac{x^4-16}{x-2}=\dfrac{x^4}{x-2}-\dfrac{16}{x-2}$ আকারে লেখা যায়, কিন্তু

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}\neq\lim_{x\to 4}\frac{x^2}{x-4}-\lim_{x\to 4}\frac{16}{x-4}$$

কারণ বামপক্ষের সীমান্ত মান$=4.2=8$

এবং ডানপক্ষের অপেক্ষক দুইটির সীমান্তমানের অস্তিত্ব নাই।

উপরোক্ত উপপাদ্যগুলির কয়েকটির সত্যতা উদাহরণ দ্বারা যাচাই করা হইল (verified)।

উদা. 1. দেখাও যে, $\lim_{x\to 2}(x^2+2x)=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}2x$

নিম্নে $x=2$ বিন্দুর নিকট x^2, $2x$ এবং x^2+2x অপেক্ষক সমূহের মান বাহির করা হইল।

$x=$	1·9	1·99	1·999	1·9999
=	3·61	3·96	3·998	3·9996
$2x=$	3 80	3·98	3·998	3·9998
x^2+2x	7·41	7·94	7·996	7·9994

ইত্যাদি

x	2·1	2·01	2·001	2·0001
x^2	4·41	4·0401	4·004001	4·00040001
$2x$	4·20	4·02	4·002	4·0002
x^2+2x	8·60	8·0601	8·006001	8·00060001

ইত্যাদি।

উপরোক্ত তালিকা হইতে দেখা যাইতেছে যে, যখন x, ডানপক্ষ বা বামপক্ষ হইতে 2-এর দিকে অগ্রসর হয়, তখন x^2 এবং $2x$ উভয়েই 4-এর দিকে অগ্রসর হয় এবং x^2+2x, 8-এর দিকে অগ্রসর হইতেছে। সুতরাং

$$\lim_{x\to 2}x^2=4,\quad \lim_{x\to 2}2x=4 \text{ এবং } \lim_{x\to 2}(x^2+2x)=8$$

অতএব $\lim_{x\to 2}(x^2+2x)=8=4+4=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}2x$

উদা. 2. দেখাও যে $\lim_{x\to 1}(2x+1)^2=\{\lim_{x\to 1}(2x+1)\}^2$

$x=1$ বিন্দুর নিকট $2x+1$ এবং $(2x+1)^2$-এর মান নির্ণয় করা হইল।

x	·9	·99	·999	·9999
$2x+1$	2·8	2·98	2·998	2·9998
$(2x+1)^2$	7·84	8·8804	8·98804	8·99880004

x	1·1	1·01	1·001	1·0001
$2x+1$	3·2	3·02	3·002	3·0002
$(2x+1)^2$	10·24	9·1204	9·012004	9·00120004

স্পষ্টতঃ যখন x, বামপক্ষ বা ডানপক্ষ হইতে 1-এর দিকে অগ্রসর হইতেছে তখন $(2x+1)$, 3-এর দিকে অগ্রসর হয় এবং $(2x+1)^2$, 9-এর দিকে অগ্রসর হইতেছে। সুতরাং

$$\lim_{x\to 1}(2x+1)^2=9=3^2=\left\{\lim_{x\to 1}(2x+1)\right\}^2$$

উপরোক্ত উপপাদ্যসমূহ হইতে আমরা বলিতে পারি যে যদি দুইটি অপেক্ষক কোন বিন্দুতে সন্তত হয়, তবে উহাদের যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ করিয়া যে সকল অপেক্ষক পাওয়া যায়, তাহারাও ঐ বিন্দুতে সন্তত হইবে (ভাগের ক্ষেত্রে $x=a$ বিন্দুতে হরের মান শূন্য হইবে না)। কারণ,

মনে কর $f(x)$ এবং $g(x)$, $x=a$ বিন্দুতে সন্তত। সুতরাং

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a), \text{ এবং } \lim_{x\to a} g(x)=g(a)\text{।}$$

অতএব, $\lim\limits_{x\to a} \{f(x)\pm g(x)\}=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$, (কারণ সীমাস্থ মানদ্বয়ের অস্তিত্ব আছে।)

$=f(a)\pm g(a)$

$$\lim_{x\to a} \{f(x).\, g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x).\, \lim_{x\to a} g(x)=f(a).g(a)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}, \text{ যদি } g(a)\neq 0 \text{ হয়।}$$

উপরোক্ত উপপাদ্যগুলির সাহায্যে বিভিন্ন অপেক্ষকের সীমা নির্ণয় করা হইল।

উদা 3. $\lim\limits_{x\to 2\cdot 2} 5x=5\lim\limits_{x\to 2\cdot 2} x$ (উপপাদ্য (1)-এর সাহায্যে)

$=5\times 2\cdot 2=11$

উদা. 4. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x-5)=\lim\limits_{x\to 2} x^2-\lim\limits_{x\to 2} 4x-\lim\limits_{x\to 2} 5$

[(2) এবং (3)-এর সাহায্যে]

$=\lim\limits_{x\to 2} x.\, \lim\limits_{x\to 2} x-4\lim\limits_{x\to 2} x-\lim\limits_{x\to 2} 5$ [(3) এবং (1)-এর সাহায্যে]

$=2.2-4.2-5=4-8-5=-9.$

উদা. 5. দেখাও যে $\lim\limits_{x\to a} x^n=a^n$, (যখন n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)

$\lim\limits_{x\to a} x^n=\lim\limits_{x\to a}$ ($x.x.x\cdots\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত)

$=\lim\limits_{x\to a} x.\, \lim\limits_{x\to a} x.\, \lim\limits_{x\to a} x\cdots\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত [দ্রষ্টব্য (2) অনুযায়ী]

$=a.a.a.\cdots\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$=a^n.$

[উপরোক্ত সীমাটি n-এর যে কোন মানের জন্য সত্য]।

উদা. 6. যদি $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$, একটি বহুপদ রাশিমালা হয়, তবে দেখাও যে

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)$$

$$=\lim_{x\to a} a_0x^n+\lim_{x\to a} a_1x^{n-1}+\cdots+\lim_{x\to a} a_{n-1}x+\lim_{x\to a} a_n$$

[উপপাদ্য (2) এবং দ্রষ্টব্য (2) অনুযায়ী।]

$$=a_0\lim_{x\to a} x^n+a_1\lim_{x\to a} x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lim_{x\to a} x+a_n$$

$$=a_0a^n+a_1a^{n-1}+\cdots+a_{n-1}a+a_n$$

$$=f(a).$$

[দ্রষ্টব্য : উপরোক্ত উদাহরণ হইতে বলা যায় যে, যে কোন বহুপদ রাশি, x-এর সকল মানের জন্যই সন্তত, অতএব কোন বিন্দুতে সীমাস্থ মান, ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকের মানের সমান। যেমন,

$$\lim_{x\to 3}(x^4-3x^2+4)=3^4-3.3^2+4=81-27+4=58]$$

উদা. 7. $$\lim_{x\to 4} x^{-3}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{x^3}=\frac{\lim_{x\to 4} 1}{\lim_{x\to 4} x^3}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}.$$

উদা. 8. $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x+4}{x^2+x+1}=\frac{\lim_{x\to -1}(x^2-3x+4)}{\lim_{x\to -1}(x^2+x+1)}$$

[উপপাদ্য (4) অনুযায়ী]

$$=\frac{(-1)^2-3(-1)+4}{(-1)^2+(-1)+1}$$ (উদা. 6 অনুযায়ী)

$$=\frac{1+3+4}{1-1+1}=8$$

উদা. 9. $$\lim_{x\to 1}\sin(x^2+2x-3)$$

$$=\sin\left\{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-3)\right\}.$$

[উপপাদ্য (5) অনুযায়ী, যেহেতু $\sin x$ সন্তত অপেক্ষক]

$$=\sin(1^2+2.1-3)=\sin 0=0.$$

উদা. 10. $\lim_{x\to 1} 2^{x^2-4x+1} = 2^{\lim_{x\to 1}(x^2-4x+1)}$ (2^x সন্তত বলিয়া)

$$=2^{1^2-4.1+1}=2^{-2}=\tfrac{1}{4}.$$

উদা. 11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

[এখানে উপপাদ্য (4) প্রয়োগ করা যাইবে না, কারণ হরের সীমাস্থ মান=0]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1)=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{2}}+\lim_{x\to 0} 1$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to 0}(1+x)}+1=\sqrt{1+0}+1=1+1=2.$$

উদা. 12. নিম্নলিখিত সীমাসমূহ (সম্ভব হইলে) নির্ণয় কর।

(i) $\mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}{x}$

(ii) $\mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$ (iii) $\mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0} \dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$

(i) $\mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}{x}$

$$=\mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0}\frac{\{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}\}\{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}\}}{\{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}\}x}$$

$$=\mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{\{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}\}x}$$

$$=\mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0}\frac{2x}{\{\sqrt{(1+x)}+(1-x)\}x}=\mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}$$

$$=\mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0}\frac{2}{\{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}\}}=\frac{2}{2}=1.$$

(ii) $\mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$

$$=\mathop{\mathrm{Lt}}_{x\to 0}\frac{\{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\}\{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}\}}{\{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\}x}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{(1+2x)-(1-3x)}{\{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\}x}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{5x}{\{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\}x}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{5}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}} = \frac{5}{\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\}}$$

$$= \tfrac{5}{2}.$$

(iii) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{(a+\sqrt{a^2-x^2})(a-\sqrt{a^2-x^2})}{(a+\sqrt{a^2-x^2}).x^2}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{a^2-(a^2-x^2)}{(a+\sqrt{a^2-x^2})x^2} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{x^2}{(a+\sqrt{a^2-x^2})x^2}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\underset{x\to 0}{\text{Lt}}(a+\sqrt{a^2-x^2})} = \frac{1}{2a}.$$

উদা. 13. $\lim\limits_{h\to 1} \dfrac{h^4-1}{h-1} = \lim\limits_{h\to 1} \dfrac{(h^2+1)(h+1)(h-1)}{(h-1)}$

$= \lim\limits_{h\to 1} \{(h^2+1)(h+1)\}$ [$\because$ $h\to 1$, আমরা ধরিতে পারি $h\neq 1$ বা, $h-1\neq 0$]

$= \lim\limits_{h\to 1}(h^2+1). \lim\limits_{h\to 1}(h+1)$

$= 2.2 = 4.$

প্রশ্নমালা 3(D)

1. নিম্নের সীমাস্থ মানগুলি নির্ণয় কর :

(i) $\lim\limits_{x\to -1} 3x$ (ii) $\lim\limits_{y\to 2}(2y+5)$ (iii) $\lim\limits_{x\to 1}(100x^2+10x+10)$

(iv) $\lim\limits_{x\to 4} x^3$ (v) $\lim\limits_{x\to -2} x^{-3}$ (vi) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2}$ (vii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

(viii) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)^2$ (ix) $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x^2-x)$

(x) $\lim\limits_{x\to 0} e^{x^2+4x+2}$ (xi) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-3x+4}{x^2+4x-8}$

(xii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^{-1}+1}$

2. প্রমাণ কর যে,

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{x-1}=6$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x-1}}=-4$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=e.$

§ 8·7. **কতকগুলি প্রয়োজনীয় সীমা** (Some important limits) :

পূর্বে দেখান হইয়াছে যে কোন বিন্দুতে একটি অপেক্ষক সন্তত হইলে উহার ঐ বিন্দুতে সীমাস্থ মান, অপেক্ষকটির ঐ বিন্দুতে মানের সমান হইবে। যে সকল বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান অনির্ণেয় (অর্থাৎ মানটি $\frac{0}{0}$ আকারের), সেই সকল বিন্দুতেই সীমাস্থ মান নির্ণয় করা গুরুত্বপূর্ণ। নিম্নে কয়েকটি অপেক্ষকের এইরূপ বিন্দুতে সীমাস্থ মান দেওয়া হইল।

(i) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$, যেখানে n যে কোন একটি ধ্রুবক

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$, যেখানে x-এর মান রেডিয়ানে দেওয়া আছে

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}=1$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x}=1.$

[**দ্রষ্টব্য :** (1) উপরোক্ত সীমাস্থ মানগুলির প্রমাণ সহজেই স্বজ্ঞাতভাবে দেওয়া যায় (বস্তুতঃ (ii)-এর প্রমাণ পূর্বের অধ্যায়ে দেওয়া হইয়াছে)। ইহাদের যথাযথ গাণিতিক প্রমাণ পাঠ্য বিষয় বহির্ভূত।

(2) সীমাস্থ মানসমূহে x-এর স্থলে অন্য কোন চল লইলেও সত্য হইবে। যেমন, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h}=1$, বা, $\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{e^k-1}{k}=1.$

$\lim\limits_{y\to a} \dfrac{y^n-a^n}{y-a}=na^{n-1}$ ইত্যাদি

(3) সীমাস্থ মান (i)-এ $x-a=h$ বসাইয়া পাই, $\lim_{x\to a}(x-a)=0$ বা, $\lim_{x\to a} h=0$, অর্থাৎ যখন $x\to a$, তখন $h\to 0$ হইবে। $\therefore$ (i)-কে নিম্নলিখিত ভাবে লেখা যায়,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}=na^{n-1}.$$

বস্তুতঃ যে কোন সীমাস্থ মান $\lim_{x\to a} f(x)$-কে, $x-a=h$ বসাইয়া, $\lim_{h\to 0} f(a+h)$ আকারে প্রকাশ করা যায়,

অর্থাৎ $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a+h)$.]

উপরোক্ত সীমাস্থ মানসমূহের প্রয়োগ করিয়া নিম্নে বিভিন্ন সীমা নির্ণয় করা হইল।

উদা. 1. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^8-2^8}{x-2}=8.2^7=8\times128=1024$ [(i) প্রয়োগ করিয়া।]

উদা. 2. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\dfrac{(x^3-27)/(x-3)}{(x^2-9)/(x-3)}$

[$\because$ $x\to 3$, $\therefore$ $x-3\neq 0$]

$$=\frac{\lim_{x\to 3}\dfrac{(x^3-27)}{(x-3)}}{\lim_{x\to 3}\dfrac{(x^2-9)}{(x-3)}}=\frac{\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-3^3}{x-3}}{\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-3^2}{x-3}}=\frac{3.3^2}{2.3}=\frac{9}{2}.$$

উদা. 3. $\lim_{x\to a}\dfrac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{8}}-a^{\frac{3}{8}}}=\lim_{x\to a}\dfrac{\dfrac{(x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}})}{(x-a)}}{\dfrac{(x^{\frac{3}{8}}-a^{\frac{3}{8}})}{(x-a)}}$ [$\because$ $x-a\neq 0$]

$$=\frac{\lim_{x\to a}\dfrac{(x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}})}{(x-a)}}{\lim_{x\to a}\dfrac{(x^{\frac{3}{8}}-a^{\frac{3}{8}})}{(x-a)}}.$$ [$\because$ লব এবং হরের সীমাস্থ মান আছে, এবং হরের সীমা $\neq 0$]

$$=\frac{\frac{5}{2}.a^{\frac{5}{2}-1}}{\frac{3}{8}.a^{\frac{3}{8}-1}}=\frac{5}{2}\times\frac{8}{3}.\ a^{\frac{5}{2}-\frac{3}{8}}=\frac{20}{3}a^{\frac{17}{8}}$$

উদা. 4. $\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^n-1}{h}=\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$, ($1+h=x$ বসাইলে যখন $h\to 0$, $x\to 1$)

$=n.1^{n-1}=n.$

উদা. 5. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$

[সীমা সম্বন্ধীয় উপপাদ্যের সাহায্যে]

$=1.\frac{1}{\lim_{x\to 0}\cos x}=1.\frac{1}{1}=1.$

উদা. 6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}3.\frac{\sin 3x}{3x}=3.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$

$=3.\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$, [$3x=h$ বসাইলে, যখন $x\to 0$, $h\to 0$ হইবে।]

$=3.1=3.$

উদা. 7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\frac{\sin \beta x}{\beta x}}\cdot\frac{\alpha x}{\beta x}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\frac{\sin \beta x}{\beta x}}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right\}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin \beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}.$

উদা. 8. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{\frac{h}{2}}\right)^2$ [$h=2x$ বসাইয়া পাই, যখন $x\to 0$, তখন $h\to 0$]

$=4\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2=4\left\{\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right\}^2=4.1^2=4.$

উদা. 9. $\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 2h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2 h}{h^2}$

$=2\lim_{h\to 0}\left\{\left(\frac{\sin h}{h}\right).\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right\}$

$=2.\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=2.1.1=2.$

উদা. 10. $\lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \left\{\frac{e^{h^2}-1}{h^2} \cdot \frac{h^2}{h}\right\}$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{\frac{e^{h^2}-1}{h^2} \cdot h\right\} = \lim_{h^2\to 0} \frac{e^{h^2}-1}{h^2} \cdot \lim_{h\to 0} h$$

[∵ যখন $h\to 0$, তখন $h^2\to 0$] $=1.0=0$

উদা. 11. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \left\{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right\}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= \left\{\lim_{h\to 0} \frac{e^{h}-1}{h}\right\} \cdot 1,$$ [$\sin x = h$ ধরিয়া পাই, যখন $x\to 0$; তখন $h\to 0$.

$=1.1=1.$

উদা. 12. $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2 \sin x}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1} = \frac{1}{2}.$$

দা. 13. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)}{3x} \cdot 3$

$$= 3 \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y},$$ [যেখানে $y=3x\to 0$ যখন $x\to 0$]

$=3.1=3.$

উদা. 14. $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\log (1+x)^{\frac{1}{x}}}$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}},$$ [§ 3·6-এর (6)-এর সাহায্যে, যেহেতু e^x সন্তত]

$=e^1=e.$

উদা. 15. $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+ax)}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log(1+ax)}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{a}{b}\right\}$

$=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+ax)}{ax}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}=\frac{a}{b}.1.1=\frac{a}{b}$

উদা. 16. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}e^{\beta x}\cdot\frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{(\alpha-\beta)x}\cdot(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)\lim_{x\to 0}e^{\beta x}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}$, [$y=(\alpha-\beta)x$ ধরিয়া যখন, $x\to 0$, $y\to 0$]

$=(\alpha-\beta).e^0.1=\alpha-\beta.$

প্রশ্নমালা 3 (E)

1. প্রমাণ কর যে,

(i) $\lim_{x\to 5}\frac{x^4-625}{x-5}=500$

(ii) $\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x^2-16}=6$

(iii) $\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{3}{7}}-a^{\frac{3}{7}}}{x^{\frac{2}{5}}-a^{\frac{2}{5}}}=\frac{15}{14}a^{\frac{1}{35}}$

(iv) $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}=\frac{n}{m}a^{n-m}$

(v) $\lim_{x\to a}\frac{x^{-4}-a^{-4}}{x^{-7}-a^{-7}}=\frac{4}{7}a^3$

(vi) $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^{\frac{5}{2}}-2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{x}-2^{\frac{1}{4}}}=10$

(vii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2}$

(viii) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=1$

(ix) $\lim_{h\to 0}(h.\operatorname{cosec} h)=1$

(x) $\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h.\cos h}{h^2}=1$

(xi) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{x}=5$

(xii) $\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}$

(xiii) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan m\theta}{n\theta}=\frac{m}{n}.$

(xiv) $\lim_{h\to 0}\frac{e^{h^3}-1}{h}=0$

(xv) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-1}{x}=1$

(xvi) $\lim_{h\to 0}\frac{e^{2+h}-e^2}{h}=e^2$

(xvii) $\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x.$

(xviii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+ax)}{x} = a$ (xix) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+2x)}{\tan 3x} = \dfrac{2}{3}$

(xx) $\lim\limits_{x \to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^2$.

2. নিম্নলিখিত সীমাস্থ মানসমূহ নির্ণয় কর :

(i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(2x)^4 - 256}{2(x-2)}$ (ii) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

(iii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{\frac{7}{2}} - 1}{x^{\frac{5}{3}} - 1}$ (iv) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2+h)^4 - 16}{h}$

(v) $\lim\limits_{x \to 0} (\tan 3x . \text{cosec } 3x)$ (vi) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\sin 3x}$.

(vii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+\sin x)}{x}$ (viii) $\lim\limits_{x \to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}}$

§ 3·8. প্রতীক চিহ্ন ∞-এর অর্থ (Meaning of the symbol ∞) :

মনে কর, $y = \dfrac{1}{x}$ এবং $x \to 0+$; এখন 0-এর নিকটবর্তী x-এর মান-সমূহের জন্য $\dfrac{1}{x}$-এর মান বাহির করা হইল।

x	1	·1	·01	·00001	10^{-9}
y	1	10	100	100000	10^9

ইত্যাদি।

স্পষ্টতঃ লক্ষ্য করা যাইতেছে যে x-এর মান ডানপক্ষ হইতে যত 0-এর নিকটবর্তী হইতেছে, $\dfrac{1}{x}$-এর মান তত বর্ধিত হইতেছে। প্রকৃতপক্ষে x-এর মানকে 0-এর যথেষ্ট নিকটবর্তী লইয়া y-এর মানকে যে কোন যত ইচ্ছা বৃহৎ ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা বড় করিয়া ফেলা যায়। এইরূপ ক্ষেত্রে আমরা বলি চল-রাশি y-অসীম এর দিকে অগ্রসর হইতেছে এবং ইহাকে $y \to \infty$ এই সংকেত দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অতএব $x \to \infty$-এর অর্থ হইতেছে x এমনভাবে মান পরিবর্তন করিতেছে যে, শেষ পর্যন্ত x-এর মান যে-কোন পূর্বকল্পিত যত ইচ্ছা বৃহৎ রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। অর্থাৎ x-এর মান সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পাইবে।

এখন যদি $f(x)$, x-এর একটি অপেক্ষক হয়, এবং যখন $x\to\infty$ তখন যদি $f(x)\to l$ হয়, তবে আমরা বলি যখন $x\to\infty$ তখন $f(x)$-এর সীমান্ত মান l এবং ইহাকে $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ এই প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ: দেখাও যে, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

x-এর ক্রমবর্ধমান মানসমূহের জন্য $\frac{1}{x}$-এর মানসমূহ নিম্নে তালিকাবদ্ধ করা হইল।

x	10	100	500	10^5	10^9
$\frac{1}{x}$	·1	·01	·002	·00001	10^{-9}

ইত্যাদি।

স্পষ্টতঃ দেখা যাইতেছে যে x-এর মান যত বৃদ্ধি পাইতেছে $\frac{1}{x}$-এর মান তত 0-এর দিকে অগ্রসর হইতেছে।

সুতরাং $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. এখানে লক্ষণীয় যে x-এর কোন মানের জন্যই $\frac{1}{x}$-এর মান শূন্য হইবে না, এইরূপে $\frac{1}{x}$-এর মানকে শূন্যের যথেষ্ট নিকটবর্তী করা সম্ভব।

উপরোক্ত উদাহরণ হইতে আমরা দেখিতে পাইতেছি যে,

যদি $y=\frac{1}{x}$ ধরা হয় তবে যখন $x\to\infty$, তখন $y\to0+$ হইবে। অতএব যে কোন অপেক্ষক $f(x)$-এর জন্য আমরা পাই,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{y\to0+} f\left(\frac{1}{y}\right);\quad [x\text{-এর স্থলে } \tfrac{1}{y} \text{ বসাইয়া}]$$

এখন ডান পক্ষের সীমা পূর্বে বর্ণিত পদ্ধতিতে সহজেই নির্ণয় করা যাইবে। এই সূত্রের সাহায্যে $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$-এর মান নির্ণয় করা হয়।

[**দ্রষ্টব্য:** (1) ∞ কোন সংখ্যা নহে; $x\to\infty$ একটি প্রতীক যাহা চল রাশির একটি বিশেষ ধরণের মান পরিবর্তনের উপায় বুঝায়।

(2) $x\to-\infty$-এর অর্থ হইতেছে, x সীমাহীনভাবে ছোট হইয়া যাইতেছে, অর্থাৎ x যে কোন ঋণাত্মক সংখ্যা (যাহার পরম মান যত ইচ্ছা বৃহৎ হউক না কেন) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইয়া যাইতেছে।

দেখান যায় $\lim\limits_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty$.

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ হইলে আমরা বলি যখন $x \to a$, তখন $f(x)$-এর সীমান্ত মান নাই।]

উদা. 1. দেখাও যে $\lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^2} = 0$.

মনে কর $y = \frac{1}{x}$; $\therefore$ যখন $x \to \infty$, তখন $y \to 0+$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমা $= \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{y \to 0+} 3y^2 = 3.0^2 = 0$.

উদা. 2. $\lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x^3}\right) = 2$.

$$\lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{y \to 0+} (2 + y^3) = 2 + \lim_{y \to 0+} y^3 = 2 + 0 = 2.$$

উদা. 3. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{x^2 - 3x + 1} = \lim_{y \to 0+} \frac{\frac{3}{y^2} - \frac{4}{y} + 5}{\frac{3}{y^2} - \frac{3}{y} + 1}$ $\left(x = \frac{1}{y}\text{ বসাইয়া}\right)$

$$= \lim_{y \to 0+} \frac{3 - 4y + 5y^2}{1 - 3y + y^2} = \frac{3 - 4.0 + 5.0^2}{1 - 3.0 + 0^2} = \frac{3}{1} = 3.$$

উদা. 4. $\lim_{x \to \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + x^2}{x^3}$, যেখানে x একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

প্রদত্ত সীমা $= \lim_{x \to \infty} \frac{x(x+1)(2x+1)}{6x^3}$

$$= \lim_{y \to 0+} \frac{\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y} + 1\right)\left(\frac{2}{y} + 1\right)}{6 . \frac{1}{y^3}}, \quad x = \frac{1}{y} \text{ বসাইয়া}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{(1+y)(2+y)}{6} = \frac{(1+0)(2+0)}{6} = \frac{1}{3}.$$

উদা. 5. $\lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to 0} e^y = e^0 = 1.$

উদা. 6. $\lim_{x \to \infty} \frac{1 + 2 + 3 \quad + x}{x}$, যখন x একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x(x+1)}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{2} = \infty$$

$\therefore$ এইক্ষেত্রে সীমান্ত মান নাই।

প্রশ্নমালা 3(F)

1. নিম্নলিখিত সীমাস্থ মানসমূহ নির্ণয় কর :

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$ (ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2+1}{x^3+2x^2+x}$

(iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+1}$ (iv) $\lim_{x\to\infty} \left(2-\frac{3}{x^4}\right)$

(v) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2}$ (vi) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^3+1}$.

2. দেখাও যে :

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{1+2+\cdots+x}{x^2}=\frac{1}{2}$, যখন x একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

(ii) $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}}=1$ (iii) $\lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{x^2+2x+1}{x^3+x^2+1}\right)=1$.

3. দেখাও যে নিম্নলিখিত সীমাস্থ মানসমূহ অনির্ণেয় ।

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{2x+3}$ (ii) $\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x}$.

(iii) $\lim_{x\to\infty} e^{x^2+1}$ (iv) $\lim_{x\to\infty} x^2.\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)$

উদাহরণমালা 3

উদা. 1. $\lim_{h\to-2}\left(3h^4-e^h+\sin(h+2)+2+\frac{4}{h^2}\right)$

$$=\lim_{h\to-2} 3h^4-\lim_{h\to-2} e^h+\lim_{h\to-2} \sin(h+2)+\lim_{h\to-2} 2+\lim_{h\to-2} \frac{4}{h^2}$$

$$=3(-2)^4-e^{-2}+\sin(-2+2)+2+\frac{4}{(-2)^2}$$

$$=3.16-\frac{1}{e^2}+\sin 0+2+\frac{4}{4}=51-\frac{1}{e^2}$$

উদা. 2. $\lim_{x\to0} \frac{\sin x^0}{x}=\lim_{x\to0} \frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{x}$ [$\because$ π রেডিয়ান $=180°$ $\therefore$ $x^0=\frac{\pi x}{180}$ রেডিয়ান]

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{\frac{180}{\pi} y} \quad \left[\frac{\pi x}{180} = y \text{ বসাইয়া } \right]$$

$$= \frac{\pi}{180} \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{\pi}{180} . 1 = \frac{\pi}{180}.$$

উদা. 3. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin ax}{ax} . \frac{bx}{\sin bx} . \frac{1}{\cos ax} . \frac{a}{b} \right).$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} . \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin bx}{bx}} . \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos ax}$$

$$= \frac{a}{b} . 1 . \frac{1}{1} . \frac{1}{1} = \frac{a}{b}.$$

উদা. 4. $\lim_{x \to a} \frac{\sin (x-a)}{x-a} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y}$ [$x - a = y$ বসাইয়া পাই যখন $x \to a$, তখন $y \to 0$]

$= 1.$

উদা. 5. $\lim_{x \to 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \quad + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n)}{\lim_{x \to 0} (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m)}$$

$$= \frac{a_0 . 0 + a_1 . 0 + \cdots + a_{n-1} . 0 + a_n}{b_0 . 0 + b_1 . 0 + \cdot + b_{m-1} . 0 + b_m}$$

$= \frac{a_n}{b_m}$, ($b_m \neq 0$ ধরিয়া).

উদা. 6. $\lim_{x \to \infty} \left\{ \sqrt{x^4 - x^2 + 2} - x^2 \right\}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^4 - x^2 + 2} - x^2)(\sqrt{x^4 - x^2 + 2} + x^2)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 2} + x^2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - x^2 + 2 - x^4}{x^2 \left\{ \sqrt{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}} + 1 \right\}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-1 + \frac{2}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}} + 1}$$

$= \lim_{y \to 0} \frac{-1 + 2y^2}{\sqrt{1 - y^2 + 2y^4} + 1}$ [$y = \frac{1}{x}$ বসাইয়া]

$$= \frac{-1}{\sqrt{1} + 1} = -\frac{1}{2}.$$

|. 7. দেখাও যে, $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{x(x+1)}\right\}=1.$

$\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \ldots\ldots, \frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$

$$\therefore \quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{x(x+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=1-\frac{1}{x+1}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{x(x+1)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{1-\frac{1}{x+1}\right\}=\lim_{h\to 0}\left\{1-\frac{h}{1+h}\right\} \quad \left[h=\frac{1}{x} \text{ বসাইয়া}\right]$$

$=1.$

উদা. 8. দেখাও যে, $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x.$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$\left[\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}.\sin\frac{C-D}{2}\right.$ সূত্র প্রয়োগ করিয়া $\Big]$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$=\left\{\lim_{k\to 0}\frac{\sin k}{k}\right\}.\cos x,$ $\left[k=\frac{h}{2}\right.$ বসাইয়া$\Big]$ $=1.\cos x=\cos x.$

উদা. 9. $\lim_{\theta\to 0}\tan 4\theta.\operatorname{cosec} 2\theta=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 4\theta}{\cos 4\theta.\sin 2\theta}$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin 2\theta.\cos 2\theta}{\cos 4\theta.\sin 2\theta}=2\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos 2\theta}{\cos 4\theta}=2.\tfrac{1}{1}=2.$$

উদা. 10. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\pi}{4}-x}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\frac{\pi}{4}-x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}{y}$$

$\left[y=\frac{\pi}{4}-x \text{ বসাইয়া}\right]$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos y-\sin y\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos y+\sin y\right)}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\sqrt{2}\sin y}{y} = -\sqrt{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}$$

$$= -\sqrt{2}.1 = -\sqrt{2}.$$

উদা. 11. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^4}-\sqrt{1+x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সীমা $= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{(\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x}} \times \frac{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1+x}}{(\sqrt{1+x^4}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1+x})}\right\}$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1+x^3-1-x}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x}}.\frac{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1+x}}{1+x^4-1-x}\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x}}.\frac{x(x^2-1)}{x(x^3-1)}\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1+x})(x+1)}{(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x})(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1+x}\right)\left(x+1\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1+x}\right)\left(x^2+x+1\right)}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0})(0+1)}{(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0})(0+0+1)} = \frac{2.1}{2.1} = 1.$$

উদা 12. $\lim_{x\to 0} \frac{x(\cos 2x-\cos 3x)}{\sin^3 x}$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সীমা $= \lim_{x\to 0} \frac{x.\ 2\sin\frac{5x}{2}.\sin\frac{x}{2}}{\sin^3 x}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\cdot\frac{\frac{5x}{2}}{\sin x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{x}{2}}{\sin x}\cdot2\right.$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin}{\frac{x}{2}}\cdot$$

$$=\frac{5}{2}\cdot1.\ 1.\ 1=\frac{5}{2}.$$

উদা. 13. $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ এর মান নির্ণয় কর যখন $f(x)=\frac{1}{x}.$

$$f(1+h)=\frac{1}{1+h},\quad f(1)=\frac{1}{1}=1.$$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-(1+h)}{h(1+h)}$$

$$=-\lim_{h\to0}\frac{1}{1+h}=-\frac{1}{\lim\limits_{h\to0}(1+h)}=-\frac{1}{1+0}=-1.$$

উদা. 14. $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ এর মান নির্ণয় কর যখন

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x-1}+3.$$

$$f(h)=h^2+\frac{1}{h-1}+3,\ f(0)=\frac{1}{-1}+3=2$$

$$\therefore\ \text{নির্ণেয় সীমা}=\lim_{h\to0}\frac{h^2+\frac{1}{h-1}+3-2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2+\frac{1}{h-1}+1}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{h+\frac{1+(h-1)}{h(h-1)}\right\}=\lim_{h\to0}h+\lim_{h\to0}\frac{1}{h-1}$$

$$=0-1=-1$$

উদা. 15. দেখাও যে, (i) $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\log a$

(ii) $\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}=\log\frac{a}{b}.$

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\log a}-1}{x\log a}.\log a$

$=\log a\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^y-1}{y}$, [$y=x\log a$ ধরিয়া]

$=\log a.1=\log a$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}b^x.\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}b^x.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-1}{x}=b^0.\log\frac{a}{b}=\log\frac{a}{b}.$

উদা. 16. যদি $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$f(x)=1$, যখন $|x|<1$

$=\frac{1}{2}$, যখন $|x|=1$

$=0$, যখন $|x|>1$.

যখন $|x|<1$, $x^2<1$. $\because$ x^2 একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ, x^2-এর বর্গ, ঘন ইত্যাদি ক্রমবর্ধমান ঘাতসমূহের মান ক্রমশঃ ক্ষুদ্রতর হইবে এবং শূন্যের দিকে অগ্রসর হইবে।

$\therefore\quad (x^2)^n=x^{2n}\to 0$ যখন $n\to\infty$.

$\therefore\quad f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}=\dfrac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}}=\dfrac{1}{1+0}=1$

যখন $|x|=1$, $x^2=1$ $\therefore$ $x^{2n}=1$.

$\therefore\quad f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}.$

যখন $|x|>1$, $x^2>1$. $\therefore$ x^2-এর ক্রমবর্ধমান ঘাতসমূহের মান ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইবে। $\therefore$ $x^{2n}=(x^2)^n\to\infty$ যখন $n\to\infty$

$\therefore\quad f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\dfrac{0}{1+0}=0.$

উদা. 17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\log(1+x)}{\log(1+\sin x)}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\log(1+x)}{\log(1+\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\log(1+x)}{\log(1+x)} \cdot \frac{\log(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\log(1+\sin x)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{z\to 0} \frac{z}{\log(1+z)}$$

$= 1 . 1 . \frac{1}{1} . \frac{1}{1} = 1.$ [$y = \log(1+x)$ এবং $z = \sin x$ ধরিয়া]

প্রশ্নমালা 3

1. নিম্নলিখিত সীমাসমূহ নির্ণয় কর :—

(i) $\lim\limits_{x\to 1} (2x^2+x+1)$ (ii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} x \sin x$

(iii) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 - xe^x)$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2+4)(x^2-1)(2x+1)$

(v) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$ (vi) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}$

(vii) $\lim\limits_{h\to 2} \left(2h^2 - 3h + 4 + \dfrac{5}{h} + \dfrac{6}{h^2}\right)$ (viii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$.

2. সীমা বাহির কর :—

(i) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4h^2+h}{h}$ (ii) $\lim\limits_{u\to 4} \dfrac{u^2-4u}{u-4}$

(iii) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{2-6x}{1-3x}$ (iv) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4h^5 - 6h^4 + 3h^3 + h^2}{6h^6 - 3h^3 + 2h^2}$

(v) $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z^2-8z+7}{7z^2-6z-1}$ (vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

(vii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{\sqrt[3]{h+1}-1}$ (viii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h^2}-\sqrt{1+h}}{\sqrt{1+h^4}-\sqrt{1+h}}$

(ix) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

3. প্রমাণ কর যে :—

(i) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\tan\theta}{\theta}=1$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan\alpha x}{x}=\alpha$

(iii) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\tan\theta^{\circ}}{\theta}=\dfrac{\pi}{180^{\circ}}$ (iv) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\tan x}{1-\cot x}=-1.$

4. সীমা নির্ণয় কর :—

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{6x^2}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx}{\tan nx}$

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ (vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

(vii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ (viii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 2x}{\frac{\pi}{2}-x}$

(ix) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\frac{\pi}{4}-x}$ (x) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x\sin a-a\sin x}{x-a}$

(xi) $\lim\limits_{x\to 0} \tan 4x\cot 3x$ (xii) $\lim\limits_{x\to 0} \tan\alpha x\cot\beta x$

(xiii) $\lim\limits_{x\to 0} \tan 2\alpha x\operatorname{cosec}\alpha x$ (xiv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$

(xv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos^3 x}{\tan^2 x}$ (xvi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin^{-1}x)^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$

5. সীমা নির্ণয় কর :—

(i) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{-4}-a^{-4}}{x^{-5}-a^{-5}}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{\frac{2}{7}}-1}{x^{\frac{3}{2}}-1}$

(iii) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^3+8}$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{x^2}$

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-1}{5x+2x^2}$ (vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-5x}}{9x}$

(vii) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{4x^2-1}.$

6. দেখাও যে :—

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{mx}-1}{x}=m$ (ii) $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^{(x+h)^2}-e^{x^2}}{h}=2x.\,e^{x^2}$

(iii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{a.e^{x}+b.e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=a$ (iv) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{ae^{x}+be^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=b$

(v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a.e^{x}+b.e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\dfrac{a+b}{2}$

(vi) $\lim_{x\to\infty} \{\sqrt{x^2-x+1}-x\}=-\frac{1}{2}$

(vii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=1$

(viii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=0$

(ix) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}-2x^2-1}{x^2}=-2$

(x) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^4+1}-2x^2-1}{x^2}=-1$

(xi) $\lim_{x\to 0} \dfrac{ax^2+bx+c}{cx^2+dx+a}=\dfrac{c}{a}$

(xii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+bx+c}{cx^2+dx+a}=\dfrac{a}{c}$

(xiii) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(xiv) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin 2h-2\sin h}{h^3}=-1$

(xv) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x+\sin 2\alpha x}{\sin \alpha x-\sin \beta x}=\dfrac{4\alpha}{\alpha-\beta}$

(xvi) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n^2}=\dfrac{1}{2}$

(xvii) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2$

(xviii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\left(\frac{3}{n}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right\}=\frac{1}{4}$

(xix) $\lim_{n\to\infty} \frac{1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots+n(n+1)}{n^3}=\frac{1}{3}$.

(xx) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

7. দেখাও যে,

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_{m-1}x+b_m}$

$=\infty$, যদি $n>m$ হয়

$=\frac{a_0}{b_0}$, যদি $n=m$ হয়

$=0$, যদি $n<m$ হয়।

8. প্রমাণ কর :

(i) $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\sin x$

(ii) $\lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\sec^2 x$

(iii) $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{cosec}(x+h)-\operatorname{cosec} x}{h}=-\operatorname{cosec} x.\cot x.$

9. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ এর মান বাহির কর যখন

(i) $f(x)=x^2$ (ii) $f(x)=\cot x+2x+4$

(iii) $f(x)=\sec x$ (iv) $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

10. নিম্নলিখিত সীমাগুলি বাহির কর :

(i) $\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$, যখন $f(x)=\frac{1}{x}$

(ii) $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$, যখন $f(x)=e^x$

(iii) $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ যখন $f(x)=\frac{1}{x+1}+2x$.

11. যদি $f(x)=2x+1$, যখন $x<1$

$=3$ যখন $x=1$

$=2x-1$, যখন $1<x<2$

$=3$ যখন $x=2$

$=x+1$ যখন $x>2$, হয়,

তবে $\lim_{x\to 1} f(x)$ এবং $\lim_{x\to 2} f(x)$ এর মান বাহির কর।

12. প্রমাণ কর $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n\sin^2\pi x}\right)=0$, যখন x পূর্ণ সংখ্যা নয়

$=1$, যখন x একটি পূর্ণ সংখ্যা

13. যদি $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n g(x)+h(x)}{x^n+1}$ হয়, তবে দেখাও যে

$f(x)=h(x)$, যখন $0<x<1$.

$=\frac{1}{2}\{g(x)+h(x)\}$, যখন $x=1$

$=g(x)$, যখন $x>1$

14. দেখাও যে,

(i) $\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=1$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{\log(1+x)}=2$

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}=\log\frac{3}{2}$ (iv) $\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right]=\frac{1}{4}$

(v) $\lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e}=\frac{1}{e}$ (vi) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{\sin x}=\log\frac{a}{b}$

(vii) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan\log(1+x)}{x}=1$

(viii) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan\log(1+x)}{\log(1+\sin x)}=1$

(ix) $\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{2}$.

চতুর্থ অধ্যায়

অপেক্ষকের অন্তরকলজ

(Deiivative of a function)

§ 4·1. বৃদ্ধি বা ইন্‌ক্রিমেণ্ট (increment) :

যদি একটি চল রাশির মান x হইতে x'-এ পরিবর্তিত হয়, তবে $(x'-x)$-কে x-এর বৃদ্ধি বলা হয়। x-এর বৃদ্ধিকে সাধারণতঃ Δx-প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। সুতরাং x-এর মান x হইতে x'-এ পরিবর্তিত হইলে, x-এর বৃদ্ধি হইবে $\Delta x = x' - x$.

উদাহরণস্বরূপ,

(i) x-এর মান 2 হইতে 2·4-এ পরিবর্তিত হইলে, x-এর বৃদ্ধি হইবে $\Delta x = 2{\cdot}4 - 2 = {\cdot}4$.

(ii) x-এর মান 3 হইতে 2·1 এ পরিবর্তিত হইলে, x-এর বৃদ্ধি হইবে $\Delta x = 2{\cdot}1 - 3 = -{\cdot}9$.

[**দ্রষ্টব্য :** (i) x-এর বৃদ্ধি Δx হইলে, xএর পরিবর্তিত মান হইবে $x' = x + \Delta x$.

(ii) Δx, Δ এবং x-এর গুণফল নহে। অর্থাৎ $\Delta x \neq \Delta \times x$. Δx প্রতীকটি একটি সংখ্যাকেই সূচিত করিতেছে।

(iii) Δx-এর ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন মান হওয়া সম্ভব।

(iv) লিখিবার সুবিধার জন্য অনেক সময় বৃদ্ধি Δxকে h দ্বারা সূচিত করা হয়।

(v) চলরাশি x-এর বৃদ্ধিকে এইরূপ ভাবে লেখা যায়, বৃদ্ধি = পরিবর্তিত মান − প্রাথমিক মান (increment = final value − initial value)]

এইবার মনে করা যাক, x-এর একটি অপেক্ষক y. মনে কর $y = f(x)$. x-এর মান পরিবর্তিত হইলে y-এর মানও পরিবর্তিত হইবে। যদি x-এর বৃদ্ধি Δx হয়, তবে y-এর বৃদ্ধি Δy কত হইবে তাহা নির্ণয় করা যাক্।

x-এর মান পরিবর্তিত হইয়া $x + \Delta x$ হইলে y-এর পরিবর্তিত মান হইবে $f(x + \Delta x)$।

এখন, যেহেতু y-এর বৃদ্ধি $= y$-এর পরিবর্তিত মান − y-এর প্রাথমিক মান,

$\therefore \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, বা, $\Delta y + f(x) = f(x + \Delta x)$।

আবার, যেহেতু $y=f(x)$, অতএব $y+\Delta y$-এর মান হইবে $y+\Delta y=f(x)+\Delta y=f(x+\Delta x)$। সুতরাং $f(x)$ অপেক্ষকের x-এর স্থলে $x+\Delta x$ বসাইয়া আমরা $y+\Delta y$-এর মান বাহির করিতে পারি, এবং এই মান হইতে y-এর মান বিয়োগ করিয়া Δy-এর মান বাহির করা যাইবে। নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে ইহা বুঝান হইতেছে।

(i) মনে কর $y=f(x)=x^2$.

$$\therefore \quad y+\Delta y=f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2=x^2+2x.\Delta x+(\Delta x)^2$$

$$\therefore \quad \Delta y=(y+\Delta y)-y=x^2+2x.\Delta x+(\Delta x)^2-x^2$$
$$=\Delta x(2x+\Delta x)$$

(ii) মনে কর $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$\therefore \quad \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}{(\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}$$

$$=-\frac{\Delta x}{\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}$$

(iii) মনে কর, $y=a$, যেখানে a একটি ধ্রুবক।

$$\therefore \quad \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=a-a=0$$

[$y=a$, x-এর সব মানের জন্য]

$f(x)$ সন্তত অপেক্ষক হইলে $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=f(x)$ হইবে।

$$\therefore \quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)-f(x)$$
$$=f(x)-f(x)=0 \text{ হইবে।}$$

অতএব $y=f(x)$, x-এর সন্তত অপেক্ষক হইলে $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ হইবে।

বিপরীতক্রমে দেখান যায় যে $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ হইলে $y=f(x)$, x-এর সন্তত অপেক্ষক।.

x-এর মানের Δx পরিবর্তন হইলে y-এর মানের পরিবর্তনকে Δy দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে। সুতরাং $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ হইল x-এর 1 মান পরিবর্তনের জন্য y-এর মানের পরিবর্তন বা y-এর গড় মান পরিবর্তনের হার (average

rate of change of y)। এই গড় পরিবর্তনের হার সম্বন্ধে পরবর্তী অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হইবে।

উদা. 1. x-এর মান 2 হইতে 2·1-এ পরিবর্তিত হইলে $y=\frac{1}{x}$-এর মানের পরিবর্তন কত হইবে?

এখানে $\Delta x=2{\cdot}1-2={\cdot}1$.

$\therefore$ y-এর মানের পরিবর্তন বা বৃদ্ধি

$$\Delta y=f(2+\Delta x)-f(x)=f(2{\cdot}1)-f(2)$$

$$=\frac{1}{2{\cdot}1}-\frac{1}{2}=\frac{2-2{\cdot}1}{2.2{\cdot}1}=\frac{-{\cdot}1}{4{\cdot}2}=-\frac{1}{42}.$$

উদা. 2. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-এর মান বাহির কর যখন $y=f(x)$ এবং

(i) $f(x)=\frac{x}{x+1}$ (ii) $f(x)=x^2-2x+\tan x$

(iii) $f(x)=x\sin x$.

(i) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{x+\Delta x}{x+\Delta x+1}-\frac{x}{x+1}}{\Delta x}$$

$$=\frac{(x+1)(x+\Delta x)-x(x+\Delta x+1)}{(x+1+\Delta x)(x+1).\Delta x}=\frac{1}{(x+1)(x+\Delta x+1)}.$$

(ii) এখানে $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

$$=(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)+\tan(x+\Delta x)-x^2+2x-\tan x$$

$$=(\Delta x)^2+\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)}-\frac{\sin x}{\cos x}+2\Delta x(x-1)$$

$$=(\Delta x)^2+\frac{\sin\Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cos x}+2\Delta x(x-1)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}.\frac{1}{\cos(x+\Delta x).\cos x}+2(x-1)$$

(iii) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

$$=(x+\Delta x)\sin(x+\Delta x)-x\sin x$$

$$=x\{\sin(x+\Delta x)-\sin x\}+\Delta x.\sin(x+\Delta x)$$

$$=x.2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}+\Delta x.\ \sin(x+\Delta x)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=2x\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}+\sin(x+\Delta x).$$

উদা. 3. যদি u এবং v, উভয়েই x-এর অপেক্ষক হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $\Delta y = c\Delta u$, যখন $y = cu$, যেখানে c = ধ্রুবক

(ii) $\Delta y = \Delta u + \Delta v$, যখন $y = u + v$

(iii) $\Delta y = u.\Delta v + v.\Delta u + \Delta u.\Delta v$, যখন $y = u.v$.

মনে কর, $u = f(x)$ এবং $v = g(x)$

$\therefore \quad \Delta u = f(x+\Delta x) - f(x)$ এবং $\Delta v = g(x+\Delta x) - g(x)$.

(i) যখন $y = cu = cf(x) = \phi(x)$ (মনে কর), তখন

$$\Delta y = \phi(x+\Delta x) - \phi(x) = cf(x+\Delta x) - cf(x)$$
$$= c\{f(x+\Delta x) - f(x)\} = c.\Delta u$$

(ii) যখন $y = u + v = f(x) + g(x) = h(x)$ (মনে কর), তখন

$$\Delta y = h(x+\Delta x) - h(x) = f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - \{f(x) + g(x)\}$$
$$= \{f(x+\Delta x) - f(x)\} + \{g(x+\Delta x) - g(x)\} = \Delta u + \Delta v.$$

(iii) যখন $y = u.v = f(x).g(x) = k(x)$ (মনে কর), তখন

$$\Delta y = k(x+\Delta x) - k(x) = f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x)$$
$$= \{f(x) + \Delta u\}.\{g(x) + \Delta v\} - f(x).g(x)$$
$$= \Delta u.g(x) + \Delta v.f(x) + \Delta u.\Delta v = v.\Delta u + u.\Delta v + \Delta u.\Delta v.$$

প্রশ্নমালা 4(A)

1. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে Δy-এর মান নির্ণয় কর :

(i) $y = x^2 - 3x + 4$, $\Delta x = \cdot 01$

(ii) $y = \dfrac{3}{x^2}$, $\Delta x = -\cdot 5$ (iii) $y = 5$, $\Delta x = \cdot 3$.

2. Δx, Δy এবং $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$-এর মান নির্ণয় কর যখন

(i) $y = 3x^2 + 4$, এবং x-এর মান 4 হইতে 3·9-এ পরিবর্তিত হইতেছে।

(ii) $y = x^2 - \dfrac{2}{x^2}$, এবং x-এর মান 1 হইতে 2·1-এ পরিবর্তিত হইতেছে।

(iii) $y = -\dfrac{1}{x^3}$, এবং x-এর মান 3 হইতে 5-এ পরিবর্তিত হইতেছে।

3. y-এর নিম্নলিখিত মানসমূহের জন্য Δy-এর মান নির্ণয় কর :

(i) $y = x^3 + 1$, (ii) $y = \dfrac{1}{x-1}$ (iii) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

(iv) $y=ax+\frac{b}{x}$ (v) $y=3x^2(x^2+1)$

(vi) $y=x\tan x+x^2$, (vii) $y=x^{-\frac{2}{3}}+4x$

4. u এবং v, x-এর অপেক্ষক হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) যখন $y=u-v$, $\Delta y=\Delta u-\Delta v$

(ii) $\Delta y=\dfrac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$ যখন $y=\dfrac{u}{v}$,

(iii) $\Delta y=-\dfrac{\Delta u}{u(u+\Delta u)}$ যখন $y=\dfrac{1}{u}$.

§ 4·2. **অন্তরকলজ অপেক্ষক বা অপেক্ষকের অন্তরকল (ডিফারেন্সিয়াল) গুণাঙ্ক** (Derivative or differential coefficient of a function) :

মনে কর $y=f(x)$ একটি অপেক্ষক। মনে কর যখন x-র Δx বৃদ্ধি করা হয় (Δx ধনাত্মক, ঋণাত্মক হইবে, কিন্তু শূন্য নহে) তখন y-এর বৃদ্ধি হইতেছে Δy।

এখন $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ হইল x এবং $x+\Delta x$-এর মধ্যবর্তী y-এর পরিবর্তনের হারের গড় $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right.$ is the average rate of change y for the values of x in x to $\left.x+\Delta x\right)$। x বিন্দুতে y-এর তাৎক্ষণিক (instantaneous) পরিবর্তনের হার নির্ণয় করিতে হইলে Δx-এর মান শূন্য করিতে হইবে। কিন্তু $\Delta x=0$ করিলে $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$-এর আকারে হইবে $\dfrac{0}{0}$, ইহা অনির্ণেয়। সুতরাং $\Delta x=0$ বসাইয়া x বিন্দুতে y-এর পরিবর্তনের তাৎক্ষণিক হার পাওয়া যাইবে। না এই তাৎক্ষণিক পরিবর্তনের হার নির্ণয় করা হয়, Δxকে শূন্যের দিকে অগ্রসর করিয়া অর্থাৎ $\Delta x\to 0$ করিয়া। $\Delta x\to 0$ হইলে $x+\Delta x$ ক্রমশঃ x-এর দিকে অগ্রসর হইবে এবং ইহার ফলে x ও $x+\Delta x$-এর মধ্যবর্তী y এর পরিবর্তনের হার $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, x বিন্দুতে y-এর পরিবর্তনের হারের দিকে অগ্রসর হইবে। সুতরাং $\Delta x\to 0$ করিয়া $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$-এর সীমান্ত মানই x বিন্দুতে y-এর x-এর সাপেক্ষে তাৎক্ষণিক পরিবর্তনের হার হইবে। x-এর পরিবর্তনের জন্য y-এর এই পরিবর্তনের হার জানা, গণিতের বিভিন্ন শাখায় অত্যন্ত

প্রয়োজনীয়। এই পরিবর্তনের হারকে $f(x)$এর x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ বা ডেরিভেটিভ্ বা ডিফারেন্সিয়াল গুণাঙ্ক বলে এবং ইহাকে $f'(x)$ বা, $\frac{dy}{dx}$ বা, y_1, ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। নিম্নে ডেরিভেটিভের সংজ্ঞা দেওয়া দেওয়া হইতেছে।

সংজ্ঞা : $y=f(x)$ অপেক্ষকের সংজ্ঞার ক্ষেত্রে x যদি একটি বিন্দু হয়, এবং যদি Δx ঐ বিন্দুতে $f(x)$-এর যে কোন বৃদ্ধি (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)-র জন্য y-এর বৃদ্ধি $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ হয়, তবে $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, অর্থাৎ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$-কে x-বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ বা ডেরিভেটিভ বা অন্তরকল-গুণাঙ্ক বলা হয়। এই সীমাস্থ মানকে $f'(x)$ বা, $\frac{dy}{dx}$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়

$$\text{সুতরাং, } \frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর ডেরিভেটিভকে $f'(a)$ বা $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুতরাং,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}=f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$

সুবিধার জন্য Δx এর স্থলে অনেক সময় h লেখা হয়।

$$\therefore\quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

দ্রষ্টব্য : (1) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$-এর সীমা নির্ণয়ের সময়, h-চল রাশি এবং x-এর মান ধ্রুবক ধরিতে হইবে।

$h=0$-এর জন্য $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ হইতেছে $\frac{0}{0}$ আকারের।

সুতরাং $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$-এর মান নাও থাকিতে পারে।

যদি $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$-এর মান না থাকে তবে বলা হয় $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর ডেরিভেটিভ নাই।

(2) বাম বা ডান উভয় পক্ষ হইতে h, শূন্যের দিকে অগ্রসর হইতে পারে, অর্থাৎ $h \to 0+$ এবং $h \to 0-$ উভয়ই হইতে পারে। $h \to 0+$ বা, $h \to 0-$ হইলে $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$-এর সীমান্ত মানকে, $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর ডান পক্ষের ডেরিভেটিভ বা বামপক্ষের ডেরিভেটিভ বলা হয় এবং যথাক্রমে ইহাদের $f'(a+)$ এবং $f'(a-)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুতরাং,

$f'(a+)=a$-বিন্দুতে $f(x)$-এর ডান পক্ষের ডেরিভেটিভ

$$=\lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

$f'(a-)=a$-বিন্দুতে $f(x)$-এর বামপক্ষের ডেরিভেটিভ

$$=\lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

যদি $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর ডেরিভেটিভ থাকে তবে

$f'(a)=f'(a+)=f'(a-)$ হইবে। যদি $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর ডেরিভেটিভ না থাকে তবে $f'(a+) \neq f'(a-)$ হইবে।

(3) যদি কোন বিস্তার (a, b)-এর প্রতিটি বিন্দুতে $f'(x)$-এর ডেরিভেটিভ বা অন্তরকলজ থাকে, তবে $f(x)$-কে ঐ বিস্তারে অন্তরকলন যোগ্য (Differentiable) বলা হয়।

(4) $y=f(x)$-এর x-বিন্দুতে ডেরিভেটিভকে $f'(x)$ বা $\frac{dy}{dx}$ ছাড়াও নিম্নলিখিত প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $\frac{d}{dx}(y)$, $\frac{d}{dx}\{f(x)\}$, y_1, y^1, Dy, $D(y)$। Dy প্রতীকের ব্যবহার অন্তরকল সমীকরণে (Differential equation) করা হয়। এখানে $f'(x)$ এবং $\frac{dy}{dx}$ এই প্রতীক দুইটিই ব্যবহৃত হইবে।

(5) এখানে $\frac{dy}{dx}$ সংকেতের dy এবং dx দুইটি আলাদা সংখ্যা নহে। $\frac{dy}{dx}$ এর অর্থ $\frac{d}{dx}(y)$, অর্থাৎ y-এর উপর $\frac{d}{dx}$ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা হইয়াছে। এই জন্য অনেক সময় $\frac{d}{dx}$ কে D দ্বারা প্রকাশ করিয়া $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(y)=D(y)$ এইভাবে লেখা হয়। পরবর্তী একটি অনুচ্ছেদে অন্তরকল বা differential-এর

ধারণার সংজ্ঞা দেওয়া হইবে এবং সেখানে দেখান হইবে $\frac{dy}{dx}$ হইতেছে y এবং x-এর differential-এর ভাগফল। এইজন্য $\frac{dy}{dx}$-কে অন্তরকলসহগ বা differential coefficient বলা হয়। $\frac{dy}{dx}$ কে একটি রাশি হিসাবেই ধরা হইবে এবং ইহার অর্থ হইতেছে y-এর উপর $\frac{d}{dx}$ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা হইয়াছে।

কোন অপেক্ষকের অন্তরকলজ বা ডিফারেন্সিয়াল গুণাঙ্ক নির্ণয় প্রক্রিয়াকে **অন্তরকলন** প্রক্রিয়া (differentiation) বলে। $f'(x)$ হইল x-এর সাপেক্ষে $f(x)$-এর অন্তরকলজ। কোনকিছু উল্লেখ না থাকিলে যে চলের অপেক্ষক, তাহার সাপেক্ষে অন্তরকলন বুঝিবে।

(6) $\because\ f(x+h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.\,h+f(x),$

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.\,h+f(x)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.\,h+f(x),\qquad [\because\ h\to 0,\ x\text{-কে ধ্রুবক ধরা যায়}]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.\lim_{h\to 0} h+f(x)$$

$$[\text{যদি } f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ এর মান থাকে}]$$

$$=f'(x).\,0+f(x)=f(x).$$

এক্ষণে $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$ হইলে $f(x)$ সন্তত হইবে। সুতরাং কোন বিন্দুতে $f(x)$ অন্তরকলন যোগ্য হইলে ঐ বিন্দুতে উহা সন্তত হইবে।

(7) সংজ্ঞার সাহায্যে কোন অপেক্ষক $f(x)$-এর ডেরিভেটিভ বাহির করিতে হইলে নিম্নলিখিত পদ্ধতিতে অগ্রসর হইতে হইবে :

(i) x-এর স্থলে $x+\Delta x$ বা $x+h$ লিখিয়া $f(x+\Delta x)$ বা $f(x+h)$-এর মান বাহির করিতে হইবে।

(ii) y-এর বৃদ্ধি $f(x+\Delta x)-f(x)$ বাহির করিতে হইবে।

(iii) y-এর বৃদ্ধিকে x-এর বৃদ্ধি Δx-এর দ্বারা ভাগ করিতে হইবে, অর্থাৎ $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ বাহির করিতে হইবে।

(iv) $\Delta x \to 0$ করিয়া $\dfrac{y\text{-এর বৃদ্ধি}}{x\text{-এর বৃদ্ধি}}$-র অর্থাৎ $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$-এর সীমান্ত মান বাহির করিতে হইবে।

পদ্ধতিটি নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে বুঝান হইল।

উদা. 1. সংজ্ঞানুসারে $y=x^4$-এর x-এর সাপেক্ষে ডেরিভেটিভ নির্ণয় কর।

এখানে $y=f(x)=x^4 \cdots (1)$

$\therefore \quad y+\Delta y=f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^4 \cdots (2)$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^4-x^4$$
$$=4x^3.\Delta x+6x^2(\Delta x)^2+4x(\Delta x)^3+(\Delta x)^4 \cdots (3)$$

(3)-এর উভয় পক্ষকে Δx দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=4x^3+6x^2.\Delta x+4x.(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

$\Delta x \to 0$ করিয়া পাই,

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\{4x^3+6x^2.\Delta x+4x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\}$$
$$=4x^3+6x^2.0+4x.0+0=4x^3.$$

উদা. 2. সংজ্ঞানুসারে দেখাও, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2x+1}\right)=-\dfrac{2}{(2x+1)^2}$

মনে কর, $f(x)=\dfrac{1}{2x+1} \quad \therefore \quad f(x+h)=\dfrac{1}{2(x+h)+1}$

$$\therefore \quad f(x+h)-f(x)=\frac{1}{2(x+h)+1}-\frac{1}{2x+1}=\frac{2x+1-2(x+h)-1}{(2x+2h+1)(2x+1)}$$
$$=-\frac{2h}{(2x+2h+1)(2x+1)}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x+1}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h(2x+2h+1)(2x+1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{(2x+2h+1)(2x+1)}=\frac{-2}{(2x+2.0+1)(2x+1)}$$
$$=-\frac{2}{(2x+1)^2}.$$

উদা. 3. সংজ্ঞানুসারে x^2+2 এর $x=2$ বিন্দুতে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ বাহির কর।

এখানে $f(x)=x^2+2$. $\therefore$ $f(2)=2^2+2=6$

$\therefore$ $x=2$ বিন্দুতে $f(x)$এর অন্তরকলজ হইতেছে,

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} \quad (\text{সংজ্ঞানুসারে})$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+2-6}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6+4h+h^2-6}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(4+h)=4.$$

উদা. 4. যদি $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ হয়, তবে সংজ্ঞানুসারে $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=1}$-এর মান বাহির কর।

দেওয়া আছে $y=f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

$f'(1)=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=1}$ মান বাহির করিতে হইবে।

সংজ্ঞানুসারে, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=1}=f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(1+1+h)^2}-\dfrac{1}{(1+1)^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{4-(2+h)^2}{(2+h)^2.4}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-4h-h^2}{(2+h)^2}=\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\frac{-4-h}{(2+h)^2}.$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{-4}{4}=-\frac{1}{4}.$$

উদা. 5. যদি $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ হয়, তবে সংজ্ঞানুসারে

(i) $f'(0)$, (ii) $f'(1)$, (iii) $f'(a)$-এর মান বাহির কর।

(i) $$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1-h^2}{1+h^2}-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{1-h^2-1-h^2}{1+h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{1+h^2}=0.$$

(ii) $$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-(1+h)^2}{1+(1+h)^2}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{1-1-2h-h^2}{1+(1+h)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-2-h}{1+(1+h)^2}$$

$$=\frac{-2}{1+1}=-1.$$

(iii) $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-(a+h)^2}{1+(a+h)^2}-\frac{1-a^2}{1+a^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(1+a^2)\{1-(a+h)^2\}-(1-a^2)\{1+(a+h)^2\}}{\{1+(a+h)^2\}(1+a^2)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{2a^2-2(a+h)^2}{\{1+(a+h)^2\}(1+a)^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2a^2-2(a^2+2ah+h^2)}{h.(1+a^2)\{1+(a+h)^2\}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-4a-2h}{(1+a^2)\{1+(a+h)^2\}}=\frac{-4a}{(1+a^2)^2}.$$

উদা. 6. যদি $f(x)=e^{\sin x}$ হয়, তবে $f'(x)$-এর মান বাহির কর।

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{\sin(x+h)}-e^{\sin x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}e^{\sin x}\frac{e^{\sin(x+h)-\sin x}-1}{h}$$

$$=e^{\sin x}\lim_{h\to 0}\frac{e^k-1}{h}$$ যেখানে $k=\sin(x+h)-\sin x$

$$=e^{\sin x}\lim_{h\to 0}\frac{e^k-1}{k}\cdot\frac{k}{h}=e^{\sin x}\lim_{h\to 0}\frac{e^k-1}{k}.\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}$$

$$=e^{\sin x}\lim_{k\to 0}\frac{e^k-1}{k}.\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

[∵ যখন $h\to 0$, তখন $k\to 0$ হয়]

$$=e^{\sin x}.1.\lim_{h\to 0}\left\{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}$$

$$=e^{\sin x}.\cos x.1=e^{\sin x}.\cos x.$$

উদা. 7. যদি $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ হয়, যেখানে u এবং f ধ্রুবক, তবে $\frac{ds}{dt}$ বাহির কর।

এখানে $s=f(t)=ut+\frac{1}{2}ft^2$

$$\therefore \quad \Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)=u(t+\Delta t)+\tfrac{1}{2}f(t+\Delta t)^2-ut-\tfrac{1}{2}ft^2$$
$$=u.\Delta t+ft.\Delta t+\tfrac{1}{2}f(\Delta t)^2$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(u+ft+\tfrac{1}{2}f.\Delta t)=u+f.t.$$

প্রশ্নমালা 4 (B)

1. সংজ্ঞানুসারে নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ বা ডেরিভেটিভ নির্ণয় কর :

(i) $2x$ (ii) $4x^2+2$ (iii) $\frac{1}{3}x^3$ (iv) ax^2+b

(v) $\frac{1}{x-1}$ (vi) $\frac{1}{ax+b}$ (a এবং b ধ্রুবক) (vii) $\frac{1}{x^3}$

(viii) x^3+x.

2. (i) $y=\sqrt{x+1}$-এর $x=3$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

(ii) $y=\frac{2}{x}$-এর $x=-1$ বিন্দুতে অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

3. (i) $y=x^2+1$ হইলে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}$-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $y=x+\frac{1}{x}$ হইলে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-1}$-এর মান নির্ণয় কর।

(iii) $y=\frac{x-1}{x+1}$ হইলে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$-এর মান নির্ণয় কর।

4. $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ হয় তবে

(i) $f'(0)$ (ii) $f'(2)$ (iii) $f'(a)$-এর মান নির্ণয় কর।

5. $f(x)=e^{x^2}$ হইলে সংজ্ঞানুসারে $f'(x)$-এর মান নির্ণয় কর।

6. $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ হইলে সংজ্ঞানুসারে $\frac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় কর।

7. সংজ্ঞানুসারে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর যদি y-এর মান হয়

(i) $y=ax^2+bx+c$ (ii) $y=\sqrt{x^2+1}$ (iii) $y=\frac{1}{x^2}$

(iv) $y=(2x+3)^2$ (v) $y=\frac{1}{x+1}+e^x$ (v) $y=\sqrt{ax^2+b}$

(vii) $y=5$

8. $s=3t^2+4t$ হইলে $\frac{ds}{dt}$-এর মান নির্ণয় কর।

9. $x=\sin t+t^3$ হইলে সংজ্ঞানুসারে t-এর সাপেক্ষে x-এর অন্তরকলন কর (differentiate x with respect to t)।

§ 4·3. **প্রাথমিক অপেক্ষকসমূহের অন্তরকলজ** (derivatives of elementary functions) :

এই অনুচ্ছেদে x^n, e^x, $\log^x$ এবং $\sin x$, $\cos x$ ইত্যাদি ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকসমূহের x-এর সাপেক্ষের অন্তরকলজ নির্ণয় করা হইতেছে।

I. x^n-এর অন্তরকলজ :

যদি $y=x^n$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$, বা, $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$,

যেখানে n যে কোন একটি বাস্তব সংখ্যা।

x-এর Δx বৃদ্ধির জন্য মনে কর y-এর বৃদ্ধি Δy.

$$\therefore \quad y+\Delta y=(x+\Delta x)^n, \quad \text{বা,} \quad \Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{(x+\Delta x)-x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{(x+\Delta x)-x}$$

এক্ষণে $u=x+\Delta x$ বসাইয়া পাই যে যখন $\Delta x\to 0$ হইবে তখন $u\to x$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{(x+\Delta x)-x}=\lim_{u\to x}\frac{u^n-x^n}{u\to x}=nx^{n-1}$$

[সীমা উপপাদ্য সাহায্যে]

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

[দ্রষ্টব্য : (i) সূত্রটিকে এই ভাবে মনে রাখিবে

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\text{সূচক}}\right) = \text{সূচক} \times x^{\text{সূচক}-1}$$

যেমন, $\frac{d}{dx}(x^7) = 7.x^{7-1} = 7x^6$, এখানে সূচক $= 7$.

(ii) $\frac{d}{dx}(x) = 1$, কারণ $\frac{d}{dx}(x^1) = 1.x^{1-1} = 1.x^0 = 1$

উদাহরণ স্বরূপ :

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^{4-1} = 4x^3, \quad \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) = \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \tfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{d}{dx}(\sqrt[4]{x}) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \tfrac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = (-2)x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

প্রশ্নমালা 4(C)

নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের x-এর সাপেক্ষে ডেরিভেটিভ নির্ণয় কর :

(i) x^2 (ii) x^{99} (iii) x^{1000} (iv) $x^{2\cdot5}$ (v) $x^{1\cdot5}$

(vi) x^{-3} (vii) $x^{-1\cdot6}$ (viii) $\frac{1}{x^8}$ (ix) $\frac{1}{x^{20}}$ (x) $\frac{1}{x^{2\cdot1}}$

(xi) $\sqrt{x}$ (xii) $\sqrt{x^3}$ (xiii) $\sqrt[n]{x}$ (xiv) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

(xv) $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$ (xvi) x^e.

II. ধ্রুবকের অন্তরকলজ : $y = f(x) = c$ হইলে, $f(x+\Delta x) = c$

$\therefore \quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0.$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

III. $y = e^x$ হইলে $\frac{dy}{dx} = e^x$; বা, $\frac{d}{dx}(e^x) = e$.

এখানে $y = f(x) = e^x$. $\therefore \quad y + \Delta y = f(x+\Delta x) = e^{x+\Delta x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} e^x\frac{(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

$$= e^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x.\ 1 = e^x.$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

IV. $y=a^x$ হইলে, $\frac{dy}{dx}=a^x \log_e a$.

এখানে $y=a^x=e^{x \log a}$

$$y+\Delta y = a^{x+\Delta x} = e^{(x+\Delta x)\log a}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{(x+\Delta x)\log a}-e^{x\log a}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{e^{x\log a}\left(e^{\Delta x\log a}-1\right)}{\Delta x\log a}.\ \log a\right\}$$

$$= e^{x\log a}.\ \log a.\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x\log a}-1}{\Delta x\log a}$$

$= a^x.\ \log_e a.\ 1$ [$\because$ যখন $\Delta x\to 0$, তখন $\Delta x\log a\to 0$ হয়]

$= a^x \log_e a.$

V. $y=\log x$ হইলে, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ বা, $\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x}$

এখানে $y=\log x \quad \therefore \quad y+\Delta y=\log(x+\Delta x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log(x+\Delta x)-\log(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}.x} = \frac{1}{x}.\lim_{k\to 0}\frac{\log(1+k)}{k}$$

$\left[\because\right.$ যখন $\Delta x\to 0$, তখন $k=\frac{\Delta x}{x}\to 0$ হয় $\left.\right]$

$$= \frac{1}{x}.\ 1 = \frac{1}{}$$

VI. যদি $y=\sin x$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}=\cos x$, বা, $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}.\lim_{h\to 0}\cos(x+\tfrac{1}{2}h)=1.\cos x=\cos x.$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x.$$

VII. যদি $y=\cos x$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}=-\sin x$

বা, $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{x+h+x}{2}.\ \sin\frac{x-(x+h)}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}-\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\lim_{h\to 0}\sin(x+\tfrac{1}{2}h)=-1.\sin x=-\sin x$$

VIII. যদি $y=\tan x$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}=\sec^2 x$ বা $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h).\sin x}{h\cos(x+h).\cos x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h).\cos x}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin h}{h}.\ \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}\right\}$$

$$=1.\frac{1}{\cos x.\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x.\quad \left[x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

IX. যদি $y=\cot x$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}^2 x$

বা, $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\operatorname{cosec}^2 x$.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\cot(x+h)-\cot x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h).\sin x-\sin(x+h).\cos x}{h.\sin(x+h).\sin x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x-x-h)}{h.\sin(x+h)\sin x}=-\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$=-1.\frac{1}{\sin x.\sin x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\text{cosec}^2 x.$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cot x)=-\text{cosec}^2 x,\ [x\neq n\pi]$$

X. $y=\sec x$ হইলে, $\frac{dy}{dx}=\sec x.\tan x$

বা, $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x,\tan x.$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x-\cos(x+h)}{h\cos(x+h).\cos x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{1}{2}h\sin(x+\frac{1}{2}h)}{h\cos(x+h).\cos x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+\frac{1}{2}h)}{\cos(x+h).\cos x}$$

$$=1.\frac{\sin x}{\cos x.\cos x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x.\tan x.$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x.\tan x.\ \left[x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

XI. $y=\text{cosec}\ x$ হইলে, $\frac{dy}{dx}=-\text{cosec}\ x.\cot x$

বা, $\frac{d}{dx}(\text{cosec}\ x)=-\text{cosec}\ x.\cot x$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{cosec}(x+h)-\text{cosec}\ x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x-\sin(x+h)}{h\sin(x+h)\ \sin x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{1}{2}h)}{h\sin(x+h).\sin x}$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} . \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+\frac{1}{2}h)}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -1.\frac{\cos x}{\sin x.\sin x} = -\text{cosec } x.\cot x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x.\cot x. \quad [x \neq n\pi]$$

দ্রষ্টব্য : (i) উপরোক্ত অপেক্ষকসমূহের ডেরিভেটিভ (অন্তরকলজ) বা ডিফারেন্সিয়াল গুণাঙ্ক ভালভাবে মনে রাখিতে হইবে। পরবর্তী একটি অনুচ্ছেদে বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক, যথা $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ $\sec^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1}x$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করা হইবে।

(ii) লক্ষ্য কর যে সব ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক Co-উপসর্গ দ্বারা আরম্ভ হইয়াছে তাহাদের ডেরিভেটিভের আগে ঋণাত্মক চিহ্ন আছে, যেমন $\cos x$ অপেক্ষকটি Co-শব্দ দ্বারা আরম্ভ, এবং ইহার ডেরিভেটিভ $(-\sin x)$-এর আগে ঋণাত্মক চিহ্ন আছে।

§ 4·4. ডেরিভেটিভ সংক্রান্ত সাধারণ সূত্র (দুইটি অপেক্ষকের যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগের ডেরিভেটিভ):

এই অনুচ্ছেদে দুইটি অপেক্ষকের যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগের ডেরিভেটিভ, ঐ অপেক্ষক দুইটি ডেরিভেটিভের সাহায্যে প্রকাশ করিবার সূত্র দেওয়া হইবে। এই সূত্রগুলির সাহায্যে প্রাথমিক অপেক্ষকগুলির যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ প্রক্রিয়ার দ্বারা গঠিত অপেক্ষকসমূহের ডেরিভেটিভ সহজেই বাহির করা সম্ভব হইবে। সূত্রগুলি যত্ন সহকারে মনে রাখিতে হইবে।

সূত্র I. যদি c একটি ধ্রুবক এবং f(x) অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক হয় তবে c f(x)-এর অন্তরকলজ হইতেছে, c f′(x), অর্থাৎ $\frac{d}{dx}\{c f(x)\}$ $= c\frac{d}{dx}\{f(x)\}$

প্রমাণ : $\frac{d}{dx}\{cf(x)\} = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$

$$= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x) = c\frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

উদা. $\frac{d}{dx}(3x^2)=3\frac{d}{dx}(x^2)=3.2x^{2-1}=6x$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x^2}\right)=\frac{d}{dx}(2x^{-2})=2\frac{d}{dx}(x^{-2})=2.(-2)x^{-2-1}=-\frac{4}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}(2\tan x)=2\frac{d}{dx}(\tan x)=2\sec^2 x.$$

$$\frac{d}{dx}(3.\sqrt[3]{x})=3\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)=3.\tfrac{1}{3}.x^{\frac{1}{3}-1}=x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

প্রশ্নমালা 4(D)

1. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর :

(i) $4x^3$ (ii) $2\sqrt{x}$ (iii) $5\cos x$ (iv) $\frac{3}{4x^3}$

(v) $\frac{2x^2}{3\sqrt{x}}$ (vi) $\frac{2(x^2-1)}{x^4-x^2}$. (vii) 2^{x+2}

সূত্র II. যদি u এবং v, x-এর দুইটি অন্তরকলন যোগ্য অপেক্ষক হয়, তবে $\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$ এবং $\frac{d}{dx}(u-v)=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$.

প্রমাণ : মনে কর $y=u+v$. মনে কর x-এর Δx বৃদ্ধির জন্য y, u এবং v-এর বৃদ্ধি যথাক্রমে Δy, Δu, Δv

$$\therefore \quad \Delta y=\Delta u+\Delta v \quad \text{বা,} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}.$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}.$$

অনুরূপে $\frac{d}{dx}(u-v)=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$.

সাধারণভাবে যদি u_1, u_2, u_3,……ইত্যাদি x-এর অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক হয় এবং যদি $y=u_1\pm u_2\pm u_3\pm\cdots\cdots$হয় তবে

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du_1}{dx}\pm\frac{du_2}{dx}\pm\frac{du_3}{dx}\pm\cdots\cdots।$$

অর্থাৎ কতকগুলি অপেক্ষকের যোগ বা বিয়োগফলের অন্তরকলজ ঐ অপেক্ষকগুলির অন্তরকলজগুলির যোগ বা বিয়োগফলের সমান হইবে।

উদা. $\frac{d}{dx}(x^3+x^2)=\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}(x^2)$

[এখানে $u=x^3$ এবং $v=x^2$ ধরিয়া পাই $y=x+v$]

$=3x^{3-1}+2x^{2-1}=3x^2+2x.$

$$\frac{d}{dx}(x^4+\sec x)=\frac{d}{dx}(x^4)+\frac{d}{dx}(\sec x)=4x^3+\sec x.\tan x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+1}{x^2}\right)=\frac{d}{dx}(x+x^{-2})=\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(x^{-2})=1-2x^{-3}=1-\frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(8x^5-\frac{3}{x^2}+5+4\cos x\right)=\frac{d}{dx}\left(8x^5\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^2}\right)+\frac{d}{dx}(5)+\frac{d}{dx}(4\cos x)$$

$$=8\frac{d}{dx}(x^5)-3\frac{d}{dx}(x^{-2})+\frac{d}{dx}(5)+4\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$=8.5x^4-3.(-2)x^{-2-1}+0+4(-\sin x)$$

$$=40x^4+\frac{6}{x^3}-4\sin x.$$

$$\frac{d}{dx}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3=\frac{d}{dx}\left(x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}(x^3)-\frac{d}{dx}(3x)+\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x}\right)-\frac{d}{dx}(x^{-3})$$

$$=3x^2-3.1+3.(-1)x^{-2}-(-3)x^{-4}$$

$$=3x^2-3-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^4}$$

প্রশ্নমালা 4(E)

1. নিম্নলিখিত অপেক্ষক সমূহের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন কর :

(i) $4x^2+5x$ (ii) $\frac{3}{x}+2x^2$ (iii) $3x^2+x-1$

(iv) ax^2+bx+c, যেখানে a, b, c ধ্রুবক

(v) $x\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}-\sec x$ (vi) $4\sqrt{x}+\sqrt{8}+\frac{1}{2}\cot x$

(vii) $(x+1)(x+2)$ (viii) $x^{2n}-nx^2+6n$

(ix) $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$ (x) $\dfrac{x+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{6}}}$ (xi) $\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}$

(xii) $\sin x+2\cos x+3\tan x+4\cot x+5\sec x$
$+6\operatorname{cosec} x-e^x$

(xiii) $(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2$ (xiv) $\dfrac{(1-\sqrt{x})^3}{x}+\operatorname{cosec} x$

সূত্র III : যদি $y=u.v$ হয়, যেখানে u এবং v উভয়ই x-এর অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক, তবে $\dfrac{dy}{dx}=u.\dfrac{dv}{dx}+v.\dfrac{du}{dx}$

প্রমাণ : xএর Δx বৃদ্ধির জন্য মনে কর y, u এবং v এর বৃদ্ধি যথাক্রমে Δy, Δu এবং Δv.

$$\therefore\quad y+\Delta y=(u+\Delta u).(v+\Delta v)$$

$$\therefore\quad \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=u.\Delta v+v\,\Delta u+\Delta u.\Delta v.$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=u.\frac{\Delta v}{\Delta x}+v.\frac{\Delta u}{\Delta x}.+\frac{\Delta u}{\Delta x}.\frac{\Delta v}{\Delta x}.\Delta x$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}u.\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}v.\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.\frac{\Delta v}{\Delta x}.\Delta x$$

$$=u.\frac{dv}{dx}+v.\frac{du}{dx}+\frac{du}{dx}.\frac{dv}{dx}.0$$

$$=u.\frac{dv}{dx}+v.\frac{du}{dx}$$

দ্রষ্টব্য : (1) সূত্রটিকে এইভাবে মনে রাখিবে,

দুইটি অপেক্ষকের গুণফলের অন্তরকলজ

$=$প্রথম অপেক্ষক $\times$ দ্বিতীয়ের অন্তরকলজ$+$দ্বিতীয় অপেক্ষক $\times$ প্রথমের অন্তরকলজ

(2) সূত্রটির উভয় পক্ষকে $y=uv$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}+\frac{1}{v}.\frac{dv}{dx}\quad \text{বা,}\quad \frac{y'}{y}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}$$

যেখানে $y'=\dfrac{dy}{dx}$ ইত্যাদি।

(3) যদি y, তিনটি অপেক্ষক u, v, w-এর গুণফল হয়,

অর্থাৎ $y=u.v.w$ হয়, তবে

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(u.vw)=u\frac{d}{dx}(v.w)+v.w\frac{du}{dx}=u\left(v\frac{dw}{dx}+w\frac{dv}{dx}\right)+vw\frac{du}{dx}$$

$$=uv\frac{dw}{dx}+uw\frac{dv}{dx}+vw\frac{du}{dx}$$

উভয় পক্ষকে y বা uvw দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{y'}{y}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}.$$

সাধারণভাবে যদি y, n-সংখ্যক অপেক্ষক $u_1, u_2 \cdots u_n$এর গুণফল হয় অর্থাৎ যদি $y=u_1, u_2 \cdots u_n$ হয় তবে,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du_1}{dx}.u_2\cdots u_n+u_1.\frac{du_2}{dx}\cdots u_n+\cdots+u_1u_2\cdots\frac{du_n}{dx}$$ হইবে।

বা, $$\frac{y'}{y}=\frac{u_1'}{u_1}+\frac{u_2'}{u_2}+\frac{u_3'}{u_3}+\cdots+\frac{u_n'}{u_n}$$

উদাহরণ :

(i) $$\frac{d}{dx}(x^2.\sin x)=x^2.\frac{d}{dx}(\sin x)+\sin x.\frac{d}{dx}(x^2)$$

$=x^2\cos x+\sin x.2x$ [$x^2=u$, $\sin x=v$ ধরিয়া]

$=x^2\cos x+2x\sin x.$

(ii) $$\frac{d}{dx}\left\{(2x+1)^2.e^x\right\}=(2x+1)^2.\frac{d}{dx}(e^x)+e^x.\frac{d}{dx}\left\{(2x+1)^2\right\}$$

$$=(2x+1)^2.e^x+e^x\frac{d}{dx}(4x^2+4x+1)$$

$$=(2x+1)^2.e^x+e^x.(8x+4)$$

$$=e^x.(4x^2+12x+5).$$

(iii) $$\frac{d}{dx}(\sin x.\cos x)=\sin x.\frac{d}{dx}(\cos x)+\frac{d}{dx}(\sin x).\cos x$$

$$=\sin x.(-\sin x)+\cos x.\cos x$$

$$=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x.$$

(iv) $$\frac{d}{dx}(\sin^2 x)=\frac{d}{dx}(\sin x.\sin x)=\sin x.\frac{d}{dx}(\sin x)+\frac{d}{dx}(\sin x).\sin x$$

$$=\sin x.\cos x+\cos x.\sin x=2\sin x.\cos x=\sin 2x.$$

(v) $\dfrac{d}{dx}\left\{(x^2+1)(3x^3+1)\right\}=(x^2+1)\dfrac{d}{dx}(3x^3+1)$

$$+(3x^3+1)\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

[x^2+1 কে u এবং $3x^3+1$ কে v ধরিয়া]

$=(x^2+1)\left\{\dfrac{d}{dx}(3x^3)+\dfrac{d}{dx}(1)\right\}+(3x^3+1)\left\{\dfrac{d}{dx}(x^2)+\dfrac{d}{dx}(1)\right\}$

$=(x^2+1)\{3.3x^2+0\}+(3x^3+1)(2x+0)$

$=9x^2(x^2+1)+2x(3x^3+1)=15x^4+9x^2+2x.$

(vi) $\dfrac{d}{dx}(x^2e^x\tan x)=\dfrac{d}{dx}(x^2).e^x.\tan x+x^2\left\{\dfrac{d}{dx}(e^x)\right\}\tan x$

$$+x^2e^x.\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$=2xe^x\tan x+x^2e^x\tan x$ [লক্ষ্য কর গুণফলের একটি অপেক্ষকের
$+x^2e^x\sec^2 x$ ডেরিভেটিভ যখন লওয়া হইতেছে তখন অন্য অপেক্ষকগুলি অপরিবর্তিত থাকিবে ।]

$=e^x\{x(2+x)\tan x+x^2.\sec^2 x\}$

(vii) $\dfrac{d}{dx}\left\{x.\tan x-e^x.\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}\right\}=\dfrac{d}{dx}(x\tan x)-\dfrac{d}{dx}\left\{e^x(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\right\}$

$=1.\tan x+x.\sec^2 x-(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\dfrac{d}{dx}(e^x)+e^x.\dfrac{d}{dx}(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=\tan x+x\sec^2 x-(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})e^x+e^x(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}).$

প্রশ্নমালা 4(F)

1. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে ডেরিভেটিভ বাহির কর :

(i) $(2x+1)(3-2x^2)$ (ii) $(5-3x^2)(2-3x^3)$

(iii) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ (iv) $x^2.\sec x$

(v) $\dfrac{x^2+3x+1}{x}$ (vi) $e^x\sin x-\cos x+4$

(vii) $\sec x.\tan x$ (viii) $\dfrac{1}{\sin x.\cos x}$

(ix) $\tan^2 x$ (x) $x^4(1+\sqrt{x})$

(xi) $x.\mathrm{cosec}\, x$ (xii) $x^n\cot x$ (xiii) $x.\mathrm{cosec}^2 x.$

(xiv) $x^2e^x\cos x$ (xv) $(x^3-2x\cos x+4)(x^2+4x-e^x)$

(xvi) $\frac{x}{\sin x}$ (xvii) $\frac{\cos x}{x}$ (xviii) $\frac{x^2}{\tan x}$.

2. $\tan x$ কে $\sin x.\sec x$ আকারে প্রকাশ করিয়া গুণের ডেরিভেটিভের সূত্র প্রয়োগ করিয়া দেখাও ইহার ডেরিভেটিভ্ হইতেছে $\sec^2 x$.

সূত্র IV : যদি $y=\frac{u}{v}$ হয়, যেখানে u এবং v, x-এর অন্তরকলন যোগ্য অপেক্ষক, তবে $\frac{dy}{dx}=\frac{v.\frac{du}{dx}-u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$ হইবে।

প্রমাণ : এখানে $y=\frac{u}{v}$ $\therefore$ $y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$.

$$\therefore \quad \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v.\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u.\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$=\frac{\lim_{\Delta x\to 0} v.\frac{\Delta u}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0} u.\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x\to 0} v(v+\Delta v)}$$

$$=\frac{v.\frac{du}{dx}-u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$$ [$\because$ v অন্তরকলন যোগ্য, সুতরাং v সন্তত, এবং $\Delta v\to 0$, যখন $\Delta x\to 0$]

সূত্রটি এইভাবে মনে রাখিবে,

দুইটি অপেক্ষকের ভাগফলের ডেরিভেটিভ্

$$=\frac{\text{হর} \times \text{লবের ডেরিভেটিভ্} - \text{লব} \times \text{হরের ডেরিভেটিভ্}}{\text{হরের বর্গ}}$$

অনুসিদ্ধান্ত : উপরোক্ত ভাগের ডেরিভেটিভের সূত্রে $u=1$ ধরিয়া পাই $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right)=\frac{v.\frac{d}{dx}(1)-1.\frac{d}{dx}(v)}{v^2}=\frac{v.0-\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right)=-\frac{1}{v^2}.\frac{dv}{dx}$$

উদা. (i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)=\frac{\sin x.\frac{d}{dx}(x^2)-x^2.\frac{d}{dx}(\sin x)}{(\sin x)^2}$

$=\frac{2x\sin x-x^2\cos x}{\sin^2 x}$ [এখানে $u=x^2$

এবং $v=\sin x$ লওয়া হইয়াছে]

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^2-x+1}\right)$

$$=\frac{(x^2-x+1).\frac{d}{dx}(x^2+1)-(x^2+1)\frac{d}{dx}(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$=\frac{(x^2-x+1).2x-(x^2+1).(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}.$$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x\tan x}{x^2+1}\right)=\frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(x\tan x)-x\tan x\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{(x^2+1)\left\{x.\frac{d}{dx}(\tan x)-\tan x.\frac{d}{dx}(x)\right\}-x\tan x\left(\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}1\right)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(x^2+1)(x\sec^2 x-\tan x)-x\tan x\,(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x(x^2+1)\sec^2 x-(3x^2+1)\tan x}{(x^2+1)^2}$$

(iv) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right)$, $\left[v=\frac{1}{x+1}\text{ ধরিয়া}\right]$

$=-\frac{1}{v^2}.\ \frac{dv}{dx}$ [অনুসিদ্ধান্ত অনুযায়ী]

$=-\frac{1}{(x+1)^2}.\ \frac{d}{dx}(x+1)=-\frac{1}{(x+1)^2}.$

(v) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{ax^2+b}\right)=-\frac{1}{(ax^2+b)^2}\ \frac{d}{dx}(ax^2+b)=-\frac{2ax}{(ax^2+b)^2}.$

(vi) $\tan x$-কে $\frac{\sin x}{\cos x}$ আকারে লিখিয়া ভাগের অন্তরকলনের নিয়মানুযায়ী অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{\cos x.\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x.\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x.\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$=\sec^2 x.$

(vii) $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{x^2-e^x\tan x}{(x+1)e^x+4x^2}\right\}$

$$=\frac{\{(x+1)e^x+4x^2\}\frac{d}{dx}(x^2-e^x\tan x)-(x^2-e^x\tan x)\frac{d}{dx}\{(x+1)e^x+4x^2\}}{\{(x+1)e^x+4x^2\}^2}$$

$$=\frac{\{(x+1)e^x+4x^2\}(2x-e^x\tan x-e^x\sec^2 x)-(x^2-e^x\tan x)\{e^x+(x+1)e^x+8x\}}{\{(x+1)e^x+4x^2\}^2}$$

(viii) $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}\right\}$

$$=-\frac{1}{\{(x+1)(x^2+1)\}^2}\cdot\frac{d}{dx}\{(x+1)(x^2+1)\}$$

$$=-\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\{1.(x^2+1)+(x+1)2x\}$$

$$=-\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}.$$

প্রশ্নমালা 4(G)

1. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে ডেরিভেটিভ্ বাহির কর :

(i) $\dfrac{\tan x}{x}$ (ii) $\dfrac{x-1}{x+1}$ (iii) $\dfrac{x^2}{x-4}$ (iv) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

(v) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+2}{x^{\frac{3}{2}}+1}$ (vi) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, a, b, c, d ধ্রুবক

(vii) $\dfrac{ax^2+2bx+c}{ax^2-2bx+c}$ (viii) $\dfrac{1}{2x+1}$ (ix) $\dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$

(x) $\dfrac{1}{x^3-1}$ (xi) $\dfrac{e^x+\cos x}{xe^x+1}$ (xii) $\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

(xiii) $\dfrac{(x+1)(x+2)+\cot x}{(x^2-x+1)e^x}$ (xiv) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$

(xv) $\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{x}+\sin x\right)\dfrac{1}{x^2+1}$.

§ 4·5. অপেক্ষকের অপেক্ষক-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করিবার পদ্ধতি :

(অপেক্ষকের অপেক্ষক-এর অন্তরকলন করিবার পদ্ধতি)

(Method of differentiation of a function of a function)

মনে কর $z=\phi(x)$, x-এর একটি অপেক্ষক এবং $y=f(z)$, z-এর একটি অপেক্ষক। এখন z-এর মান বসাইয়া পাই, $y=f(z)=f\{\phi(x)\}$। সুতরাং y, x-এর একটি অপেক্ষক। yকে x-এর অপেক্ষকের অপেক্ষক বলা হয়। এখন x-এর সাপেক্ষে y-এর ডেরিভেটিভ্ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর x-এর Δx বৃদ্ধির জন্য z এবং y-এর বৃদ্ধি যথাক্রমে Δz এবং Δy। সুতরাং

$z+\Delta z=\phi(x+\Delta x)$ এবং $y+\Delta y=f\{\phi(x+\Delta x)\}=f(z+\Delta z)$.

$\therefore \quad \Delta y=f(z+\Delta z)-f(z)$ এবং $\Delta z=\phi(x+\Delta x)-\phi(x)\to 0$ যখন $\Delta x\to 0$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\Delta y}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}\right\} \quad [\Delta z\neq 0 \text{ ধরিয়া}]$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} \quad [\because \text{ যখন } \Delta x\to 0 \text{ হয় তখন } \Delta z\to 0\,]$$

$$=\frac{d}{dz}\{f(z)\}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

অতএব x-এর সাপেক্ষে y-এর পরিবর্তনের হার বা অন্তরকলজ হইতেছে z-এর সাপেক্ষে y-এর পরিবর্তনের হারের বা অন্তরকলজের সহিত x-এর সাপেক্ষে z-এর পরিবর্তনের হারের বা অন্তরকলজের গুণফল।

অনুরূপভাবে যদি $y=f(u)$, $u=h(v)$ এবং $v=\phi(x)$ তিনটি অপেক্ষক হয় অর্থাৎ যদি $y=f[h\{\phi(x)\}]$ হয়, তবে,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} \text{ হইবে।}$$

সাধারণভাবে যদি $y=f_1(u_1)$, $u_1=f_2(u_2),\cdots u_{n-1}=f_{n-1}(u_n)$, $u_n=f_n(x)$, n-সংখ্যক অপেক্ষক হয় তবে,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du_1}\cdot\frac{du_1}{du_2}\cdots\frac{du_{n-1}}{du_n}\cdot\frac{du_n}{dx} \text{ হইবে।}$$

দ্রষ্টব্য : (i) এখানে অপেক্ষকসমূহ অন্তরকলনযোগ্য (differentiable) ধরা হইয়াছে।

(ii) উপরোক্ত নিয়মটিকে শৃঙ্খল নিয়ম (chain rule) বলে।

উদা. 1. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর যখন

(i) $y=(1+x^2)^3$ (ii) $y=\sqrt{1-x^2}$

(iii) $y=(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}$ (iv) $y=\sin^2 x$

(v) $y=\sin(x^2)$ (vi) $y=\log(\sin x)$

(i) $y=(1+x^2)^3$. মনে কর $u=1+x^2$ $\therefore$ $y=u^3$

$\therefore \frac{dy}{du}=3u^2, \frac{du}{dx}=0+2.x=2x$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=3u^2.2x=6x(1+x^2)^2$ (u-এর মান বসাইয়া)।

(ii) $y=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{u}$, যেখানে $u=1-x^2$

$\therefore \frac{dy}{du}=\frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{u}}$, এবং $\frac{du}{dx}=0-2x=-2x$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{u}}.(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $y=(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}=u^{\frac{3}{2}}$, যেখানে $u=ax^2+bx+c$.

$\therefore \frac{dy}{du}=\frac{3}{2}u^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}\sqrt{u}$ এবং $\frac{du}{dx}=a.2x+b.1+0=2ax+b$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=\frac{3}{2}\sqrt{u}.(2ax+b)=\frac{3}{2}(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}$

(iv) $y=\sin^2 x=(\sin x)^2=u^2$, যেখানে $u=\sin x$.

$\therefore \frac{dy}{du}=2u$ এবং $\frac{du}{dx}=\cos x$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=2u.\cos x=2\sin x.\cos x=\sin 2x$

(এই উদাহরণটি আগের অনুচ্ছেদে গুণফলের অন্তরকলনের নিয়ম অনুযায়ী করা হইয়াছিল)।

(v) $y=\sin x^2=\sin u$, যেখানে $u=x^2$.

$\therefore \frac{dy}{du}=\cos u$ এবং $\frac{du}{dx}=2x$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\cos u.2x=2x.\cos x^2$.

(vi) $y=\log \sin x=\log u$, যেখানে $u=\sin x$.

$\therefore \quad \dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{u}$ এবং $\dfrac{du}{dx}=\cos x$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}\cdot \cos x=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x.$

উদা. 2. নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন কর।

(i) $\sin^2 3x$ (ii) $e^{\tan(ax+b)}$ (iii) $\sqrt{\tan(e^x)}$

(iv) $\sin\{e^{\tan^2 2x}\}$.

(i) মনে কর $y=\sin^2 3x=(\sin 3x)^2=u^2$, যেখানে

$u=\sin 3x=\sin v$, যেখানে $v=3x$.

$\therefore \quad y=u^2$-কে u-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই

$\dfrac{dy}{du}=2u$. অনুরূপে $u=\sin v$ হইতে পাই $\dfrac{du}{dv}=\cos v$

এবং $v=3x$ হইতে পাই $\dfrac{dv}{dx}=3$.

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}=2u.\cos v.3=6\sin 3x\cos 3x.$

(ii) $y=e^{\tan(ax+b)}=e^u$, যেখানে $u=\tan(ax+b)=\tan v$ যেখানে $v=ax+b$.

$\therefore \quad \dfrac{dy}{du}=e^u,\ \dfrac{du}{dv}=\sec^2 v,\ \dfrac{dv}{dx}=a$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}=e^u.\sec^2 v.a$

$=a\sec^2(ax+b).e^{\tan(ax+b)}$.

(iii) $y=\sqrt{\tan(e^x)}$. মনে কর $u=\tan(e^x)$ এবং $v=e^x$

$\therefore \quad y=\sqrt{u}.\quad u=\tan v$ এবং $v=e^x$.

$\therefore \quad \dfrac{dy}{du}=\tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{u}},\ \dfrac{du}{dv}=\sec^2 v,\ \dfrac{dv}{dx}=e^x$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}=\tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{u}}\cdot\sec^2 v.e^x=\dfrac{e^x.\sec^2(e^x)}{2\sqrt{\tan(e^x)}}.$

(iv) $y=\sin\{e^{\tan^2 2x}\}=\sin u$, যেখানে $u=e^{\tan^2 2x}=e^v$.

যেখানে $v=\tan^2 2x=(\tan 2x)^2=w^2$,

যেখানে $w=\tan 2x=\tan z$ যেখানে $z=2x$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{du}=\cos u,\ \frac{du}{dv}=e^v,\ \frac{dv}{dw}=2w,\ \frac{dw}{dz}=\sec^2 z,\ \frac{dz}{dx}=2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\cos u.e^v.2w.\sec^2 z.2$$

$$=4\tan 2x.\sec^2 2x.e^{\tan^2 2x}.\cos\left(e^{\tan^2 2x}\right)$$

উদা. 8. যদি $y=f(cx)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। ইহার সাহায্যে

(i) $y=\sin 2x$, (ii) $y=e^{kx}$, (iii) $y=a^x$-এর অন্তরকলজ বাহির কর।

$y=f(cx)=f(u)$, যেখানে $u=cx$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u).c=cf'(cx)$$

(i) $\frac{d}{dx}(\sin 2x)=2\frac{d}{du}(\sin u)$, যেখানে $u=2x$

$=2.\cos u=2\cos 2x$

(ii) $\frac{d}{dx}(e^{kx})=k\frac{d}{du}(e^u)$ যেখানে $u=kx$

$=ke^u=ke^{kx}$

(iii) $\frac{d}{dx}(a^x)=\frac{d}{dx}\left(e^{\log a^x}\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{x\log a}\right)$,

$=\frac{d}{dx}(e^{kx})$ যেখানে $k=\log a$

$=ke^{kx}=a^x.\log a$.

প্রশ্নমালা 4(H)

1. নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর :—

(i) $(x^2+1)^5$ (ii) $\frac{1}{(x^2-1)^2}$ (iii) $(x^2+a^2)^{10}$

(iv) $(2x^2+4x+1)^{\frac{3}{2}}$ (v) $(ax^2+bx+c)^n$ (vi) $\sqrt{x^2-3x+7}$

(vii) $\sin 2x$ (viii) $\cos 3x$ (ix) $\cot 5x$

(x) $\sec nx$ (xi) $\sqrt{\sin x}$ (xii) $\sin(x^3)$.

(xiii) $\log \tan x$ (xiv) $\log \operatorname{cosec} x$ (xv) $\log \cos x$

(xvi) $\cos(\log x)$ (xvii) $\log(\sec x - \tan x)$

(xviii) $\log \dfrac{e^x}{e^x+1}$ (xix) $\log(\log x)$.

2. নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন কর :—

(i) $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{2x}{1-x^2}}$ (iii) $\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$

(iv) $\sqrt{\sin nx}$ (v) $\cos(\sin x^3)$ (vi) $\sin^2 2x$

(vii) $\tan \sqrt{2x+1}$ (viii) $\sin\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{2}}$

(ix) $\tan\left\{e^{\sin^2 \frac{1}{2}x}\right\}$ (x) $\log \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$

(xi) $10^{x \log x}$ (xii) $\log(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})$

§ 4·6. **বিপরীত অপেক্ষকের অন্তরকলজ** (Derivative of inverse function) :

মনে কর $y=f(x)$ একটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক।

মনে কর অপেক্ষকটিকে x-এর জন্য সমাধান করিয়া $x=\phi(y)$ পাই।

$\phi(y)$-কে $f(x)$-এর বিপরীত অপেক্ষক বলে।

$\phi(y)$-কে y-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া $\dfrac{dx}{dy}$ নির্ণয় করা সম্ভব।

এক্ষণে $\dfrac{dy}{dx}$ এবং $\dfrac{dx}{dy}$-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করা হইবে।

যেহেতু $y=f(x)$ এবং $x=\phi(y)$, সুতরাং $x=\phi(y)=\phi\{f(x)\}$

এখন মনে কর $y=f(x)$-এ x-এর বৃদ্ধি Δx-এর জন্য y-এর বৃদ্ধি Δy,

অর্থাৎ $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$. $\therefore \dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

মনে কর $x=\phi(y)$-তে y-এর মানের Δy বৃদ্ধি করা হইল।

এখন x-এর মানের কত বৃদ্ধি হইবে তাহা নির্ণয় করা যাক্।

x-এর মানের বৃদ্ধি $=\phi(y+\Delta y)-\phi(y)=\phi\{f(x+\Delta x)\}-\phi\{f(x)\}$

$$=(x+\Delta x)-x \quad [\because \phi\{f(x)\}=x]$$

$$=\Delta x,$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$ (কারণ $\Delta y \to 0$ হইলে $\Delta x \to 0$ হইবে)

$$= \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \left(\frac{dy}{dx} \neq 0 \text{ ধরিয়া}\right) \quad \text{বা,} \quad \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1.$$

অতএব x-এর সাপেক্ষে y-এর পরিবর্তনের হার হইতেছে y-এর সাপেক্ষে x-এর পরিবর্তনের হারের অন্যোন্যক।

[দ্রষ্টব্য : উপরোক্ত সূত্রটি নিম্নলিখিতভাবে পাওয়া যায় :—

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$ সূত্রে $x = y$ বসাইয়া পাই $\frac{dy}{dy} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}$

বা, $1 = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dy}$ এক্ষণে $z = x$ ধরিয়া পাই $1 = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy}$।]

সূত্রটির সাহায্যে আরো কতকগুলি প্রাথমিক অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয় করা হইল।

উদা. 1. দেখাও যে যদি (i) $y = \log_e x$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

(ii) $y = \sin^{-1} x$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $y = \tan^{-1} x$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

(iv) $y = \sec^{-1} x$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(i) $\because \ y = \log_e x, \ \therefore \ x = e^y$ এখন $x = e^y$-এর y-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(e^y) = e^y \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$

(ii) $\because \ y = \sin^{-1} x, \quad \therefore \ x = \sin y$

$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \cos y = +\sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ [বর্গমূলের ধনাত্মক চিহ্ন লওয়া হইয়াছে, কারণ সংজ্ঞানুসারে

$\frac{-\pi}{2} \leqslant \sin^{-1} x < \frac{\pi}{2}$, $\therefore$ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $\therefore$ $\cos y > 0$]

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(iii) $\because$ $y = \tan^{-1} x$, $\therefore$ $x = \tan y$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2, \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

(iv) $\therefore$ $y = \sec^{-1} x$, $\therefore$ $x = \sec y$,

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \sec y . \tan y = x\sqrt{\sec^2 y - 1} = x\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 1 \div \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad \text{যখন} \quad |x| > 1.$$

অনুসিদ্ধান্ত :

$$\because \quad \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \quad \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2};$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

এই অন্তরকলজসমূহ $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\sec^{-1} x$-এর অন্তরকলজসমূহের সাহায্য ছাড়াও সরাসরি নির্ণয় করা যায়, ইহা প্রশ্নমালা 4(I)-তে অনুশীলনীরূপে করিতে দেওয়া হইল।

উদা. 2. (i) $y = \sqrt{x}$ অপেক্ষকের $x = 4$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ এবং ইহার বিপরীত অপেক্ষক $x = y^2$-এর $y = 2$ বিন্দুতে $\frac{dx}{dy}$ বাহির করিয়া প্রমাণ কর যে

$$\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1$$

(ii) $y=\dfrac{2x}{1+x}$ অপেক্ষকের জন্য $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ সূত্রটির যথার্থতা প্রমাণ কর।

(i) $\because\ y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\ \therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$\therefore\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

আবার $\because\ x=y^2,\ \therefore\ \dfrac{dx}{dy}=2y,\ \therefore\ \left(\dfrac{dx}{dy}\right)_{y=2}=2.2=4$

$$\therefore\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=4}\times\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=2}=\frac{1}{4}\times 4=1.$$

(ii) $\because\ y=\dfrac{2x}{1+x}\quad\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(1+x)\frac{d}{dx}(2x)-2x\frac{d}{dx}(1+x)}{(1+x)^2}$

$$=\frac{(1+x).2-2x.1}{(1+x)^2}=\frac{2}{(1+x)^2}.$$

এখন, $y=\dfrac{2x}{1+x}$ হইতে পাই, $y(1+x)=2x,$

বা, $(2-y)x=y,\quad\therefore\ x=\dfrac{y}{2-y}$

$$\therefore\ \frac{dx}{dy}=\frac{1.(2-y)-y.(-1)}{(2-y)^2}=\frac{2}{(2-y)^2}$$

$$=\frac{2}{\left(2-\frac{2x}{1+x}\right)^2}\quad [\ y\text{-এর মান বসাইয়া}\ ]$$

$$=\frac{2(1+x)^2}{(2+2x-2x)^2}=\frac{(1+x)^2}{2}=\frac{1}{\frac{2}{(1+x)^2}}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$\therefore\ \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$-এর যথার্থতা প্রমাণিত হইল।

উদা. 8. নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের অন্তরকলজ বাহির কর :

(i) $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ (ii) $\tan^{-1}(\cot x)$ (iii) $\sec^{-1}(\log x)$.

(i) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)=\frac{d}{du}(\sin^{-1}u).\frac{du}{dx}$, যেখানে $u=\frac{x}{a}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

(ii) $\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\cot x\right)\right\}=\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}u\right)$, যেখানে $u=\cot x$

$$=\frac{1}{1+u^2}.(-\mathrm{cosec}^2x)=\frac{1}{1+\cot^2x}.(-\mathrm{cosec}^2x)=-1.$$

(iii) $\frac{d}{dx}\left\{\sec^{-1}\left(\log x\right)\right\}=\frac{1}{\log x\sqrt{(\log x)^2-1}}.\frac{1}{x}.$

প্রশ্নমালা 4(I)

1. প্রমাণ কর যে,

(i) যদি $y=\cos^{-1}x$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $0\leq\cos^{-1}x\leq\pi$

(ii) যদি $y=\cot^{-1}x$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$.

(iii) যদি $y=\mathrm{cosec}^{-1}x$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2. $y=x^2+1$ অপেক্ষকের $x=2$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$-এর মান এবং $x=\sqrt{y-1}$ অপেক্ষকের $y=5$ বিন্দুতে $\frac{dx}{dy}$ বাহির করিয়া $\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dy}=1$ সূত্রের যথার্থতা দেখাও।

3. $\frac{dy}{dx}=1\div\left(\frac{dx}{dy}\right)$ সূত্রটির যথার্থতা নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির জন্য প্রমাণ কর :

(i) $y=3x+2$ (ii) $y=\sin(2x+1)$

(ii) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ (iv) $y=e^{x^2}$.

4. প্রমাণ কর যে :

(i) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)=\frac{a}{a^2+x^2}$, (ii) $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}\frac{x}{a}\right)=\frac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

(iii) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x^2)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

(iv) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(\sec x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$

(v) $\frac{d}{dx}\left\{\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right\}=\frac{2}{1+x^2}$

(vi) $\frac{d}{dx}\left\{\sin^{-1}\frac{a+b\cos x}{a-b\cos x}\right\}=\frac{-ab\sin x}{(a-b\cos x)\sqrt{-ab\cos x}}$

§ 4·7. **অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের** (Implicit function) **অন্তরকলজ :**

অনেক সময় দুইটি চলরাশি x এবং y-এর মধ্যে সম্পর্ক $f(x, y)=0$ আকারে দেওয়া থাকে। এখন যদি $f(x, y)=0$কে $y=\phi(x)$ বা $x=h(y)$ আকারে সমাধান করা যায়, তবে এই প্রত্যক্ষ সম্পর্ক হইতে $\frac{dy}{dx}$এর মান বাহির করা যায়। কিন্তু অনেক সময় $f(x, y)=0$কে এই $y=f(x)$ বা $x=\phi(y)$ আকারে সমাধান করা যায় না। এইসব ক্ষেত্রে yকে x-এর অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষক বলে। এইরূপ ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করিতে হইলে $f(x, y)=0$ অপেক্ষকের প্রত্যেকটি পদের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিতে হইবে। যে সব পদে y-এর অপেক্ষক আছে সেইগুলির y-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া $\frac{dy}{dx}$ দিয়া গুণ করিতে হইবে। এইরূপে $\frac{dy}{dx}$যুক্ত একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে এবং ঐ সমীকরণ হইতে $\frac{dy}{dx}$কে সমাধান করিতে হইবে। পদ্ধতিটি নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে বুঝান হইতেছে।

উদা. 1. যদি $x^2+y^2=a^2$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$-এর মান বাহির কর।

$x^2+y^2=a^2$-এর উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই $\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(a^2)$,

বা, $\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=0$ [$\because a^2=$ধ্রুবক]

বা, $2x+\frac{d}{dy}(y^2).\frac{dy}{dx}=0$,

বা, $2x+2y.\frac{dy}{dx}=0$, $\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$.

[এখানে $x^2+y^2=a^2$ সমীকরণকে সমাধান করিয়া $y=\sqrt{a^2-x^2}$ পাওয়া যায়।

এই সম্পর্ক হইতে আমরা পাই $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\sqrt{a^2-x^2})=\frac{d}{dx}\sqrt{u}$,

(যেখানে $u=a^2-x^2$)$=\frac{d}{du}\sqrt{u}.\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}.u^{-\frac{1}{2}}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{y}$.

$\therefore$ পদ্ধতিটির যথার্থতা প্রমাণিত হইল।]

উদা. 2. যদি $x^3+y^3=3xy$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় কর।

$x^3+y^3=3xy$-এর উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই, $\frac{d}{dx}(x^3+y^3)=\frac{d}{dx}(3xy)$

বা, $\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}(y^3)=3\left(x.\frac{dy}{dx}+1.y\right)$

বা, $3x^2+3y^2.\frac{dy}{dx}=3x\frac{dy}{dx}+3y$, বা, $(y^2 \quad x)\frac{dy}{dx}=y-x^2$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y^2-x}$.

উদা. 3. $x^m y^n=(x+y)^{m+n}$ হইলে দেখাও যে $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$. [C. U.]

প্রদত্ত সম্পর্কের উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{d}{dx}(x^m y^n)=\frac{d}{dx}(x+y)^{m+n}$$

বা, $x^m.\frac{d}{dx}(y^n)+y^n.\frac{d}{dx}(x^m)=(m+n)(x+y)^{m+n-1}\frac{d}{dx}(x+y)$,

বা, $x^m.ny^{n-1}\frac{dy}{dx}+y^n.mx^{m-1}=(m+n)(x+y)^{m+n-1}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$

বা, $\{(m+n)(x+y)^{m+n-1}-nx^m y^{n-1}\}\frac{dy}{dx}$

$=mx^{m-1}y^n-(m+n)(x+y)^{m+n-1}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{mx^{m-1}y^n-(m+n)(x+y)^{m+n-1}}{(m+n)(x+y)^{m+n-1}-nx^m y^{n-1}}$$

$$=\frac{mx^{m-1}y^n(x+y)-(m+n)x^m y^n}{(m+n)x^m y^n-nx^m y^{n-1}(x+y)}$$

[লব এবং হরকে $x+y$ দ্বারা গুণ করিয়া এব $(x+y)^{m+n}=x^m y^n$ বসাইয়া।]

$$=\frac{x^{m-1}y^{n-1}\{m.y(x+y)-(m+n)xy\}}{x^{m-1}y^{n-1}\{(m+n)xy-nx(x+y)\}}=\frac{(my-nx)y}{(my-nx)x}=\frac{y}{x}.$$

প্রশ্নমালা 4(J)

1. নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলি হইতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(i) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ (ii) $x^3y^4=(x+y)^7$ (iii) $y=(x+y)^2$

(iv) $\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m}=1$ (v) $ax^2+2hxy+by^2=1$ [a, b, h, (ধ্রুবক)]

(vi) $y=\sin(x+y)$ (vii) $x+y=\sin(xy)$

(viii) $xy=\sin(x+y)$ (ix) $x+y=\tan(xy)$

(x) $\sin 3x=\cos 4y$ (xi) $\log xy=x+y$

(xii) $e^{x+y}=xy$. (xiii) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

(xiv) $e^{xy}-2xy=4$.

§ 4·8. প্যারামেট্রিক সমীকরণ হইতে অন্তরকলজ নির্ণয় করা এবং লগারিদমিক্-অন্তরকলন (logarithmic differentiation) পদ্ধতি :

অনেক সময় x এবং y-এর সম্পর্ক আর একটি চলরাশির সাহায্যে দেওয়া থাকে। যেমন $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, এখানে x এবং y উভয়ই θ-র অপেক্ষক। আবার θ-অপনয়ন করিয়া পাই $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

$\therefore$ x এবং y-এর মধ্যে প্রত্যক্ষ সম্পর্ক আছে। x এবং y উভয়ই যদি আর একটি চলরাশির t-এর অপেক্ষক হয়, তবে ইহাকে x এবং y-এর প্যারামেট্রিক প্রকাশ (parametric expression of x and y) বলা হয়। t-কে প্যারামিটার বলা হয়।

মনে কর $x=f(t)$, $y=g(t)$.

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=f'(t) \quad \text{এবং} \quad \frac{dy}{dt}=g'(t)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{dy}{dt}\div\frac{dx}{dt}.$$

উদা. 1. $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, যেখানে প্যারামিটার হইতেছে θ.

$$\therefore \quad \frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta}=b\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\div\frac{dx}{d\theta}=\frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta}=-\frac{b}{a}\cot\theta.$$

উদা. 2. $y=at^2$, $x=2at$, $t=$ প্যারামিটার।

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt}=2at,\ \frac{dx}{dt}=2a.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\div\frac{dx}{dt}=\frac{2at}{2a}=t.$$

অনেক সময় কোন অপেক্ষক $y=f(x)$-এর উভয় দিকের লগারিদম্ লইয়া $f(x)$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করা সুবিধাজনক হয়। এইরূপ অন্তরকলজ নির্ণয় পদ্ধতিকে লগারিদমিক্-অন্তরকলন পদ্ধতি বলা হয়। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদা. 3. $y=x^x$ হইলে $\dfrac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় কর।

$y=x^x$-এর উভয় পক্ষের লগ্ লইয়া পাই, $\log y=\log x^x=x \log x$

উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{d}{dx}(\log\ y)=\frac{d}{dx}(x.\log x),$$

বা, $$\frac{d}{dy}(\log y).\frac{dy}{dx}=x.\frac{d}{dx}(\log x)+\log x.\frac{d}{dx}(x),$$

বা. $$\frac{1}{y}.\ \frac{dy}{dx}=x.\frac{1}{x}+\log x.1=1+\log\ x,$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=y(1+\log x)=x^x(1+\log x)=x^x \log (ex)$$

উদা. 4. $x^m y^n=(x+y)^{m+n}$ হইলে $\dfrac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় কর।

উভয় পক্ষের লগ লইয়া পাই,

$$m \log x+n \log y=(m+n) \log (x+y).$$

x-এর সাপেক্ষে উভয়পক্ষের অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$m.\frac{1}{x}+n.\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=(m+n).\frac{1}{x+y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right),$$

বা, $$\left(\frac{n}{y}-\frac{m+n}{x+y}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{m+n}{x+y}-\frac{m}{x},$$

বা, $$\frac{nx-my}{y(x+y)}\ \frac{dy}{dx}=\frac{nx-my}{x(x+y)}, \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

(আগের অনুচ্ছেদে ইহা অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অন্তরকলন পদ্ধতিতে নির্ণয় করা হইয়াছিল)।

উদা. 5. $(\sin x)^{\cos x}$-কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন কর।

মনে কর $y=(\sin x)^{\cos x}$

$\therefore \quad \log y=\log (\sin x)^{\cos x}=\cos x.\log (\sin x).$

x-এর সাপেক্ষে উভয়পক্ষের অন্তরকলজ লইয়া পাই,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=-\sin x.\log\sin x+\cos x.\frac{1}{\sin x}.\cos x$$

[কারণ $\frac{d}{dx}(\log\sin x)=\frac{d}{dx}\log u$, (যেখানে $u=\sin x$)

$=\frac{d}{du}(\log u)\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}.\cos x=\frac{1}{\sin x}.\cos x$]

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=y(-\sin x\log\sin x+\cos x.\cot x)$

$=(\sin x)^{\cos x}(-\sin x.\log\sin x+\cos x.\cot x).$

উদা. 6. $x^y=y^x$ হইলে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx}=\frac{y(x\log y-y)}{x(y\log x-x)}$ [C. U. '45]

$x^y=y^x$-এর উভয়পক্ষের লগারিদম্ লইয়া পাই,

$y\log x=x\log y.$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$y.\frac{1}{x}+\frac{dy}{dx}.\log x=1.\log y+x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}.$$

বা, $\left(\log x-\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx}=\log y-\frac{y}{x}$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y(x\log y-y)}{x(y\log x-x)}.$$

উদা. 7. $\frac{dy}{dx}$ বাহির কর যখন $y=x^3.\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2+3}}$ [C. U. '41]

$$\log y=3\log x+\tfrac{1}{2}\log (x^2+4)-\tfrac{1}{2}\log (x^2+3).$$

$$\therefore\quad \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=\frac{3}{x}+\frac{1}{2}.\frac{1}{x^2+4}.2x-\frac{1}{2}.\frac{1}{x^2+3}.2x$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=y\left[\frac{3}{x}+\frac{x}{x^2+4}-\frac{x}{x^2+3}\right]$$

$$=x^3.\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2+3}}.\left(\frac{3}{x}+\frac{x}{x^2+4}-\frac{x}{x^2+3}\right)$$

প্রশ্নমালা 4(K)

1. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(i) $x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta$, (ii) $x=a\sec\theta,\ y=b\tan\theta$

(iii) $x=\frac{3at}{1+t^2},\ y=\frac{3at^2}{1+t^2}$ (iv) $x=at,\ y=\frac{a}{t}$

(v) $x=a\cos^3\theta,\ y=b\sin^3\theta$

(vi) $x=a(t+\sin t),\ y=a(1-\cos t)$.

2. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(i) $y=x^{2x}$ (ii) $y=x^{\tan x}$ (iii) $y=(\cos x)^{\sin x}$

(iv) $y=x^{\log x}$ (v) $y=(x+y)^{x+y}$

(vi) $y=\sin x.e^x.x^x$ (vii) $y=\frac{x(x^2+4)^{\frac{1}{3}}}{(x^3+5)^{\frac{1}{4}}}$.

(viii) $x^y.y^x=a^b$ (ix) $y=(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)$.

(x) $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$.

3. যদি $y=u^v$ হয়, যেখানে u এবং v, x-এর অপেক্ষক, তবে দেখাও যে $\frac{dy}{dx}=u^v.\left(\frac{dv}{dx}.\ \log u+\frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right)$.

উপরোক্ত সূত্রের সাহায্যে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর যখন

(i) $y=(e^x)^{e^x}$ (ii) $y=(\log x)^x$ (ii) $y=(x^2+2)^{(x^3+3x+1)}$.

§ 4·9. পূর্বালোচনার সংক্ষিপ্তসার :

পূর্বের অনুচ্ছেদসমূহে অপেক্ষকের অন্তরকলজের সংজ্ঞা এবং বিভিন্ন অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয় করিবার পদ্ধতি শেখান হইয়াছে। পদ্ধতি-গুলিকে একত্রে দেওয়া হইল। $y=f(x)$ অপেক্ষকের অন্তরকলজ বা ডেরিভেটিভ্‌কে $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ইহার সংজ্ঞা হইতেছে $f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

প্রাথমিক অপেক্ষকগুলির অন্তরকলজসমূহ নিম্নে দেওয়া হইল :

$y=x^n$ হইলে $\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$, n-এর যে কোন মানের জন্য।

$y=e^x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=e^x$; $y=a^x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=a^x . \log_e a$

$y=\log x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$; $y=\sin x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=\cos x$;

$y=\cos x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=-\sin x$; $y=\tan x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=\sec^2 x$;

$y=\cot x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}^2 x$;

$y=\sec x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=\sec x . \tan x$;

$y=\operatorname{cosec} x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec} x . \cot x$;

$y=\sin^{-1} x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$y=\cos^{-1} x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$y=\tan^{-1} x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$;

$y=\cot^{-1} x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$;

$y=\sec^{-1} x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;

$y=\operatorname{cosec}^{-1} x$ হইলে $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

উপরোক্ত সূত্রগুলির সহিত নিম্নলিখিত সাধারণ নিয়মগুলি মনে রাখিতে হইবে।

যদি u এবং v, x-এর দুইটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক হয়, তবে

(i) $\frac{d}{dx}(cu)=c.\frac{du}{dx}$, যেখানে c একটি ধ্রুবক ;

(ii) $\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$; (iii) $\frac{d}{dx}(u-v)=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$.

(iv) $\frac{d}{dx}(u.v)=u.\frac{dv}{dx}+v.\frac{du}{dx}$

(v) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v.\frac{du}{dx}-u.\frac{dv}{dx}}{}$

(vi) যদি $y=f\{g(x)\}$ হয়, তবে

$$\frac{dy}{dx}=f'\{g(x)\}.\,g'(x),\quad \text{বা,}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \text{ যেখানে } u=g(x).$$

উপরোক্ত সূত্রসমূহ এবং নিয়মগুলির সাহায্যে যে কোন অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষকের অন্তরকলজ বাহির করা যায়। পূর্বের অনুচ্ছেদসমূহে সূত্রসমূহ এবং নিয়মগুলি প্রয়োগ করিয়া অপেক্ষকের অন্তরকলজ বাহির করিবার উপায় দেখান হইয়াছে।

§ 4·10. অন্তরকল বা ডিফারেন্সিয়াল (Differential) :

যদি $y=f(x)$ অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক হয়, তবে আমরা জানি যে,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x).\quad \text{মনে কর}\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)=\alpha.$$

$$\text{এক্ষণে}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)$$

[কারণ $f'(x)$, Δx নিরপেক্ষ]

$$=f'(x)-f'(x)=0.$$

সুতরাং আমরা লিখিতে পারি যে,

$$\Delta y=f'(x).\Delta x+\alpha.\Delta x, \text{ যেখানে } \alpha\to 0 \text{ যখন } \Delta x\to 0.$$

অতএব $f(x)$ অপেক্ষকের বৃদ্ধি Δy-এর দুইটি অংশ আছে। $f'(x).\Delta x$ অংশটিকে y-এর **ডিফারেন্সিয়াল** বা **অন্তরকল** বলা হয় এবং ইহাকে dy প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $dy=f'(x)\Delta x$।

এখন মনে কর $y=f(x)=x$ ধরা হইল। ∴ $f'(x)=1$, এবং $dx=1.\Delta x=\Delta x$. অতএব স্বাধীন চলের ডিফারেন্সিয়াল dx উহার বৃদ্ধি Δx-এর সমান।

সুতরাং যে কোন চল $y=f(x)$-এর জন্য $dy=f'(x).dx$ হইবে।

অতএব ডিফারেন্সিয়াল বা অন্তরকলের সংজ্ঞা নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া যায় :—

(i) স্বাধীন চল x-এর বৃদ্ধি Δxকে উহার ডিফারেন্সিয়াল dx-এর সমান ধরা হয় অর্থাৎ $dx=\Delta x$

(ii) অন্ত কোন চল $y=f(x)$-এর ডিফারেন্সিয়াল dy হইতেছে, ঐ চলের অন্তরকলজের সহিত স্বাধীনচল x-এর ডিফারেন্সিয়াল dx-এর গুণফল অর্থাৎ $dy=f'(x).dx$

[দ্রষ্টব্য : 1. dy, dx-এর সঙ্গে সমানুপাতিক (কারণ, $dy=k.dx$ যেখানে $k=f'(x)=dx$ নিরপেক্ষ রাশি)

এবং $\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta x}\to 0$ যখন $\Delta x\to 0$ ।

বিপরীতক্রমে দেখান যায় z যদি এমন একটি রাশি হয় যে

(i) z, Δx-এর সমানুপাতিক

(ii) $\dfrac{\Delta y-z}{\Delta x}\to 0$, যখন $\Delta x\to 0$ হয়,

তবে, z রাশিটি y-এর ডিফারেন্সিয়াল dy ভিন্ন অন্য কিছু নয়।

2. $y=f(x)$ অপেক্ষকের অন্তরকলজ $f'(x)$ হইতেছে dy এবং dx এই দুইটি অন্তরকলের অনুপাত অর্থাৎ $f'(x)=dy\div dx$

$\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}$-এর দুইটি অর্থ আছে। প্রথমক্ষেত্রে $\dfrac{dy}{dx}$ হইতেছে $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ এর সীমান্ত মান এবং দ্বিতীয়ক্ষেত্রে dy এবং dx অন্তরকলদ্বয়ের অনুপাত। যেহেতু উভয় ক্ষেত্রে একই মান পাওয়া যায়, সেজন্য আমরা $\dfrac{dy}{dx}$কে যে কোন অর্থে ব্যবহার করিতে পারি।

3. u এবং v যদি x-এর দুইটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক হয়, তবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$d(u+v)=du+dv,\quad d(u-v)=du-dv,$$

$$d(u.v)=udv+v.du,\ d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-u.dv}{v^2}.$$

4. $y=f(x)$ হইলে, $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$.

আবার, $\Delta y=f'(x).\Delta x+\alpha\Delta x$ যেখানে $\alpha\to 0$ যখন $\Delta x\to 0$.

$\therefore$ $f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$ ।

এখন Δxকে যথেষ্ট ক্ষুদ্র লইলে α রাশিটিও ক্ষুদ্র হইবে (কারণ $\alpha\to 0$ যখন $\Delta x\to 0$), সুতরাং $\alpha.\Delta x$ ক্ষুদ্রতর রাশি হইবে।

অতএব $\alpha.\Delta x$ এই ক্ষুদ্র রাশিটিকে বাদ দিয়া আমরা $f(x+\Delta x)$কে প্রায় $f(x)+f'(x).\Delta x$-এর সমান ধরিতে পারি,

অর্থাৎ $f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x).\,\Delta x$, যখন Δx খুব ছোট।

এই সূত্রের সাহায্যে কোন বিন্দুতে অপেক্ষকের মান জানা থাকিলে তাহার নিকটবর্তী বিন্দুসমূহে অপেক্ষকটির আসন্ন মান সহজেই বাহির করা যায়।

উদা. 1. x-এর Δx বৃদ্ধির জন্য $y=x^2$ অপেক্ষকের বৃদ্ধি Δy এবং অন্তরকল dy-এর মান নির্ণয় কর।

এখানে $y=f(x)=x^2$. $\quad\therefore\; f'(x)=2x$. এখন Δx বৃদ্ধির জন্য y-এর বৃদ্ধি, $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2$

$$=2x.\Delta x+(\Delta x)^2.$$

y-এর অন্তরকল $dy=f'(x).dx=2x.\Delta x$ [কারণ $\Delta x=dx$]

উদা. 2. নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের অন্তরকল নির্ণয় কর।

(i) $y=\sin x$ (ii) $y=\sqrt{1+x}$ (iii) $y=\sin\sqrt{x}$

(iv) $y=\sqrt{1+\log x}$.

(i) $dy=f'(x)dx=\cos x.dx$.

(ii) এখানে $f(x)=\sqrt{1+x}$, $\therefore\; f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$$\therefore\; dy=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx.$$

(iii) এখানে $f(x)=\sin\sqrt{x}$ $\quad\therefore\; f'(x)=\cos\sqrt{x}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\therefore\; dy=f'(x)dx=\cos\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$

লক্ষ্য কর $\sqrt{x}=u$ ধরিলে, $du=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.dx$, এবং $dy=\cos u.du$

(iv) $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\log x}}.\dfrac{1}{x}.dx$

উদা 3. নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের বৃদ্ধি এবং ডিফারেন্সিয়াল নির্ণয় কর,

(i) $f(x)=x^2+2x-1$ যখন x-এর মান 2 হইতে 2·1-এ পরিবর্তিত হইয়াছে।

(ii) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ যখন x-এর মান 3 হইতে 3·001-এ পরিবর্তিত হইয়াছে।

(i) এখানে $\Delta x = 2{\cdot}1 - 2 = {\cdot}1$, এবং $f(x) = x^2 + 2x - 1$,

$\therefore \quad f(2) = 2^2 + 2.2 - 1 = 7,\ f(2{\cdot}1) = (2{\cdot}1)^2 + 2(2{\cdot}1) - 1 = 7{\cdot}61$

$\therefore \quad \Delta y = f(2{\cdot}1) - f(2) = 7{\cdot}61 - 7 = {\cdot}61$

আবার $f'(x) = 2x + 2$

$\therefore \quad dy = f'(2).\Delta x = (2.2 + 2) \times {\cdot}1 = {\cdot}6.$

(ii) এখানে $\Delta x = 3{\cdot}001 - 3 = {\cdot}001,\ f(x) = \dfrac{2}{x-1}$,

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}, \quad x = 3.$$

$$\Delta y = f(3{\cdot}001) - f(3) = \frac{2}{2{\cdot}001} - \frac{2}{2} = -\frac{{\cdot}001}{2{\cdot}001} = -\frac{1}{2001}$$

$$dy = -\frac{2}{(3-1)^2} \times {\cdot}001 = -\frac{1}{2000}.$$

উদা. 4. $\log_{10} 200 = 2{\cdot}30103$ হইলে $\log_{10} 200{\cdot}2$-এর আসন্ন মান নির্ণয় কর (দেওয়া আছে $\log_{10}^{e} = {\cdot}43429$).

মনে কর, $y = \log_{10}^{x}$, $x = 200$ এবং $\Delta x = {\cdot}2$

$$\therefore \quad y = f(x) = \log_{10}^{x} = \frac{\log_e^{x}}{\log_e 10} = \log_e^{x}.\log_{10}^{e}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{1}{x} \times \log_{10}^{e} = {\cdot}43429 \times \frac{1}{x}$$

এখন যেহেতু $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x).\Delta x$,

$$f(200 + {\cdot}2) \simeq f(200) + f'(200) \times {\cdot}2$$

বা, $\log_{10} 200{\cdot}2 \simeq \log 200 + {\cdot}43429 \times \dfrac{1}{200} \times {\cdot}2$

$= 2{\cdot}30103 + {\cdot}00043429$

$= 2{\cdot}30146.$ (আসন্ন)

প্রশ্নমালা 4(L)

1. নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের অন্তরকল নির্ণয় কর :

(i) $y = x^3 - 2x + 5$ (ii) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(iii) $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (iv) $y = \dfrac{x}{c} - \dfrac{c}{x}$ (v) $y = \sqrt{1 + x^2}$

(vi) $y = x.\log x$ (vii) $y = \dfrac{x \log x}{1 - x} + \log(1 - x)$

(viii) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ (ix) $y = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$

(x) $y = e^x(\sin x + \cos x)$.

2. নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের বৃদ্ধি এবং ডিফারেন্সিয়াল নির্ণয় কর :

(i) $f(x)=x^2-x$, যখন x-এর মান 1 হইতে 1·01-এ পরিবর্তিত হয়।

(ii) $f(x)=\sin x$, যখন $x=\frac{\pi}{3}$ এবং $\Delta x=\frac{\pi}{18}$.

(iii) $f(x)=x^3+2x$, যখন $x=-1$, $\Delta x=·02$.

(iv) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ যখন x-এর মান 3 হইতে 3·2-এ পরিবর্তিত হয়।

3. দেওয়া আছে $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}=·866025$, এবং $\cos 60°=\frac{1}{2}$, $\sin 60°18'$ এবং $\cos 60°30'$-এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

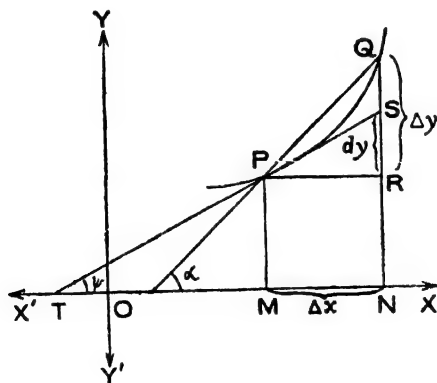
4. $\tan 45°4'30''$-এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

5. (i) $\log_{10}300=2·47712$ হইলে $\log_{10}300·3$-এর মান নির্ণয় কর।

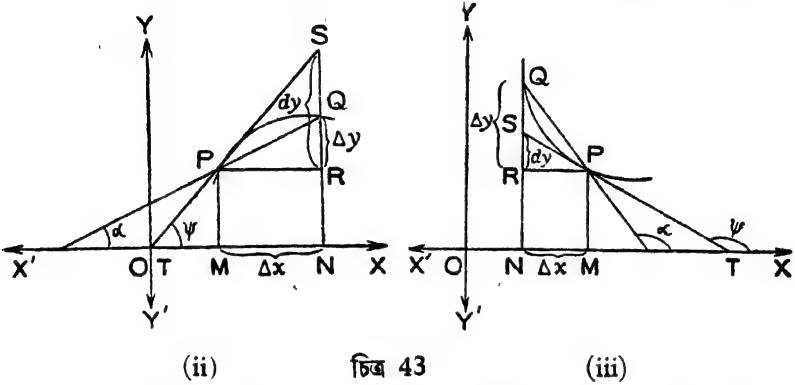
(ii) $\log_{10}540=3·73239$ হইলে $\log_{10}540·7$-এর মান বাহির কর।

(দেওয়া আছে $\log_{10}e=·43429$)

§ 4·11. অন্তরকলজ এবং অন্তরকলের জ্যামিতিক তাৎপর্য (Geometrical significances of derivative and differential) :

আমরা জানি x-কে ভুজ এবং y-কে কোটি ধরিয়া $y=f(x)$ অপেক্ষকের লেখচিত্র একটি বক্র (curve) হইবে। একটি সরলরেখাকে এই বক্রের স্পর্শক বলা হয়, যখন সরলরেখাটি বক্রকে দুইটি সমাপতিত (coincident) বিন্দুতে ছেদ করে।

চিত্র 43 (i)

সুতরাং কোন বক্রের উপরিস্থ P-বিন্দুতে স্পর্শক হইতেছে, ঐ বক্রের উপর অপর যে কোন বিন্দু Q-এর জন্য PQ জ্যায়ের সীমাস্থ অবস্থান PT, যখন Q বক্র বরাবর P বিন্দুর দিকে অগ্রসর হয়।

মনে কর $y=f(x)$ বক্রের P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং নিকটবর্তী Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x+\Delta x, y+\Delta y)$। মনে কর PQ জ্যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে α-কোণে নত। এখন Q যখন বক্র বরাবর P বিন্দুর দিকে অগ্রসর হইবে তখন PQ জ্যা-এর সীমান্ত অবস্থান PT হইতেছে P বিন্দুতে

(ii) চিত্র 43 (iii)

$y=f(x)$ বক্রের স্পর্শক। মনে কর PT, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে ψ কোণে নত। P এবং Q বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM এবং QN লম্ব অঙ্কন করা হইয়াছে। PR, QN-এর উপর লম্ব।

এখন $OM=x$, $ON=x+\Delta x$, $PM=y=RN$, $QN=y+\Delta y$.

$\therefore \quad MN=ON-OM=\Delta x$, $QR=QN-RN=\Delta y$, এবং

$\tan\alpha=\dfrac{QR}{PR}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. এক্ষণে, যখন $Q\to P$ হইবে তখন

$\Delta x\to 0$, PQ জ্যা→PT স্পর্শক, $\alpha\to\psi$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{Q\to P}\tan\alpha=\tan\psi.$$

বা, $f'(x)=\tan\psi$.

অতএব কোন বিন্দুতে $y=f(x)$-এর অন্তরকলজ $\dfrac{dy}{dx}$-এর জ্যামিতিক তাৎপর্য হইতেছে ঐ বিন্দুতে $y=f(x)$ বক্রের উপর অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যে কোণ (ψ) উৎপন্ন করে তাহার ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্ট ($\tan\psi$) (অর্থাৎ স্পর্শকের প্রবণতা)।

মনে কর P বিন্দুতে স্পর্শক PT, QNকে S বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন $m\angle SPR=m\angle PTM=\psi$.

সুতরাং, SR=PR tan SPR $=\Delta x \tan\psi = f'(x).\Delta x$

[উপরে প্রমাণিত]

$\therefore$ dy=SR [যেহেতু সংজ্ঞানুসারে $f'(x).\Delta x = dy$].

সুতরাং x-এর Δx বৃদ্ধির জন্য $y=f(x)$ অপেক্ষকের ডিফারেন্সিয়াল dy হইতেছে বক্রের x-ভুজ যুক্ত বিন্দু হইতে $x+\Delta x$ ভুজযুক্ত বিন্দু পর্যন্ত x-বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের কোটির বৃদ্ধি।

(Differential of a function $f(x)$ corresponding to an increment Δx of x is equal to the increment in the ordinate of the tangent line to the curve at the point x upto the point with abscissa $x+\Delta x$).

দ্রষ্টব্য : (1) $\dfrac{dy}{dx}$ হইতেছে $y=f(x)$ সমীকরণযুক্ত বক্রের (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা (slope)। সুতরাং বক্রের উপর (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের প্রবণতা হইতেছে $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$, $\left[\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}\right.$-এর অর্থ হইতেছে (x_1, y_1) বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx}$-এর মান]

$\therefore$ বক্রের উপরিস্থিত (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে,

$$y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}(x-x_1)।$$

(2) (x_1, y_1) বিন্দুতে বক্রের অভিলম্ব হইতেছে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব ভাবে অবস্থিত সরলরেখা।

সুতরাং (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইতেছে,

$$(y-y_1)=\left(-\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1, y_1)}(x-x_1)।$$

(3) চিত্রে QR হইতেছে y-এর বৃদ্ধি Δy এবং SR হইতেছে y-এর ডিফারেন্সিয়াল dy। চিত্র 43(i)-এ $\Delta y > dy$ এবং চিত্র 43(ii)-এ $\Delta y < dy$।

সুতরাং Δx বৃদ্ধির জন্য ডিফারেন্সিয়াল dy-এর মান Δy অপেক্ষা ছোট বা বড় উভয়ই হইতে পারে।

(4) লক্ষ্য কর চিত্র 43(i) এবং 43(ii)-এ x-এর মান বৃদ্ধি পাইলে y-এর মানও বাড়ে এবং ψ কোণটি সূক্ষ্ম কোণ; সুতরাং $\dfrac{dy}{dx}=\tan\psi>0$।

কিন্তু চিত্র-43(iii)-এ x-এর মান বৃদ্ধি পাইলে y-এর মান কমে, এবং ψ কোণটি স্থূল কোণ, সুতরাং $\tan\psi<0$।

অতএব আমরা লক্ষ্য করিতেছি যে যদি $\frac{dy}{dx}>0$ হয়, তবে x বৃদ্ধি পাইলে $y=f(x)$-এর মানও বৃদ্ধি পায় এবং $\frac{dy}{dx}<0$ হইলে x-এর মান বৃদ্ধি পাইলে $y=f(x)$-এর মান কমে।

§ 4·12. **দ্বিমাত্রিক অন্তরকলজ** (Second order derivative) :

মনে কর $y=f(x)$ একটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক। $f(x)$-এর অন্তরকলজ $f'(x)$, x-এর একটি অপেক্ষক। ∴ $f'(x)$-কে x-এর সাপেক্ষে আবার অন্তরকলন করা যায়। $f'(x)$-এর অন্তরকলজ (derivative)-কে $f(x)$-এর দ্বিতীয় মাত্রার বা ক্রমের অন্তরকলজ (second order derivative) বলে এবং $f''(x)$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। $f'(x)$-কে অনেক সময় প্রথম ডেরিভেটিভ বলা হয়। এখন $y=f(x)$-এর প্রথম ডেরিভেটিভ্ $\frac{dy}{dx}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। দ্বিতীয় ডেরিভেটিভ্‌কে $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ বা $\frac{d^2y}{dx^2}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং $y=f(x)$ অপেক্ষকের, প্রথম মাত্রার ডেরিভেটিভ্ $=\frac{dy}{dx}=f'(x)$,

$f(x)$-এর দ্বিতীয় মাত্রার ডেরিভেটিভ্ $=\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$

$=f'(x)$-এর ডেরিভেটিভ

উদাহরণ স্বরূপ. মনে কর $y=x^4$.

y-এর প্রথম ডেরিভেটিভ্ $=\frac{dy}{dx}=4x^3$

y-এর দ্বিতীয় মাত্রার ডেরিভেটিভ্ $=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(4x^3)=12x^2$.

দ্রষ্টব্য : (1) তৃতীয় মাত্রার ডেরিভেটিভ্ হইতেছে দ্বিতীয় মাত্রার ডেরিভেটিভের ডেরিভেটিভ্। সুতরাং,

তৃতীয় মাত্রার ডেরিভেটিভ্ $=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\Big($

অনুরূপে চতুর্থ মাত্রার ডেরিভেটিভ $=\dfrac{d^4y}{dx^4}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)$.

সাধারণ ভাবে n-তম মাত্রার ডেরিভেটিভ,

$$=\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

(2) $y=f(x)$-এর ডেরিভেটিভ্‌কে বিভিন্ন রকম প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেমন $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$, y_1, y', $D\{f(x)\}$, $D\{y\}$, Dy, ইত্যাদি। অনুরূপে $y=f(x)$-এর দ্বিতীয় মাত্রার ডেরিভেটিভ্‌কে $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $f''(x)$, y_2, y'', $D^2\{f(x)\}$, $D^2\{y\}$, D^2y ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সাধারণভাবে, $y=f(x)$-এর n-তম ডেরিভেটিভ্‌কে $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $f^n(x)$, y_n, $y^{(n)}$, $D^n\{f(x)\}$ $D^n\{y\}$, D^ny ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(3) x-এর dx বৃদ্ধির জন্য $y=f(x)$ অপেক্ষকের অন্তরকল বা ডিফারেন্সিয়াল হইতেছে $dy=f'(x).dx$। এখন $f'(x)$ হইতেছে x-এর অপেক্ষক এবং x-এর বৃদ্ধি dx, x-নিরপেক্ষ। $\therefore$ dyকে x-এর অপেক্ষক হিসাবে ধরা যায় এবং ইহার x-এর সাপেক্ষে অন্তরকল বাহির করা যায়। এই অন্তরকলের অন্তরকলকে দ্বিতীয় মাত্রার বা ক্রমের অন্তরকল বলা হয় এবং d^2y প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\therefore \quad d^2y=d(dy)=(dy)'.dx=\{f'(x).dx\}'.dx$

$=dx[f'(x)]'dx$ [$\because$ dx, x-নিরপেক্ষ উহা ডেরিভেটিভ্‌ চিহ্নের বাহিরে লওয়া যায়]

$=f''(x)(dx)^2$.

অনুরূপে ত্রিমাত্রিক ডিফারেন্সিয়াল হইতেছে

$d^3y=d(d^2y)=(d^2y)'.dx=\{f''(x)(dx)^2\}'dx=f'''(x)(dx)^3$

সাধারণভাবে n-তম মাত্রার ডিফারেন্সিয়াল

$d^ny=d\{d^{n-1}y\}=f^n(x)(dx)^n$.

উদা. 1. x-এর সাপেক্ষে দ্বিমাত্রিক অন্তরকলজ নির্ণয় কর যখন,

(i) $y=x^3-3x^2+4x+1$ (ii) $y=e^{x^2}$ (iii) $y=x.\sin x$.

(i) $\dfrac{dy}{dx}=3x^2-6x+4$;

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(3x^2-6x+4)=6x-6=6(x-1).$$

(ii) $\frac{dy}{dx}=e^{x^2}.2x=2x.e^{x^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(2x.e^{x^2}\right)$

$=2.e^{x^2}+2x.e^{x^2}.2x=2(1+2x^2)e^{x^2}$.

(iii) $\frac{dy}{dx}=1.\sin x+x\cos x=\sin x+x\cos x$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\cos x+1.\cos x+x(-\sin x)=2\cos x-x\sin x$.

উদা. 2. যদি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ হয়, তবে $\frac{d^2y}{dx^2}$-এর মান নির্ণয় কর।

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই

$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}.\frac{dy}{dx}=0$, বা, $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{a^2}.\frac{b^2}{y}=-\frac{b^2}{a^2}.\frac{x}{y}$.

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{b^2}{a^2}.\frac{x}{y}\right)=-\frac{b^2}{a^2}.\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}.\frac{y.\frac{d}{dx}(x)-x.\frac{d}{dx}(y)}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}.\frac{y\frac{d}{dx}(x)-x\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}.\frac{y.1-x.\left(-\frac{b^2}{a^2}.\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}.\frac{a^2y^2+x^2b^2}{a^2y^3}$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}.\frac{a^2b^2}{a^2y^3} \quad \left[\because \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\right.$$

সুতরাং $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$]

$$=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

উদা. 3. $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\phi'(t).\psi''(t)-\psi'(t).\phi''(t)}{\{\phi'(t)\}^3}.$$

উপরোক্ত সূত্র হইতে $\frac{d^2y}{dx^2}$-এর মান নির্ণয় কর যখন

(i) $x=a\cos t$, $y=b\sin t$

(ii) $x=a\cos 2t$, $y=b\sin^2 t$.

একক্ষণে, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right\}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\psi''(t).\phi'(t)-\psi'(t).\phi''(t)}{\{\phi'(t)\}^2}\cdot\frac{1}{\phi'(t)}=\frac{\phi'(t)\psi''(t)-\psi'(t).\phi''(t)}{\{\phi'(t)\}^3}$$

(i) $x=a\cos t, \quad \therefore \quad x'=\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\ x''=-a\cos t$

$y=b\sin t, \quad \therefore \quad y'=\frac{dy}{dt}=b\cos t,\ y''=-b\sin t.$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x'y''-y'x''}{(x')^3}$$

$$=\frac{(-a\sin t).(-b\sin t)-(b\cos t).(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3}$$

$$=\frac{ab(\cos^2t+\sin^2t)}{-a^3\sin^3t}=-\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^3t}.$$

(ii) $x=a\cos 2t,\ x'=-2a\sin 2t,\ x''=-4a\cos 2t$

$y=b\sin^2t,\ y'=2b\sin t.\cos t=b\sin 2t,\ y''=2b\cos 2t$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x'y''-x''y'}{(x')^3}$$

$$=\frac{-2a\sin 2t.2b\cos 2t-(-4a\cos 2t).\ b\sin 2t}{(-2a\sin 2t)^3}=0$$

উদা. 4. যদি $y=ae^x+be^{2x}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0.$$

এক্ষণে, $y=ae^x+be^{2x},\quad \frac{dy}{dx}=ae^x+2be^{2x},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=ae^x+4be^{2x}$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=ae^x+4be^{2x}-3(ae^x+2be^{2x})$$
$$+2(ae^x+be^{2x})=0.$$

উদা. 5. $y=\sin(m\sin^{-1}x)$ হইলে দেখাও যে,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+m^2y=0.$$

$\because \quad y=\sin(m\sin^{-1}x), \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\cos(m\sin^{-1}x).\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx}=m\cos(m\sin^{-1}x)$.

x-এর সাপেক্ষে পুনরায় অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\frac{dy}{dx}$$

$$=-m\sin(m\sin^{-1}x).\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

বা, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+m^2y=0$ $\left[\because\ y=\sin(m\sin^{-1}x)\right]$

উদা. 6. $y=x^3-3x^2-x+4$ বক্রের (3, 1) বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে, $\frac{dy}{dx}=3x^2-6x-1$, $\therefore$ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(3,\ 1)}=3.3^2-6.3-1=8.$

সুতরাং বক্রস্থিত (3, 1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইতেছে

$$y-1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(3,1)}(x-3)$$

বা, $y-1=8(x-3)$, বা, $8x-y-23=0$.

(3, 1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইতেছে

$y-1=-\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(3,1)}(x-3)$ বা, $y-1=-\frac{1}{8}(x-3)$

বা, $x+8y-11=0$.

উদা. 7. দেখাও যে,

(i) $f(x)=x^3-x^2-2x$ অপেক্ষক $x=1$ বিন্দুতে ক্ষীয়মাণ এবং $x=2$ বিন্দুতে বর্ধমান (increasing)।

(ii) $f(x)=x^3-6x^2+12x-1$ অপেক্ষক সর্বদা বর্ধমান (increasing)

(i) $\because$ $f(x)=x^3-x^2-2x$, $\therefore$ $f'(x)=3x^2-2x-2$

এক্ষণে, $f'(1)=3.1^2-2.1-2=-1<0$।

$\therefore$ $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ ক্ষীয়মান।

$f'(2)=3.2^2-2.2-2=6>0$

$\therefore$ $x=2$ বিন্দুতে $f(x)$ বর্ধমান।

(ii) $\because$ $f(x)=x^3-6x^2+12x-1$,

$\therefore$ $f'(x)=3x^2-12x+12=3(x^2-4x+4)=3(x-2)^2>0$

$\therefore$ x-এর যে কোন মানের জন্য $f(x)$-অপেক্ষক বর্ধমান।

উদা. 8. $f(x)=2x^3-15x^2+36x+2$ অপেক্ষকটি কোন্ বিস্তারে বর্ধমান ও কোন্ বিস্তারে ক্ষীয়মাণ নির্ণয় কর।

$$f(x)=2x^3-15x^2+36x+2$$

$$\therefore \quad f'(x)=6x^2-30x+36=6(x^2-5x+6)=6(x-2)(x-3).$$

এক্ষণে, $2<x<3$ হইলে $x-2$ ধনাত্মক এবং $x-3$ ঋণাত্মক, সুতরাং $6(x-2)(x-3)$ ঋণাত্মক। অতএব, $2<x<3$ বিস্তারে অপেক্ষকটি ক্ষীয়মাণ, অন্যত্র অপেক্ষকটি বর্ধমান।

প্রশ্নমালা 4(M)

1. নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহে দ্বিমাত্রিক অন্তরকলজ (second order derivative) নির্ণয় কর :

(i) $y=x^2-3x+4$ (ii) $y=ax^2+bx+c$ (iii) $y=\dfrac{1}{x}$

(iv) $y=x\sin x+\cos x$ (v) $y=ax^n+\dfrac{b}{x^n}$

(vi) $y=\log\sin x$ (vii) $y=x\log x-x$ (viii) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$-এর মান নির্ণয় কর :

(i) $y^2=4ax$ (ii) $x^2+y^2=a^2$ (iii) $xy=c^2$

(iv) $x^my^n=(x+y)^{m+n}$.

3. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রসমূহে $\dfrac{d^2y}{dx^2}$-এর মান নির্ণয় কর :

(i) $x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta$, (প্যারামিটার$=\theta$)

(ii) $x=a\sec\theta,\ y=b\tan\theta$, (iii) $x=at,\ y=\dfrac{a}{t}$,

($t=$প্যারামিটার)

(iv) $x=a\cos^3\theta,\ y=b\sin^3\theta$, (v) $x=a(t+\sin t)$,

$y=a(1-\cos t)$

(vi) $x=\dfrac{3at}{1+t^2},\quad y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}$.

4. দেখাও যে,

(i) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ হইলে $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-2y=0$

(ii) $y=c_1 \sin nx+c_2 \cos nx$ হইলে $\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0$

(iii) $y=a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$ হইলে $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$

(iv) $y(1-x)=x^2$ হইলে, $(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=2$

(v) $y=\sin^{-1}x$ হইলে, $(1-x^2)y_2-xy_1=0$

(vi) $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\left(\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{27}x+\frac{5}{81}\right)e^{3x}$ হইলে $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=(x^2+1)e^{3x}$.

(vii) $y=c_1e^{mx}+c_2e^{-mx}$ হইলে, $\frac{d^2y}{dx^2}-m^2y=0$

(viii) $y=\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$ হইলে, $(a^2+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}=0$

(ix) $y=(x+\sqrt{1+x^2})^m$ হইলে,

$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-m^2y=0$

(x) $y=(\sin^{-1}x)^2$ হইলে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-2=0$

(xi) $y=e^{\tan^{-1}x}$ হইলে, $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(2x-1)\frac{dy}{dx}=0$.

5. $y=x^4-3x^2+4$ সমীকরণযুক্ত বক্রের $(1, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের উপরিস্থ $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. দেখাও যে,

(a, b) বিন্দুতে $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$ বক্রের স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$;

উক্ত বিন্দুতে বক্রের অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর।

8. দেখাও যে $f(x)=x^2-3x+1$ অপেক্ষক $x=1$ বিন্দুতে ক্ষীয়মাণ (decreasing) কিন্তু $x=2$ বিন্দুতে বর্ধমান।

9. দেখাও যে, (i) $3x(x^2+x+1)$ অপেক্ষক x-এর সকল মানের জন্য বর্ধমান (increasing)।

(ii) $-3x-x^3$, x-এর সকল মানের জন্য ক্ষীয়মাণ।

10. দেখাও যে, $y=x\sin x+\cos x$ অপেক্ষক $0<x<\frac{\pi}{2}$ বিস্তারে বর্ধমান কিন্তু $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ বিস্তারে ক্ষীয়মাণ।

11. (i) নিম্নের অপেক্ষকসমূহ x-এর মান কোন্ বিস্তারে থাকিলে ক্ষীয়মাণ হয় তাহা নির্ণয় কর।

(a) $x^3-3x^2-24x+29$ (b) $2x^3-9x^2+12x+7$

(ii) $6x^2-9x-x^3$ অপেক্ষকটি x-এর মান কোন্ বিস্তারে থাকিলে বর্ধমান হয় তাহা নির্ণয় কর।

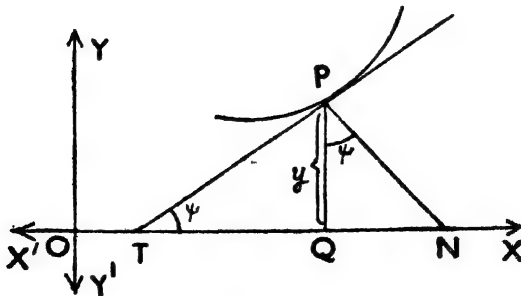
§ 4·18. অন্তরকলজের বিবিধ প্রয়োগ :

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদসমূহে $y=f(x)$ অপেক্ষকের অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx}$-এর দুই রকম তাৎপর্য দেওয়া হইয়াছে, যথা,

(i) $\frac{dy}{dx}$ হইতেছে x-এর সাপেক্ষে y-এর পরিবর্তনের হার (rate of change of y with respect to x).

(ii) $\frac{dy}{dx}$ হইতেছে $y=f(x)$ অপেক্ষকের লেখ চিত্রের x-ভুজযুক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা।

তাৎপর্য-(i)-এর সাহায্যে গতিবেগ, ত্বরণ ইত্যাদি বহুবিধ ধারণার সংজ্ঞা সহজেই দেওয়া যায়, তাৎপর্য (ii)-এর সাহায্যে বক্রের বিভিন্ন জ্যামিতিক ধর্মের আলোচনা করা যায়। নিম্নে $\frac{dy}{dx}$-এর কয়েকটি প্রয়োগ দেখান হইতেছে।

(A) উপস্পর্শক এবং উপঅভিলম্ব (Sub-tangent and sub-normal) : বক্রের কোন বিন্দু P-এ অঙ্কিত স্পর্শক এবং অভিলম্ব যদি

চিত্র 44

x-অক্ষকে যথাক্রমে T এবং N বিন্দুতে ছেদ করে, তবে PT এবং PNকে যথাক্রমে

স্পর্শকের দৈর্ঘ্য (length of the tangent) এবং অভিলম্বের দৈর্ঘ্য (length of the normal) বলে।

এই দৈর্ঘ্যদ্বয়ের x-অক্ষের উপর লম্ব অভিক্ষেপকে যথাক্রমে উপস্পর্শক এবং উপঅভিলম্ব বলে। চিত্রে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং অভিলম্ব x-অক্ষকে যথাক্রমে T এবং N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং P বিন্দু হইতে অঙ্কিত কোটি Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। PTকে বলা হয় স্পর্শকের দৈর্ঘ্য, PNকে অভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং TQকে উপস্পর্শক (sub-tangent) ও QNকে উপ-অভিলম্ব (sub-normal) বলা হয়।

যদি P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হয়, তবে $PQ=y$ এবং

$\tan PTQ=\tan\psi=\dfrac{dy}{dx}$। সুতরাং,

$$\text{স্পর্শকের দৈর্ঘ্য}=PT=\frac{PT}{PQ}.PQ=y\ \operatorname{cosec}\psi=y\sqrt{1+\cot^2\psi}$$

$$=y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\frac{y\sqrt{1+y_1^2}}{y_1}\ \text{যেখানে}\ y_1=\frac{dy}{dx}.$$

$$\text{অভিলম্বের দৈর্ঘ্য}=PN=\frac{PN}{PQ}.PQ=y\sec\psi=y\sqrt{1+\tan^2\psi}$$

$$=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=y\sqrt{1+y_1^2}.$$

$$\text{উপ-স্পর্শক}=TQ=\frac{TQ}{PQ}.PQ=y\cot\psi=y.\frac{dx}{dy}=\frac{y}{y_1}.$$

$$\text{উপ-অভিলম্ব}=QN=\frac{QN}{PQ}.PQ=y\tan\psi=y.\frac{dy}{dx}=y.y_1.$$

উদা. 1. (1, 2) বিন্দুতে $y=x+x^3$ বক্রের স্পর্শক এবং অভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপস্পর্শক ও উপ-অভিলম্ব নির্ণয় কর।

$\because\ y=x+x^3$, $\therefore\ y_1=1+3x^2$। অতএব (1, 2) বিন্দুতে $y_1=1+3.1^2=1+3=4$. সুতরাং

$$\text{স্পর্শকের দৈর্ঘ্য}=\frac{y\sqrt{1+y_1^2}}{y_1}=\frac{2\sqrt{1+16}}{4}=\tfrac{1}{2}\sqrt{17}.$$

$$\text{অভিলম্বের দৈর্ঘ্য}=y\sqrt{1+y_1^2}=2\sqrt{1+16}=2\sqrt{17}.$$

$$\text{উপ-স্পর্শক}=\frac{y}{y_1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad \text{উপ-অভিলম্ব}=y.y_1=2.4=8.$$

উদা. 2. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে কোন বিন্দু (x, y)-এ স্পর্শক এবং অভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপ-স্পর্শক ও উপ-অভিলম্ব নির্ণয় কর।

$$\because \quad y^2=4ax, \quad \therefore \quad 2yy_1=4a\,; \quad \therefore \quad y_1=\frac{2a}{y}.$$

$$\text{স্পর্শকের দৈর্ঘ্য}=\frac{y\sqrt{1+y_1^2}}{y_1}=\frac{y\sqrt{1+\frac{4a^2}{y^2}}}{\frac{2a}{y}}=\frac{y^2}{2a}\sqrt{1+\frac{4a^2}{4ax}}$$

$$=\frac{4ax}{2a}\cdot\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x(x+a)}.$$

$$\text{অভিলম্বের দৈর্ঘ্য}=y\sqrt{1+y_1^2}=y\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{ax}}{\sqrt{x}}\sqrt{x+a}$$

$$=2\sqrt{a(x+a)}.$$

$$\text{উপস্পর্শক}=\frac{y}{y_1}=\frac{y}{\frac{2a}{y}}=\frac{y^2}{2a}=\frac{4ax}{2a}=2x.$$

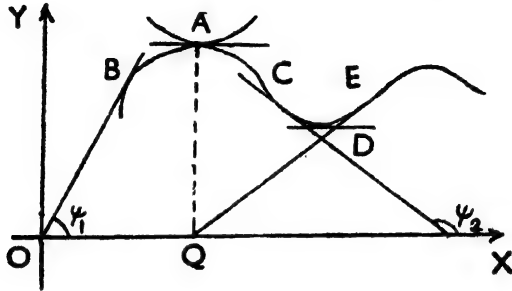
$$\text{উপ-অভিলম্ব}=yy_1=y.\frac{2a}{y}=2a.$$

(B) অপেক্ষকের চরম (maxima) এবং অবম (minima) মান :

চরম মান : কোন সন্তত অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রে অবস্থিত $x=a$ বিন্দুতে ঐ অপেক্ষকের চরম মান আছে বলা হয়, যদি ঐ বিন্দুকে অন্তর্গত করিয়া একটি বিস্তার পাওয়া যায়, যেখানে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর মান বৃহত্তম হইবে। সুতরাং $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর চরম মান আছে বলা হইবে যদি a-বিন্দুকে অন্তর্গত করিয়া একটি বিস্তার $a-h<x<a+h$ পাওয়া যায়, যে বিস্তারে $f(x)$-এর বৃহত্তম মান হইবে $f(a)$, অর্থাৎ, $a-h<x<a+h$এর অন্তর্গত যে কোন বিন্দু x-এর জন্য $f(x)<f(a)$ হইবে।

যদি $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর চরম মান থাকে এবং ঐ বিন্দুতে $f(x)$ অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে $f'(a)=0$ হইবে ; কারণ, যদি $f'(a)>0$ হয়, তবে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ বর্ধমান (increasing) এবং সেইহেতু a-এর নিকটবর্তী যে কোন মান $x>a$-এর জন্য $f(x)>f(a)$ হইবে, অর্থাৎ $x=a$ বিন্দুকে অন্তর্গত করিয়া কোন বিস্তার পাওয়া যাইবে না যেখানে $f(x)$-এর সর্বোচ্চ মান $f(a)$। অনুরূপে $f'(a)<0$ হইলে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ ক্ষীয়মাণ

(decreasing) হইবে এবং যে কোন $x<a$-এর জন্য $f(x)>f(a)$ হইবে, অর্থাৎ a-এর নিকটবর্তী বিন্দুসমূহের জন্য $f(x)$-এর বৃহত্তম মান $f(a)$ হইবে না।

এখন $f'(a)=0$ হইলে $x=a$ বিন্দুতে $y=f(x)$ বক্রের স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হইবে। চিত্র 45-এ লক্ষ্য কর A বিন্দুতে $f(x)$-এর বৃহত্তম মান আছে, নিকটবর্তী বিন্দু B এবং C-তে $f(x)$-এর মান $f(a)$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

চিত্র 45

B-বিন্দুতে স্পর্শকের x-অক্ষের সঙ্গে নতি $\psi_1<90°$ এবং C-বিন্দুতে স্পর্শকের নতি $\psi_2>90°$। সুতরাং $\tan\psi_1>0$ এবং $\tan\psi_2<0$, অর্থাৎ B-বিন্দুতে $\tan\psi>0$ এবং C-বিন্দুতে $\tan\psi<0$। অতএব, A-বিন্দুতে চরম মান থাকিলে, A-এর নিকটবর্তী বাম পার্শ্বের বিন্দুসমূহে $\tan\psi>0$, এবং A বিন্দুর নিকটবর্তী ডানপার্শ্বের বিন্দুসমূহে $\tan\psi<0$। যেহেতু $\tan\psi=\dfrac{dy}{dx}$, অতএব বলা যায়, চরম বিন্দুর বামপার্শ্ব হইতে ডানপার্শ্বে যাইলে $\dfrac{dy}{dx}$-এর মান ধনাত্মক হইতে ঋণাত্মক হইবে, অর্থাৎ $\dfrac{dy}{dx}$-এর মান $x=a$ বিন্দুতে ক্ষীয়মাণ। সুতরাং $x=a$ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx}$-এর অন্তরকলজ অর্থাৎ

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ হইবে।

উপরোক্ত আলোচনা নিম্নলিখিত ভাবে বিবৃত করা যায় :

$x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর চরম মান (maxima) থাকিবে যদি

(i) $f'(a)=0$ এবং (ii) $f''(a)<0$ হয়।

অবম মান : $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর অবম মান আছে বলা হইবে যদি $x=a$ বিন্দুকে অন্তর্গত করিয়া একটি বিস্তার পাওয়া যায় যেখানে $f(x)$-এর

ক্ষুদ্রতম মান হইবে $f(a)$, অর্থাৎ ঐ বিস্তারের যে কোন বিন্দু x-এর জন্য $f(x)>f(a)$ হইবে। চিত্র 45-এ দেখ D-বিন্দুতে $f(x)$-এর অবম মান (minima) আছে। D বিন্দুর বাম পার্শ্বে অবস্থিত C বিন্দুতে $\tan\psi<0$ এবং ডান পার্শ্বে অবস্থিত E বিন্দুতে $\tan\psi>0$ এবং D-বিন্দুতে $\tan\psi=0$। অতএব, অবম বিন্দুর বামপার্শ্ব হইতে ডানপার্শ্বে যাইলে $\tan\psi$-এর মান ঋণাত্মক হইতে ধনাত্মক হইবে। সুতরাং পূর্বের ন্যায় প্রমাণ করা যাইবে যে, $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর অবম মান থাকিবে যদি (i) $f'(a)=0$ এবং (ii) $f''(a)>0$ হয়।

দ্রষ্টব্য : (i) কোন অপেক্ষক $f(x)$-এর $x=a$ বিন্দুতে চরম বা অবম মান থাকিলে, এক কথায় বলা হয় $x=a$ বিন্দুতে উহার প্রান্তিক মান (extremum) আছে। যদি $x=a$ বিন্দুতে প্রান্তিক মান থাকে, তবে $f'(a)=0$ এবং $f''(a)\neq 0$ হইবে, এবং $f''(a)<0$ হইলে প্রান্তিক মানটি চরম মান হইবে, $f''(a)>0$ হইলে প্রান্তিক মানটি অবম মান হইবে।

$x=a$ বিন্দুতে চরম বা অবম মান থাকিলে ঐ বিন্দুটিকে চরম বা অবম বিন্দু বলা হয়।

(ii) $f'(a)=0$ এবং $f''(a)=0$ হইলে $x=a$ বিন্দুতে প্রান্তিক মান নাও থাকিতে পারে। $x=a$ বিন্দুতে প্রান্তিক মান থাকিবার সাধারণ শর্ত নিম্নে দেওয়া হইল।

যদি, $f'(a)=f''(a)=\cdots\cdots=f^{n-1}(a)=0$, $f^{n}(a)\neq 0$ হয়, তবে n যুগ্ম হইলে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর প্রান্তিক মান থাকিবে এবং $f^{n}(a)>0$ হইলে প্রান্তিক মানটি অবম মান হইবে, $f^{n}(a)<0$ হইলে প্রান্তিক মানটি চরম মান হইবে। n অযুগ্ম (odd) হইলে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর প্রান্তিক মান থাকিবে না।

(iii) $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর চরম মান থাকিলে, $f(a)$, $f(x)$-এর বৃহত্তম মান নাও হইতে পারে। $x=a$ বিন্দুতে চরম মান থাকার অর্থ $x=a$ বিন্দুকে অন্তর্গত করিয়া একটি বিস্তারে $f(x)$-এর বৃহত্তম মান $f(a)$ হইবে। ঐ বিস্তারের বাহিরে $f(x)$-এর $f(a)$ অপেক্ষা বৃহত্তর মান থাকিতে পারে। অনুরূপে $f(x)$-এর অবম মানের অর্থ $f(x)$-এর ক্ষুদ্রতম মান নহে।

প্রকৃতপক্ষে কোন অপেক্ষকের একাধিক চরম বা অবম মান থাকিতে পারে, কিন্তু বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম মান থাকিলে, ঐরূপ মান একটি মাত্রই থাকিবে।

উদা. 1. $y=6-x^2-x^3-\frac{1}{4}x^4$-এর চরম এবং অবম মান-সমূহ নির্ণয় কর।

$$\because \quad y=6-x^2-x^3-\tfrac{1}{4}x^4 \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=-2x-3x^2-x^3$$

এবং $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-2-6x-3x^2$.

প্রান্তিক মানের জন্য $\dfrac{dy}{dx}=0$ ধরিয়া পাই, $-2x-3x^2-x^3=0$,

বা, $-x(x+1)(x+2)=0$. $\therefore$ $x=0, -1, -2$, এই সকল বিন্দুতে প্রান্তিক মান থাকিতে পারে।

এক্ষণে $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=-1}=-2+6-3=1>0$, অতএব $x=-1$ বিন্দুতে y-এর অবম মান আছে।

$\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=-2}=-2+12-12=-2<0$, অতএব $x=-2$ বিন্দুতে y-এর চরম মান আছে।

আবার $x=0$ বিন্দুতে $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)=-2<0$

$\therefore$ $x=0$ বিন্দুতে y এর চরম মান আছে।

উদা. 2, দেখাও যে $3\sin x+4\cos x$-এর চরম মান $+5$ এবং অবম মান -5.

মনে কর $y=3\sin x+4\cos x$. $\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}=3\cos x-4\sin x$,

$\dfrac{dy}{dx}=0$ ধরিয়া পাই $3\cos x-4\sin x=0$

বা, $\dfrac{\sin x}{3}=\dfrac{\cos x}{4}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{1}{5}$.

$\therefore$ $\sin x=\pm\frac{3}{5}$ এবং $\cos x=\pm\frac{4}{5}$ হইলে y-এর প্রান্তিক মান থাকিতে পারে। এক্ষণে, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-3\sin x-4\cos x$.

যখন $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$, তখন $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{9}{5} - \frac{16}{5} = -5 < 0.$

$\therefore$ $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$-এর জন্য y-এর চরম মান আছে এবং চরম মানটি হইতেছে $y = 3\sin x + 4\cos x = 3.\frac{3}{5} + 4.\frac{4}{5} = +5$

আবার যখন $\sin x = -\frac{3}{5}$, $\cos x = -\frac{4}{5}$, তখন

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5 > 0.$$

$\therefore$ $\sin x = -\frac{3}{5}$, $\cos x = -\frac{4}{5}$-এর জন্য y-এর অবম মান আছে এবং অবম মানটি হইল $y = 3(-\frac{3}{5}) + 4(-\frac{4}{5}) = -5.$

প্রশ্নমালা 4(N)

1. $y = \frac{1}{6}x^2(1+2x)$ বক্রের $x=1$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপস্পর্শক ও উপঅভিলম্ব নির্ণয় কর।

2. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ বক্রের $\theta = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উপস্পর্শক, ও উপঅভিলম্ব নির্ণয় কর।

3. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ বক্রের যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উপস্পর্শক ও উপঅভিলম্ব নির্ণয় কর।

4. দেখাও যে $y = a^x$ বক্রের যে কোন বিন্দুতে উপস্পর্শক-এর মান ধ্রুবক।

5. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$-এর চরম এবং অবম মান বাহির কর।

6. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির চরম এবং অবম মান নির্ণয় কর :

(i) $y = \sin x + \sin^2 x$, (ii) $y = \sin x + \cos^2 x$

(iii) $y = \cos^2 x - \cos x$.

7. দেখাও যে $y = a\cos x + b\sin x$-এর চরম মান $+\sqrt{a^2+b^2}$ এবং অবম মান $-\sqrt{a^2+b^2}$.

বিবিধ উদাহরণমালা

উদা. 1. $y = \{f(x)\}^n$ এবং $f(x)$ অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক হইলে দেখাও যে $\frac{dy}{dx} = n\{f(x)\}^{n-1}.f'(x)$

উপযোক্ত সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

(i) $y = (x^2+4)^{10}$ (ii) $\sqrt[3]{x^2+1}$ (iii) $\frac{1}{(x+1)^2}$

(iv) $\sin^4 x$ (v) $(\log x)^{\frac{3}{2}}$ (vi) $(\sec^{-1}x)^3$

$y=\{f(x)\}^n=u^n$ যেখানে $u=f(x)$. $\therefore \dfrac{dy}{du}=nu^{n-1}, \dfrac{du}{dx}=f'(x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=nu^{n-1}.f'(x)=n\{f(x)\}^{n-1}.f'(x).$$

(i) $y=(x^2+4)^{10}$. এখানে $n=10$ এবং $f(x)=x^2+4$

$\therefore f'(x)=2x.\quad \therefore \dfrac{dy}{dx}=10(x^2+4)^9.2x=20x(x^2+4)^9.$

(ii) $y=(x^2+1)^{\frac{1}{3}}$, $\therefore \dfrac{dy}{dx}=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1}.2x=\dfrac{2x}{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$

(iii) $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}=(x+1)^{-2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-2(x+1)^{-2-1}.1=\dfrac{-2}{(x+1)^3}.$

(iv) $y=\sin^4 x=(\sin x)^4$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=4(\sin x)^{4-1}.\cos x=4\cos x\sin^3 x.$

(v) $\because y=(\log x)^{\frac{3}{2}}$, $\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{2}(\log x)^{\frac{3}{2}-1}.(\log x)'$

$$=\frac{3}{2}.\frac{1}{x}.\sqrt{\log x}.$$

(vi) $\because y=(\sec^{-1}x)^3$, $\therefore \dfrac{dy}{dx}=3(\sec^{-1}x)^{3-1}.(\sec^{-1}x)'$

$$=3(\sec^{-1}x)^2.\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

উদা. 2. $y=\log f(x)$ হইলে দেখাও যে $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, যেখানে $f(x)$ একটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক।

উপরোক্ত সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের অন্তরকলজগুলি নির্ণয় কর:

(i) $y=\log\sin x$ (ii) $y=\log(x^2+x+1)$
(iii) $y=\log(\log x)$ (iv) $y=\log(\sec x+\tan x)$
(v) $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ (vi) $y=\log(\tan^{-1}x)$.

$y=\log\{f(x)\}=\log u$, যেখানে $u=f(x)$.

$\therefore \dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{u}$ এবং $\dfrac{du}{dx}=f'(x).$

এক্ষণে, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}.f'(x)=\frac{1}{f(x)}.f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

(i) $y=\log\sin x$, এখানে $f(x)=\sin x$. $\therefore\ f'(x)=\cos x$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sin x}.\cos x=\cot x.$

(ii) $y=\log(x^2+x+1)$,

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+x+1}(x^2+x+1)'=\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

(iii) $y=\log(\log x)$, $\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\log x}(\log x)'=\frac{1}{x\log x}$.

(iv) $y=\log(\sec x+\tan x)$,

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec x+\tan x}(\sec x.\tan x+\sec^2 x)=\sec x.$$

(v) $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left\{1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}.2x\right\}$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left\{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(vi) $y=\log(\tan^{-1}x)$, $\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\tan^{-1}x}.\frac{1}{1+x^2}$.

উদা. ৪. $y=f(ax+b)$ হইলে, যেখানে $f(x)$ অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক, দেখাও যে,

$\frac{dy}{dx}=a\frac{d}{dz}\{f(z)\}$, যেখানে $z=ax+b$.

উপরোক্ত সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

(i) $y=(3x+4)^{10}$ (ii) $y=\log(2x+3)$ (ii) $y=e^{-2x}$
(iv) $y=\sin 2x$ (v) $y=\sec(3-2x)$ (iv) $y=\tan^{-1}ax$

$y=f(ax+b)=f(z)$, যেখানে $z=ax+b$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d}{dx}(ax+b)=a.\frac{d}{dz}\{f(z)\}$$

(i) $\frac{dy}{dx}=3.\frac{d}{dz}z^{10}$, যেখানে $z=3x+4$

$=3.10.z^9=30(3x+4)^9.$

(ii) $\frac{dy}{dx}=2.\frac{1}{2x+3}=\frac{2}{2x+3}$.

(iii) $\frac{dy}{dx}=-2.e^{-2x}$ (iv) $\frac{dy}{dx}=2\cos 2x$

(v) $\frac{dy}{dx}=-2\sec(3-2x)\tan(3-2x)$

(vi) $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{1+a^2x^2}$.

উদা. 4. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর : (i) $\tan y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$ (ii) $\tan \frac{1}{2}y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,

(i) $\because \tan y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$,

$$\therefore \quad y=\tan^{-1}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\tan^{-1}\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}$$ [লব এবং হর হইতে $\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}$ অপসারিত করিয়া]

$$=\tan^{-1}\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}=\tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}. \quad \left(\because \frac{\pi}{4}=\text{ধ্রুবক}\right)$$

(ii) $\tan\frac{1}{2}y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$, [$x=\cos\theta$ ধরিয়া]

$$=\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\tan\frac{\theta}{2}$$

$\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}\theta, \quad \therefore \quad y=\theta=\cos^{-1}x.$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

উদা. 5. যদি $x=3\tan^{-1}\dfrac{2t}{1-t^2}$, $y=2\sin^{-1}\dfrac{2t}{1+t^2}$ হয়, তবে $\dfrac{dy}{dx}$-এর মান বাহির কর।

মনে কর $t=\tan\theta$

$$\therefore\quad x=3\tan^{-1}\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=3\tan^{-1}\tan 2\theta=3.2\theta=6\theta$$

এবং $y=2\sin^{-1}\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=2\sin^{-1}\sin 2\theta=2.2\theta=4\theta$

$$\therefore\quad \frac{dx}{d\theta}=6 \quad \text{এবং} \quad \frac{dy}{d\theta}=4.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** উদা. 4 এবং উদা. 5-এ প্রতিস্থাপনের দ্বারা প্রদত্ত অপেক্ষককে সরলীকৃত করিয়া ডেরিভেটিভ বাহির করা হইয়াছে।]

উদা. 6. অন্তরকলন কর :

(i) x^6কে x^3-এর সাপেক্ষে

(ii) $x^{\tan^{-1}x}$-কে $\tan^{-1}x$-এর সাপেক্ষে

(iii) $\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$কে $\cot^{-1}x$-এর সাপেক্ষে।

(i) মনে কর $y=x^6$, $z=x^3$.

$\therefore$ x^3-এর সাপেক্ষে x^6-এর অন্তরকলজ

$$=\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\Big/\frac{dz}{dx}=\frac{6x^5}{3x^2}=2x^3.$$

(ii) মনে কর $y=x^{\tan^{-1}x}$, $\quad\therefore\quad \log y=\tan^{-1}x\log x$;

x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\tan^{-1}x+\frac{\log x}{1+x^2}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=x^{\tan^{-1}x}\left(\frac{1}{x}\tan^{-1}x+\frac{\log x}{1+x^2}\right)$$

মনে কর $z=\tan^{-1}x$, $\quad\therefore\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

এক্ষণে $\tan^{-1}x$-এর সাপেক্ষে $x^{\tan^{-1}x}$-এর অন্তরকলজ $=\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dz}{dx}}$

$$=x^{\tan^{-1}x}\left(\frac{1}{x}\tan^{-1}x+\frac{\log x}{1+x^2}\right)\Big/\frac{1}{1+x^2}$$

$$=x^{\tan^{-1}x}\left(\frac{1+x^2}{x}\tan^{-1}x+\log x\right)$$

(iii) মনে কর $y=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\sin^{-1}\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

[$x=\tan\theta$ ধরিয়া]

$$=\sin^{-1}\sin 2\theta=2\theta,\quad \therefore\ \frac{dy}{d\theta}=2$$

এবং $z=\cot^{-1}x=\cot^{-1}\tan\theta=\cot^{-1}\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\therefore\quad \frac{dz}{d\theta}=-1.$

$\therefore$ $\cot^{-1}x$-এর সাপেক্ষে $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$-এর অন্তরকলজ $=\frac{dy}{dz}$

$$=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dz}{d\theta}}=\frac{2}{-1}=-2$$

উদা. 7. $\frac{dy}{dx}$ বাহির কর যখন

(i) $y=\log\sqrt{\left\{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right\}}$

(iii) $y=x^2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}.\sin x$

(iii) $y=\frac{1}{2}x.\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

(iv) $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$

(v) $y=\log_x\sin x$

(i) $y=\log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}=\frac{1}{2}\left\{\log(1+\sin x)-\log(1-\sin x)\right\}$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos x}{1+\sin x}-\frac{-\cos x}{1-\sin x}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cos x\,\frac{1-\sin x+1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$

$$=\frac{\cos x}{1-\sin^2x}=\frac{1}{\cos x}=\sec x.$$

(ii) $y=x^2\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}.\sin x,$

$$\therefore \quad \log y=\log\left\{x^2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}.\sin x\right\}$$

$$=2\log x+\tfrac{1}{2}\log(x^2+x+1)-\tfrac{1}{2}\log(x^2-x+1)+\log\sin x$$

উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=\frac{2}{x}+\frac{1-x^2}{1+x^2+x^4}+\cot x.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=x^2.\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}.\sin x\left\{\frac{2}{x}+\frac{1-x^2}{1+x^2+x^4}+\cot x\right\}.$$

(iii) $y=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}.1.\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}.x\frac{(-2x)}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{2}a^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}.\frac{1}{a}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{\sqrt{a^2-}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$=\sqrt{a^2-x^2}.$$

(iv) $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos)^{\sin x}=u+v$, যেখানে

$u=(\sin x)^{\cos x}, \quad \therefore \quad \log u=\cos x\log\sin x,$ এবং

$v=(\cos x)^{\sin x}, \quad \therefore \quad \log v=\sin x\log\cos x.$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}=-\sin x\log\sin x+\cos x.\frac{\cos x}{\sin x},$$ এবং

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}=\cos x\log\cos x+\sin x.\frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{du}{dx}=(\sin x)^{\cos x}\left\{-\sin x\log\sin x+\cot x.\cos x\right\}$$

এবং, $\frac{dv}{dx}=(\cos x)^{\sin x}.\left\{\cos x.\log\cos x-\tan x.\sin x\right\}$

$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$

$$=(\sin x)^{\cos x}\{-\sin x\log\sin x+\cot x\cos x\}$$
$$+(\cos x)^{\sin x}\{\cos x\log\cos x-\tan x\sin x\}$$

(v) $y=\log_x\sin x=\frac{\log\sin x}{\log x}$, $\left[\because\quad \log_b a=\frac{\log_e a}{\log_e b}\right]$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\log x.\frac{\cos x}{\sin x}-\log\sin x.\frac{1}{x}}{(\log x)^2}$$
$$=\frac{x\cot x.\log x-\log\sin x}{x(\log x)^2}.$$

উদা. 8. $f(x)$ এবং $g(x)$ দুইটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক হইলে দেখাও যে, যদি কোন বিস্তারে x-এর সকল মানের জন্য

(i) $f'(x)=0$ হয়, তবে ঐ বিস্তারে $f(x)=c$, যেখানে c একটি ধ্রুবক।

(ii) $f'(x)=g'(x)$ হয়, তবে $f(x)=g(x)+c$, যেখানে c একটি ধ্রুবক।

(i) মনে কর $y=f(x)$, $\therefore\quad \frac{dy}{dx}=f'(x)=0$. এক্ষণে $\frac{dy}{dx}$ হইতেছে $y=f(x)$ বক্রের x – বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা। যেহেতু $\frac{dy}{dx}=0$, সুতরাং $y=f(x)$ বক্রের প্রত্যেক বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল। এইরূপ হওয়া সম্ভব যদি $y=f(x)$-এর লেখচিত্র x-অক্ষের সমান্তরাল হয়, নতুবা লেখচিত্রের কোন অংশ যদি x-অক্ষের সমান্তরাল না হয়, তবে ঐ অংশে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হইবে না। এক্ষণে x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখায় সমীকরণ $y=c=$ ধ্রুবক। $\therefore\quad f'(x)=0$ হইলে $f(x)=c=$ ধ্রুবক হইবে।

(ii) মনে কর $\phi(x)=f(x)-g(x)$.

$\therefore\quad \phi'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ (শর্তানুযায়ী)

$\therefore\quad \phi(x)=c$, যেখানে $c=$ ধ্রুবক [(i)-অনুযায়ী)]

বা, $f(x)-g(x)=c$, বা, $f(x)=g(x)+c$.

উদা. 9. কোন একটি বিন্দুতে একটি অপেক্ষক অন্তরকলনযোগ্য হইলে দেখাও ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত। ইহার বিপরীত প্রতিজ্ঞা কি সত্য? উদাহরণ দ্বারা বুঝাও।

মনে কর $f(x)$ অপেক্ষকটি $x=a$ বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য।

$\therefore\quad f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$-এর মান আছে।

$a+h=x$ ধরিয়া পাই যখন $h\to 0$, $x\to a$ এবং

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

এক্ষণে, আমরা লিখিতে পারি যে

$$f(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\ (x-a)+f(a)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\ (x-a)+f(a)\right\}$$

[$\because$ উভয় পক্ষেরই সীমা আছে]

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\lim_{x\to a}(x-a)+f(a),$$

$$=f'(a).0+f(a)=f(a)\quad\left[\because\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\text{-এর সীমাস্থ মান আছে}\right]$$

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত। অতএব অন্তরকলনযোগ্য বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত।

কিন্তু ইহার বিপরীত প্রতিজ্ঞা সত্য নহে, অর্থাৎ একটি অপেক্ষক কোন বিন্দুতে সন্তত হইলে, ঐ বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য নাও হইতে পারে। উদাহরণস্বরূপ মনে কর $f(x)=|x|$. এখন $x=0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত, কারণ যখন $x>0$, তখন $f(x)=|x|=x$ এবং $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} x=0.$

যখন $x<0$ তখন $f(x)=|x|=-x$ এবং $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} -x=0.$

আবার $f(0)=|0|=0.\quad \therefore \lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0).$

কিন্তু $x=0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির অন্তরকলজ নাই, কারণ, অপেক্ষকটির $x=0$ বিন্দুতে ডান পার্শ্বের অন্তরকলজ $=f'(0+)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{h-0}{h}=\lim_{h\to 0}1=1,\quad [\because\ h\to 0+,\ h>0 \text{ এবং } |h|=h].$$

অপেক্ষকটির ঐ বিন্দুতে বাম পার্শ্বের অন্তরকলজ $=f'(0-)$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h-0}{h}=\lim_{h\to 0}-1=-1,$$

$[\because\ h\to 0-,\ h<0$ এবং $|h|=-h].$

$\therefore \quad f'(0+) \neq f'(0-)$.

অতএব $x=0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি অন্তরকলনযোগ্য নহে যদিও ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত।

উদা. 10. যদি $ax^2+2hxy+by^2=1$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+hy}{hx+by} \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^2-ab}{(hx+by)^3}.$$

$ax^2+2hxy+by^2=1$-এর উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন্ করিয়া পাই, $2ax+2h(x.\frac{dy}{dx}+1.y)+2by\frac{dy}{dx}=0$

বা, $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+hy}{hx+by}$. উভয় পক্ষকে আবার x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন্ করিয়া পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{ax+hy}{hx+by}\right)$$

$$= -\frac{\left(a+h\frac{dy}{dx}\right)(hx+by)-(ax+hy)\left(h+b\frac{dy}{dx}\right)}{(hx+by)^2}$$

$$= -\frac{(ab-h^2)y+(h^2-ab)x.\frac{dy}{dx}}{(hx+by)^2}$$

$$= (h^2-ab)\frac{y+x\left(-\frac{dy}{dx}\right)}{(hx+by)^2} = (h^2-ab).\frac{y+x\frac{ax+hy}{hx+by}}{(hx+by)^2}$$

$$= (h^2-ab)\frac{y(hx+by)+x(ax+hy)}{(hx+by)^3}.$$

$$= (h^2-ab).\frac{ax^2+2hxy+by^2}{(hx+by)^3}$$

$$= \frac{h^2-ab}{(hx+by)^3}, \quad [\because \quad ax^2+2hxy+by^2=1].$$

উদা. 11. দেখাও যে $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2y}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$. এই সূত্রের সাহায্যে $\frac{d^2y}{dx^2}$-এর মান নির্ণয় কর যখন $\sin y = x \sin(a+y)$.

আমরা জানি $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right).\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.\frac{d^2x}{dy^2}\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

এক্ষণে, $\sin y=x \sin(a+y)$ হইতে পাই, $x=\dfrac{\sin y}{\sin(a+y)}$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=\frac{\sin(a+y).\cos y-\cos(a+y).\sin y}{\sin^2(a+y)}=\frac{\sin a}{\sin^2(a+y)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a};\ \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{-2\sin a}{\sin^3(a+y)}.\cos(a+y).$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}=-\frac{\frac{-2\sin a\cos(a+y)}{\sin^3(a+y)}}{\frac{\sin^3 a}{\sin^6(a+y)}}$$

$$=\frac{2\sin^3(a+y)\cos(a+y)}{\sin^2 a}.$$

উদা. 12. কোন গোলকের ব্যাসার্ধ 5 সে. মি.। যদি ব্যাসার্ধ মাপিতে ভ্রান্তি (error) হয় ·5 মি. মি. তবে গোলকের আয়তনের ভ্রান্তির আসন্ন মান বাহির কর। ভ্রান্তির শতকরা হার কত ?

মনে কর V = গোলকের আয়তন, এবং r = ব্যাসার্ধ। এখন আমরা জানি $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. $\therefore \ \frac{dV}{dr}=4\pi r^2$। যদি r এর δr বৃদ্ধির জন্য V এর পরিবর্তন δV হয় তবে,

$$\delta V=\frac{dV}{dr}.\delta r=4\pi r^2.\delta r.$$

দেওয়া আছে $r=5$, $\delta r=\cdot5$ মি. মি. $=\cdot05$ সে. মি.

$\therefore$ গোলকের ভ্রান্তির আসন্ন মান $=\delta V=4\pi.5^2(\cdot05)=5\pi=15\cdot7$

ভ্রান্তির শতকরা হারের আসন্ন মান $=\dfrac{\delta V}{V}\times100$

$$=\frac{5\pi}{\frac{4}{3}\pi(5)^3}\times100=3\%.$$

উদা. 13. l দৈর্ঘ্যযুক্ত একটি দোলকের দোলন কাল T, $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ সূত্রের দ্বারা দেওয়া হয়। যদি দোলকের দৈর্ঘ্য l মাপিতে 1% ভ্রান্তি (error) হয়, তবে দোলনকালের ভ্রান্তি কত হইবে ?

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \therefore \quad \log T=\log 2\pi+\tfrac{1}{2}\log l+\tfrac{1}{2}\log g.$$

l-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই, $\frac{1}{T}\cdot\frac{dT}{dl}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{l}$, ($g=$ ধ্রুবক)

$\therefore$ ভ্রান্তির আসন্ন শতকরা মান$=\frac{\delta T}{T}\times 100$

$$=\frac{\frac{dT}{dl}\cdot\delta l}{T}\times 100=\frac{1}{T}\cdot\frac{dT}{dl}.\delta l\times 100$$

$=\frac{1}{2}.\frac{\delta l}{l}\times 100=\frac{1}{2}\times$ দৈর্ঘ্যের ভ্রান্তির শতকরা হার

$=\frac{1}{2}\times 1\%=\frac{1}{2}\%$.

উদা. 14. দেখাও যে $x-\sin x$, x-এর যে কোন মানের জন্য একটি বর্ধমান অপেক্ষক। ইহা হইতে প্রমাণ কর যে,

যখন $x>0$, (i) $x-\sin x>0$

(ii) $\cos x-1+\frac{1}{2}x^2>0$

(iii) $\sin x-x+\frac{1}{6}x^3>0$.

মনে কর $f(x)=x-\sin x$. $\quad\therefore\quad f'(x)=1-\cos x$;

এখন যেহেতু x-এর যে-কোন মানের জন্য $\cos x\leqslant 1$,

$f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$.

সুতরাং $f(x)$, x-এর সকল মানের জন্য বর্ধমান।

(i) $\because$ $f(x)$ বর্ধমান, $x>0$ হইলে $f(x)>f(0)$ হইবে,

বা, $x-\sin x>0$ যদি $x>0$ হয়।

(ii) মনে কর $g(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$.

$\therefore\quad g'(x)=-\sin x+\frac{1}{2}.2x=x-\sin x=f(x)$.

$\because\quad f(x)$ বর্ধমান, $f(x)>f(0)$, যখন $x>0$

$\therefore\quad g'(x)>f(0)=0$, যখন $x>0$.

$\therefore\quad g(x)$ বর্ধমান ; অতএব $g(x)>g(0)$ যখন $x>0$

এখন $g(0)=\cos 0-1+0=0$ $\therefore$ $g(x)>0$ যখন $x>0$

বা, $\cos x-1+\frac{1}{2}x^2>0$.

(iii) মনে কর $h(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$

$\therefore$ $h'(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2=g(x)>g(0)=0$, যখন $x>0$

$\therefore$ $h(x)$ বর্ধমান, অতএব $h(x)>h(0)$ যখন $x>0$

বা, $h(x)>0$, যখন $x>0$ [$\because$ $h(0)=0$]

বা, $\sin x-x+\frac{1}{6}x^3>0$ যখন $x>0$.

উদা. 15. প্রমাণ কর $x>0$ হইলে,

$$x>\log(1+x)>x-\tfrac{1}{2}x^2.$$

মনে কর, $f(x)=x-\log(1+x)$.

$$\therefore \quad f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0 \text{ যখন } x>0.$$

$\therefore$ $f(x)$ বর্ধমান। $\therefore$ $x>0$ হইলে $f(x)>f(0)$

বা, $x-\log(1+x)>0$;

পক্ষান্তর করিয়া $x>\log(1+x)$, যখন $x>0$ ······(1)

আবার মনে কর, $g(x)=\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$.

$$\therefore \quad g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1-1-x+x+x^2}{1+x}$$

$$=\frac{x^2}{1+x}>0 \text{ যখন } x>0.$$

$\therefore$ $g(x)$ বর্ধমান। অতএব $x>0$ হইলে $g(x)>g(0)$,

বা, $\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2>0$, [$\because$ $g(0)=0$].

পক্ষান্তর করিয়া, $\log(1+x)>x-\frac{1}{2}x^2$······(2)

(1) এবং (2) হইতে পাই,

$$x>\log(1+x)>x-\tfrac{1}{2}x^2, \text{ যখন } x>0.$$

উদা. 16. যদি $f(x)=x$, যখন $x<1$

$=2-x$, যখন $1\leqslant x\leqslant 2$

$=-2+3x-x^2$ যখন $x>2$, হয়,

তবে দেখাও $x=2$ বিন্দুতে $f(x)$ অন্তরকলনযোগ্য কিন্তু $x=1$ বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য নহে।

যখন $x<1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{x-1}{x-1}=1$.

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1.$$

যখন $x>1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{2-x-1}{x-1}=\dfrac{1-x}{x-1}=-1$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

অতএব $f'(1)$-এর মান নাই।

$\therefore$ $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ অন্তরকলনযোগ্য নহে।

আবার যখন $x<2$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{2-x-0}{x-2}=-1$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$$

যখন $x>2$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{-2+3x-x^2-0}{x-2}$

$$=\frac{-(x-2)(x-1)}{x-2}=1-x$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}(1-x)=1-2=-1$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

অতএব $x=2$ বিন্দুতে $f(x)$ অন্তরকলনযোগ্য।

উদা. 17. $f(x)=2-x$, যখন $x\leqslant 2$

$=x-\frac{1}{2}x^2$, যখন $x>2$.

$x=2$ বিন্দুতে $f(x)$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

যখন $x<2$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{2-x-0}{x-2}=-1$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$$

যখন $x>2$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{x-\frac{1}{2}x^2}{x}=-\dfrac{2}{x}$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$$

$\therefore$ $f'(2)=f'(2+)=f'(2-)=-1$.

উদা. 18. $x^2+y^2=52$ বৃত্তের, $2x+3y=8$ সরলরেখার সহিত সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ বাহির কর।

মনে কর, (x_1, y_1) বিন্দুতে $x^2+y^2=52$ বৃত্তের স্পর্শক, $2x+3y=8$-এর সঙ্গে সমান্তরাল। এক্ষণে (x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের প্রবণতা $=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)}$. বৃত্তের সমীকরণ হইতে পাই, $2x+2y.\frac{dy}{dx}=0$

$$\therefore \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)}=-\frac{x_1}{y_1}.$$

আবার প্রদত্ত সরলরেখার প্রবণতা $=-\frac{2}{3}$.

$\because$ স্পর্শকটি প্রদত্ত সরলরেখার সহিত সমান্তরাল,

$$-\frac{x_1}{y_1}=-\frac{2}{3} \quad \text{বা,} \quad \frac{x_1}{2}=\frac{y_1}{3}=k \text{ (মনে কর)}$$

$\therefore \quad x_1=2k, y_1=3k. \because x_1{}^2+y_1{}^2=52, \quad \therefore 4k^2+9k^2=52$

বা, $k^2=4 \qquad \therefore \quad k=\pm 2.$

$\therefore$ স্পর্শ বিন্দুটি $=(\pm 4, \pm 6)$.

এই বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হইতেছে $y\pm 6=-\frac{2}{3}(x\pm 4)$

বা, $2x+3y=\mp 8\mp 18=\mp 26.$

উদা. 19. $y=x^2-5x+8$ বক্রের কোন্ বিন্দুতে উপস্পর্শক এবং উপ-অভিলম্ব সমান ?

এখানে $\frac{dy}{dx}=2x-5$. যেহেতু উপস্পর্শক $=$ উপ-অভিলম্ব, $\therefore y\Big/\frac{dy}{dx}=y.\frac{dy}{dx}$

বা, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1$ বা, $\frac{dy}{dx}=\pm 1$

বা, $2x-5=\pm 1 \qquad \therefore \quad x=3, 2.$

যখন $x=3$ তখন $y=9-15+8=2,$

এবং $x=2$ হইলে, $y=4-10+8=2.$

$\therefore$ (3, 2) এবং (2, 2) বিন্দুতে উপস্পর্শক এবং উপ-অভিলম্ব সমান।

উদা. 20. দুই দিক বদ্ধ একটি প্রদত্ত আয়তনের চোঙের উচ্চতা এবং ব্যাসার্ধ কত হইলে উহার পার্শ্বতলসমূহের ক্ষেত্রফল সর্বাপেক্ষা কম হইবে ?

মনে কর, চোঙটির ব্যাসার্ধ $=r$, উচ্চতা $=h$, আয়তন $=v$

$\therefore \quad v=\pi r^2 h \cdots\cdots(1)$

যদি পার্শ্বতলসমূহের ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$A=2\pi r^2+2\pi rh$ [∵ চোঙটি দুইদিকে বন্ধ]

$=2\pi r^2+2\pi r \frac{v}{\pi r^2}$ $\left[\because \text{ (1) হইতে, } h=\frac{v}{\pi r^2}\right]$

$=2\left(\pi r^2+\frac{v}{r}\right).$

এক্ষণে v প্রদত্ত বলিয়া, ইহার মান ধ্রুবক, সুতরাং A, r-এর অপেক্ষক।

এখন, $\frac{dA}{dr}=2\left(2\pi r-\frac{v}{r^2}\right)$ এবং $\frac{d^2A}{dr^2}=2\left(2\pi+\frac{2v}{r^3}\right)$

এক্ষণে, $\frac{dA}{dr}=0$ ধরিয়া পাই,

$2\left(2\pi r-\frac{v}{r^2}\right)=0$ বা, $r=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}=r_1$ (মনে কর)

$$\left(\frac{d^2A}{dr^2}\right)_{r=r_1}=2(2\pi+4\pi)=12\pi>0$$

∴ $r=r_1$-এর জন্য $\frac{dA}{dr}=0$ এবং $\frac{d^2A}{dr^2}>0$. অতএব $r=r_1$, বিন্দুতে A-এর অবম মান আছে। স্পষ্টতঃ r-এর অন্য মানের জন্য A-র মান $r=r_1$-এতে A-এর মান অপেক্ষা বৃহত্তর। ∴ $r=r_1$ বিন্দুতে A-র সর্বনিম্ন মান আছে। এখন $r=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ হইলে, $r^3=\frac{v}{2\pi}$ বা, $v=2\pi r^3$

এবং $h=\frac{v}{\pi r^2}=\frac{2\pi r^3}{\pi r^2}=2r=$ চোঙের ব্যাস

∴ প্রদত্ত আয়তনের জন্য চোঙের সমগ্র পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল সর্বনিম্ন হইবে যদি চোঙের উচ্চতা উহার ব্যাসের সমান হয়।

উদা. 21. একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল দেওয়া আছে, দেখাও শঙ্কুটির আয়তন সর্ববৃহৎ হইবে যদি ইহার অর্ধশীর্ষ কোণের পরিমাপ $\sin^{-1}\frac{1}{3}$ হয়।

মনে কর, শঙ্কুটির উচ্চতা$=h$, ব্যাসার্ধ$=r$, পার্শ্ব দৈর্ঘ্য$=l$, অর্ধশীর্ষ কোণ$=\alpha$, আয়তন$=v$ এবং সমগ্র তল$=s$.

∴ $\frac{r}{l}=\sin\alpha$ ∴ $l=r\operatorname{cosec}\alpha$ এবং $h=r\cot\alpha$.

এখন $s=\pi rl+\pi r^2=\pi r^2 \operatorname{cosec}\alpha+\pi r^2=\pi r^2(1+\operatorname{cosec}\alpha)$

এবং $v=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\cdot\frac{s}{1+\operatorname{cosec}\alpha}\cdot\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+\operatorname{cosec}\alpha}}\cdot\cot\alpha.$

$$\left[\because\quad r^2=\frac{s}{\pi(1+\operatorname{cosec}\alpha)}\right]$$

$$=\frac{s\sqrt{s}}{3\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\cot\alpha}{(1+\operatorname{cosec}\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\therefore\quad \frac{dv}{d\alpha}=\frac{s\sqrt{s}}{3\sqrt{\pi}}\cdot$$

$$\frac{-\operatorname{cosec}^2\alpha(1+\operatorname{cosec}\alpha)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(1+\operatorname{cosec}\alpha)^{\frac{1}{2}}.(-\operatorname{cosec}\alpha.\cot\alpha)\cot\alpha}{(1+\operatorname{cosec}\alpha)^3}$$

$$=\frac{s\sqrt{s}}{3\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\operatorname{cosec}\alpha\,(\operatorname{cosec}\alpha-3)(\operatorname{cosec}\alpha+1)}{2(1+\operatorname{cosec}\alpha)^{\frac{5}{2}}}\ \text{(সরল করিয়া)}$$

$\frac{dv}{d\alpha}=0$ হইতে পাই $\operatorname{cosec}\alpha=0,\ 3,\ -1.$

একণে, $\operatorname{cosec}\alpha$-র মান শূন্য হইতে পারে না ; আবার $\operatorname{cosec}\alpha=-1$ হইলে, $\frac{dv}{d\alpha}$-র হর শূন্য হয়। $\therefore\quad \operatorname{cosec}\alpha\neq-1\quad\therefore\quad\operatorname{cosec}\alpha=3$

$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{1}{3}$-এর জন্য শঙ্কুটির আয়তন সর্ববৃহৎ হইবে।

উদা. 22. দেখাও যে কোন বৃত্তের ভিতর সর্ববৃহৎ ক্ষেত্রফলযুক্ত যে আয়তক্ষেত্র অন্তর্লিখিত করা যায়, তাহা একটি বর্গক্ষেত্র হইবে।

মনে কর বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$, এবং অন্তর্লিখিত আয়তক্ষেত্রের একটি শীর্ষ বিন্দু $(x,\ y)$. সুতরাং আয়তক্ষেত্রের বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য হইল $2x$ এবং $2y$. সুতরাং আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $A=2x.2y=4xy$. এখন যেহেতু $(x,\ y)$ বৃত্তের উপর একটি বিন্দু, $A=4x\sqrt{a^2-x^2}$.

$$\therefore\quad \frac{dA}{dx}=4\sqrt{a^2-x^2}+4.x\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{4(a^2-2x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\frac{d^2A}{dx^2}=\frac{-4x(3a^2-2x^2)}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$\frac{dA}{dx}=0$ ধরিয়া পাই $a^2-2x^2=0.$ বা, $x=\frac{a}{\sqrt{2}}.$

$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ হইলে, $\frac{d^2A}{dx^2}=\frac{-8.\frac{a}{\sqrt{2}}.a^2}{\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-16<0$

$\therefore \quad x=\frac{a}{\sqrt{2}}$এর জন্য A-এর মান চরম হইবে। স্পষ্টতঃ 0 এবং a-এর মধ্যে x-এর অন্য মানের জন্য A-এর মান, $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$-তে A-এর মান অপেক্ষা ছোট। $\therefore \quad x=\frac{a}{\sqrt{2}}$-তে A-এর সর্ববৃহৎ মান আছে।

এক্ষণে $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ হইলে, $y=\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}=x$, অর্থাৎ আয়তক্ষেত্রের বাহুসমূহ সমান। $\therefore$ আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র। সুতরাং বৃত্তের মধ্যে অন্তর্লিখিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সর্ববৃহৎ হইবে, যখন ইহা একটি বর্গক্ষেত্র হইবে।

উদা. 23. দুইটি কণা একই বিন্দু হইতে একসঙ্গে একটি প্রদত্ত সরলরেখা অবলম্বন করিয়া যাত্রা করিল। যাত্রার t সময় পরে কণা দুইটির দূরত্ব $ut-\frac{1}{2}ft^2$, (u, f ধ্রুবক)। দেখাও যে কণা দুইটি পুনরায় মিলিত হইবার পূর্বে উভয়ের মধ্যে সর্বাধিক দূরত্ব হইবে $\frac{u^2}{2f}$ এবং তখন যাত্রারম্ভ হইতে $\frac{u}{f}$ সময় অতিক্রান্ত হইবে।

মনে কর, t সময়ে কণা দুইটির দূরত্ব x.

$x=ut-\frac{1}{2}ft^2$. কণা দুইটি মিলিত হইলে, $x=0$ হইবে, বা, $ut-\frac{1}{2}ft^2=0$, বা, $t=0, \frac{2u}{f}$. সুতরাং কণা দুইটি $\frac{2u}{f}$ সময় পরে পুনরায় মিলিত হইবে। এক্ষণে $t<\frac{2u}{f}$ হইলে, x-এর সর্বাধিক মান নির্ণয় করিতে হইবে।

এক্ষণে, $\frac{dx}{dt}=u-ft$ এবং $\frac{d^2x}{dt^2}=-f$.

$\frac{dx}{dt}=0$ হইলে পাই $u-ft=0$ বা, $t=\frac{u}{f}$

$\therefore \quad t=\frac{u}{f}$ হইলে, $\frac{dx}{dt}=0$ এবং $\frac{d^2x}{dt^2}<0$.

$\therefore \quad t=\frac{u}{f}$ বিন্দুতে x-এর সর্বাধিক মান হইবে।

যখন $t=\frac{u}{f}$, তখন $x=u.\frac{u}{f}-\frac{1}{2}f\left(\frac{u}{f}\right)^2=\frac{u^2}{2f}$.

সুতরাং কণা দুইটি মিলিত হইবার পূর্বে উহাদের সর্বাধিক দূরত্ব $\frac{u^2}{2f}$ এবং ইহা $\frac{u}{f}$ সময় পরে হইবে।

উদা. 24. একটি কণা O বিন্দু হইতে যাত্রা করিয়া সরলরেখায় ভ্রমণ করিতেছে, এবং যাত্রার t সময় পরে O বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব হইতেছে s. যদি $s=3{\cdot}5t+2{\cdot}1t^2-1{\cdot}4t^3$ হয়, তবে এক সেকেণ্ড পরে কণাটির বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর। কণাটির ত্বরণ কোন্ সময় শূন্য হইবে তাহা নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে $s=3{\cdot}5t+2{\cdot}1t^2-1{\cdot}4t^3$.

সুতরাং t সময়ে যদি কণাটির বেগ v এবং ত্বরণ f হয় তবে,

$v=t$-এর সাপেক্ষে s-এর পরিবর্তনের হার

$$=\frac{ds}{dt}=3{\cdot}5+2{\cdot}1.2t-1{\cdot}4.3t^2=3{\cdot}5+4{\cdot}2t-4{\cdot}2t^2$$

$f=t$-এর সাপেক্ষে বেগ v-এর পরিবর্তনের হার $=\dfrac{dv}{dt}=4{\cdot}2-8{\cdot}4t.$

$\therefore$ এক সেকেণ্ড পরে কণাটির বেগ

$$=[v]_{t=1}=3{\cdot}5+4{\cdot}2-4{\cdot}2=3{\cdot}5$$

এবং উহার ত্বরণ $=[f]_{t=1}=4{\cdot}2-8{\cdot}4=-4{\cdot}2$

যদি ত্বরণ $f=0$ হয় তবে $4{\cdot}2-8{\cdot}4\,t=0$ বা, $t=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ যাত্রার $\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড পরে কণাটির ত্বরণ শূন্য হইবে।

উদা. 25. একটি জলাধারের তলদেশ 3 ফুট বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গ। যদি জলাধারটিতে প্রতি মিনিটে 9 ঘনফুট জল ঢালা হয়, তবে জলাধারটিতে জলের উচ্চতা কি হারে বাড়িবে ?

মনে কর, যখন জলাধারে জলের উচ্চতা x ফুট তখন জলাধারে জলের আয়তন V ঘন ফুট। $\therefore$ $V=3^2.x=9x.$

$$\therefore\quad \frac{dV}{dt}=9.\frac{dx}{dt}.$$

এক্ষণে দেওয়া আছে

$\dfrac{dV}{dt}=t$-এর সাপেক্ষে V-এর পরিবর্তনের হার $=9$

$$\therefore\quad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{9}\cdot\frac{dV}{dt}=\frac{1}{9}.9=1.$$

$\therefore$ জলাধারে জলের উচ্চতা প্রতি মিনিটে 1 ফুট করিয়া বাড়িবে।

উদা. 26. একটি বৃত্তাকার পাতকে উত্তপ্ত করা হইতেছে। পাতটির ব্যাসার্ধ যখন $2\frac{1}{2}$ ফুট তখন উহা প্রতি সেকেণ্ডে ·0015 ইঞ্চি বাড়ে। এই সময় পাতটির ক্ষেত্রফল কি হারে বাড়িতেছে ?

মনে কর, পাতটির ক্ষেত্রফল $=A$, এবং ব্যাসার্ধ $=r$,

$\therefore$ $A=\pi r^2$. এক্ষণে t যদি সময়কে সূচিত করে,

তবে, $\frac{dA}{dt}=t$-এর সাপেক্ষে A-এর পরিবর্তনের হার

=প্রতি সেকেণ্ডে ক্ষেত্রফল বাড়িবার হার

$\frac{dr}{dt}=t$-এর সাপেক্ষে r-এর পরিবর্তনের হার

=প্রতি সেকেণ্ডে ব্যাসার্ধ বাড়িবার হার='0015 ইঞ্চি।

আবার, $\frac{dA}{dt}=\frac{dA}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=2\pi r.\frac{dr}{dt}$

যখন $r=2\frac{1}{2}$ ফুট=30 ইঞ্চি,

$\frac{dA}{dt}=2\pi.30.\ {}^{\cdot}0015={}^{\cdot}28$ বর্গ ইঞ্চি

∴ যখন পাতটির ব্যাসার্ধ $2\frac{1}{2}$ ফুট, উহার ক্ষেত্রফল প্রতি সেকেণ্ডে '28 বর্গ ইঞ্চি বাড়িবে।

উদা. 27. যদি t সেকেণ্ড সময়ে একটি চাকা θ রেডিয়ান ঘুরে তবে,

$$\theta=5t+\tfrac{3}{2}t^2-\tfrac{1}{3}t^3.$$

দেখাও যে, প্রথম $1\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড সময় চাকাটির কৌণিক বেগ (angular velocity) বৃদ্ধি পায়। কত সময় বাদে চাকাটি থামিবে?

$$\theta=5t+\tfrac{3}{2}t^2-\tfrac{1}{3}t^3$$

∴ কৌণিক বেগ $\omega=\frac{d\theta}{dt}=5+3t-t^2$

এক্ষণে $\frac{d\omega}{dt}=3-2t>0$, যতক্ষণ $t<\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

∴ $t=0$ হইতে $t=1\frac{1}{2}$ সে. সময় পর্যন্ত $\frac{d\omega}{dt}$ ধনাত্মক, অতএব এই সময় চাকাটির কৌণিক বেগ ω বাড়িয়া যাইবে।

চাকাটি থামিবে যখন ইহার কৌণিক বেগ=0 হইবে,

অর্থাৎ $\omega=5+3t-t^2=0$

$$\therefore\quad t=\frac{3\pm\sqrt{9+20}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}.$$

∵ t-এর মান ঋণাত্মক নহে, $t=\frac{3+\sqrt{29}}{2}=4{\cdot}19$ সে.

সুতরাং 4·19 সেকেণ্ড বাদে চাকাটি থামিবে।

উদা. 28. 13 ফুট লম্বা একটি মই উল্লম্ব দেওয়ালের গায়ে হেলান আছে। মইটির তলার প্রান্ত দেওয়ালের নিম্ন হইতে 5 ফুট দূরে আছে, এবং এই প্রান্ত ভূমির উপর প্রতি সেকেণ্ডে 2 ফুট বেগে দেওয়াল হইতে দূরের দিকে টানিয়া লওয়া হইতেছে, অপর প্রান্ত কি বেগে দেওয়াল বরাবর নীচের দিকে নামিবে ?

মনে কর, ভূমি এবং উল্লম্ব দেওয়ালের সংযোগ রেখা হইতে মইটির উপর প্রান্ত এবং নীচের প্রান্ত যথাক্রমে x এবং y দূরত্বে আছে। $\therefore$ উপর প্রান্ত এবং নিম্নের প্রান্তের বেগ যথাক্রমে $\frac{dx}{dt}$ এবং $\frac{dy}{dt}$। দেওয়া আছে $\frac{dy}{dt}=2$

এক্ষণে, $x^2+y^2=13^2$, $\therefore$ $2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$

বা, $\frac{dx}{dt}=-\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dt}$.

যখন $y=5$, তখন $x=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12$.

$\therefore$ $\frac{dx}{dt}=-\frac{5}{12}\times 2$ ফু./সে. $=-10$ ই./সে.

$\therefore$ মইটির উপরের প্রান্ত সেকেণ্ডে 10 ইঞ্চি বেগে নামিতেছে।

(লক্ষ্য কর t বাড়িলে x কমিতেছে, সেইজন্য $\frac{dx}{dt}$ ঋণাত্মক হইয়াছে।)

উদা. 29. কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে t সেকেণ্ড সময়ে একটি বস্তুর দূরত্ব হইতেছে $a \cos nt+b \sin nt$, যেখানে a, b, n ধ্রুবক। দেখাও যে বস্তুটির ত্বরণ, O বিন্দু হইতে উহার দূরত্বের সমানুপাতিক।

মনে কর, t সময়ে O বিন্দু হইতে বস্তুটির দূরত্ব x.

$\therefore$ $x=a \cos nt+b \sin nt$

$\therefore$ বেগ, $v=\frac{dx}{dt}=-an \sin nt+bn \cos nt$

ত্বরণ, $f=\frac{dv}{dt}=-an^2\cos nt-bn^2\sin nt$;

$$=-n^2(a \cos nt+b \sin nt)=-n^2x.$$

$\therefore$ $f \propto x$ ($\because$ $n^2=$ ধ্রুবক)

উদা. 30. যদি $x=a(t+\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ হয়,

এবং $\rho=\frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}$ হয়, যেখানে $y_1=\frac{dy}{dx}$, $y_2=\frac{d^2y}{dx^2}$,

তবে দেখাও যে, $\rho=4a\cos\frac{t}{2}$.

এখানে $\frac{dx}{dt}=a(1+\cos t)$, $\frac{dy}{dt}=a\sin t$.

$$\therefore\quad y_1=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a(1+\cos t)}=\tan\frac{t}{2}.$$

$$y_2=\tfrac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\cdot\frac{dt}{dx}=\tfrac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{a.2\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{\cos^4\frac{t}{2}}$$

$$\therefore\quad \rho=\frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}=\frac{\left(1+\tan^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{\cos^4\frac{t}{2}}}=4a\cos\frac{t}{2}.$$

উদা. 31. যদি $X=x-\frac{y_1(1+y_1^2)}{y_2}$ এবং $Y=y+\frac{1+y_1^2}{y_2}$ হয় তবে দেখাও, যখন $y^2=4ax$, তখন $27aY^2=4(X-2a)^3$.

এখানে $y^2=4ax$, $\therefore\ 2y.\frac{dy}{dx}=4a$ বা, $y_1=\frac{2a}{y}$

$$\therefore\quad y_2=-\frac{2a}{y^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{4a^2}{y^3}$$

$$\therefore\quad X=x-\frac{\frac{2a}{y}\left(1+\frac{4a^2}{y^2}\right)}{-\frac{4a^2}{y^3}}=x+\frac{y^2+4a^2}{2a}=\frac{2ax+4ax+4a^2}{2a}$$

$$=3x+2a.$$

$$Y=y+\frac{1+\frac{4a^2}{y^2}}{-\frac{4a^2}{y^3}}=y-\frac{y(y^2+4a^2)}{4a^2}=-\frac{y^3}{4a^2}=-\frac{(y^2)^{\frac{3}{2}}}{4a^2}$$

$$=\pm\frac{(4ax)^{\frac{3}{2}}}{4a^2}=\pm\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore\quad Y^2=\frac{4x^3}{a}=\frac{4}{a}.x^3=\frac{4}{a}\left(\frac{X-2a}{3}\right)^3=\frac{4(X-2a)^3}{27a}$$

বা, $27aY^2=4(X-2a)^3$.

উদা. 32. যদি $(1+x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$ হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \cdots + nc_n = n.2^{n-1}$,

(ii) $c_0 + 2c_1 + 3c_2 + \cdots + (n+1)c_n = (n+2).2^{n-1}$.

(i) $(1+x)^n = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$এর উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$n(1+x)^{n-1} = c_1.1 + c_2.2x + c_3.3x^2 + \cdots + nc_nx^{n-1}$$

এক্ষণে $x=1$ বসাইয়া পাই,

$$n.2^{n-1} = c_1 + c_2.2 + c_3.3.1.^2 + \cdots + c_n.n.1^{n-1}$$

বা, $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \cdots + nc_n = n.2^{n-1} \cdots\cdots(1)$

প্রদত্ত রাশিতে $x=1$ বসাইয়া পাই,

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots\cdots + c_n = 2^n \cdots\cdots(2)$$

(1) এবং (2) যোগ করিয়া পাই,

$$c_0 + 2c_1 + 3c_2 + \cdots + (n+1)c_n = n.2^{n-1} + 2^n = (n+2).2^{n-1}.$$

উদা. 33. $\sin x = 2^n \cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2^2}.\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}.\sin\frac{x}{2^n}$ অভেদ হইতে দেখাও যে,

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$
$$= \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x.$$

প্রদত্ত অভেদ হইতে পাই,

$$\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2^2}.\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$$

উভয়পক্ষের লগারিদম্ লইয়া পাই,

$$\log\cos\frac{x}{2} + \log\cos\frac{x}{2^2} + \cdots\cdots + \log\cos\frac{x}{2^n}$$
$$= -\log\sin\frac{x}{2^n} + \log\sin x - \log 2^n$$

উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}.\frac{1}{2} - \frac{\sin\frac{x}{2^2}}{\cos\frac{x}{2^2}}.\frac{1}{2^2} \qquad \frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\cos\frac{x}{2^n}}.\frac{1}{2^n}$$

$$= -\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{\cos x}{\sin x},$$

বা, $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$

$$= \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x,$$

উদা. 34. যদি $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$ হয়, তবে যখন $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, তখন c-এর মান বাহির কর, যেখানে A, B, C ধ্রুবক।

এখানে $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $\therefore \quad f'(x) = 2Ax + B$

এবং $f(a) = Aa^2 + B.a + C$, $f(b) = Ab^2 + B.b + C$

$\therefore \quad f(b) - f(a) = A(b^2 - a^2) + B(b-a).$

প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই, $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$,

বা, $A(b^2 - a^2) + B(b-a) = (b-a).(2Ac + B)$,

বা, $A(b+a) + B = 2A.c + B$,

$\therefore \quad c = \frac{b+a}{2}.$

উদা. 35. দেখাও যে যদি, $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ এবং $\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{b_1} = 1$ বক্রদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে, তবে $a - a_1 = b - b_1$ হইবে।

মনে কর, বক্রদ্বয় পরস্পরকে (x_1, y_1) বিন্দুতে ছেদ করে।

$$\therefore \quad \frac{x_1^2}{a} + \frac{y_1^2}{b} = 1 \quad \cdots \quad \cdots (1)$$

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{y_1^2}{b_1} = 1 \quad \cdots \quad \cdots (2)$$

এক্ষণে, $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$-এর উভয়পক্ষের অন্তরকলন লইয়া পাই

$$\frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{বা,} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{ay}.$$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ বক্রের স্পর্শকের প্রবণতা হইতেছে

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = -\frac{bx_1}{ay_1}.$$

অনুরূপে (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a_1}+\frac{y^2}{b_1}=1$ বক্রের স্পর্শকের প্রবণতা হইতেছে

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = -\frac{b_1 x_1}{a_1 y_1}$$

$\because$ বক্রদ্বয় (x_1, y_1) বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে, উক্ত বিন্দুতে উহাদের স্পর্শকদ্বয় পরস্পরের সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থিত।

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে বক্রদ্বয়ের প্রবণতার গুণফল $= -1$,

বা, $-\frac{bx_1}{ay_1}\cdot -\frac{b_1 x_1}{a_1 y_1}=-1$ বা, $\frac{x_1^2}{y_1^2}=-\frac{aa_1}{bb_1}$ ... ...(3)

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$x_1^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a_1}\right)+y_1^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b_1}\right)=0,$$

বা, $\frac{x_1^2}{y_1^2}=-\frac{(b_1-b)aa_1}{(a_1-a)bb_1}$ ... ...(4)

(3) এবং (4) হইতে পাই, $-\frac{aa_1}{bb_1}=-\frac{b_1-b}{a_1-a}\cdot\frac{aa_1}{bb_1}$

বা, $a_1-a=b_1-b$, বা, $a-a_1=b-b_1$.

উদা. 36. (i) যদি $y=x^{x^{x\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}}}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{x(y\log x-1)}$$

(ii) যদি $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots\cdots\infty}}}$ পর্যন্ত হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y-1}$.

(i) $y=x^{x^{x\cdots\cdots\infty \text{ পর্যন্ত}}}=x^y$; $\therefore$ $\log y=y\log x$.

উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{1}{y}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy}{dx}\cdot\log x-\frac{y}{x}.$$

বা, $\frac{dy}{dx}\left(\log x-\frac{1}{y}\right)=-\frac{y}{x}$.

$\therefore$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{x(y\log x-1)}$

(ii) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots\cdots\infty}}}$ পর্যন্ত $=\sqrt{x+y}$

$\therefore \quad y^2=x+y,$ উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$2y.\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx} \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y-1}.$$

উদা. 37. (i) সমীকরণ $y=a\log x+b$ হইতে a এবং b অপনয়ন কর।

(ii) সমীকরণ $y=\frac{a}{x}+b$ হইতে a এবং b অপনয়ন কর।

(i) $y=a\log x+b$; উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া

পাই, $\frac{dy}{dx}=a.\frac{1}{x}$, বা $x.\frac{dy}{dx}=a.$

পুনরায় অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$1.\frac{dy}{dx}+x.\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

$\therefore$ নির্ণেয় a, b অপনীতক হইতেছে, $x.\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0$

(ii) $y=\frac{a}{x}+b,$ অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{x^2}, \qquad \text{বা,} \quad x^2\frac{dy}{dx}=-a.$$

পুনরায় অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$2x.\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{dx}=0, \quad \text{বা,} \quad 2\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$\therefore$ নির্ণেয় অপনীতক হইল, $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=0$

উদা. 38. x-অক্ষ বরাবর গতিশীল একটি কণা P-এর t সময়ে ভুজ হইতেছে. $x=2a\sin(nt)+a\sin(2nt)$, যেখানে a এবং n ধ্রুবক। দেখাও যে, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{n}$ অবকাশে, P কণাটি কেন্দ্র হইতে অপর একটি বিন্দু A পর্যন্ত যায় এবং তাহার পর পুনরায় O বিন্দুতে ফিরিয়া আসে। A বিন্দুর ভুজ এবং A বিন্দুতে কণাটির ত্বরণ নির্ণয় কর।

$\because \quad x=2a\sin(nt)+a\sin(2nt),$

$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=2an\cos nt+2an\cos 2nt,$

এবং $\frac{d^2x}{dt^2}=-2an^2\sin(nt)-4an^2\sin(2nt)$.

$t=0$ সময়ে, $x=0$, $\frac{dx}{dt}=4an$ এবং $\frac{d^2x}{dt^2}=0$. $\therefore$ $t=0$ সময়ে কণাটি কেন্দ্র হইতে $4an$ বেগে x-অক্ষ বরাবর যাত্রা করে। এক্ষণে $\frac{dx}{dt}=0$ হইলে

$\cos nt+\cos 2nt=0$, বা, $\cos\frac{3nt}{2}.\cos\frac{nt}{2}=0$

$\therefore$ $\frac{3nt}{2}=\frac{\pi}{2}$, বা, $\frac{nt}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore$ $t=\frac{\pi}{3n}$, বা, $\frac{\pi}{n}$.

$\therefore$ $t=\frac{\pi}{3n}$ সময়ে কণাটির বেগ শূন্য এবং এই সময় ত্বরণ $=-3\sqrt{3}an^2$.

যখন $t=\frac{\pi}{3n}$, $x=\frac{3\sqrt{3}}{2}a$. $\therefore$ $\frac{3\sqrt{3}}{2}a$ দূরত্বে কণাটির বেগ শূন্য হইবে এবং ঋণাত্মক ত্বরণ থাকার ফলে আবার O বিন্দুর দিকে যাত্রা করিবে। $t=\frac{\pi}{n}$ সময়ে, $x=0$, $\frac{dx}{dt}=0$, $\frac{d^2x}{dt^2}=0$. কণাটি O বিন্দুতে পৌঁছাইবার পর উহার বেগ এবং ত্বরণ উভয়ই শূন্য। $\therefore$ কণাটি আর যাত্রা করিবে না। $x=\frac{3\sqrt{3}}{2}a$ বিন্দুকে A বিন্দু লইয়া পাই যে, কণাটি O বিন্দু হইতে A বিন্দু পর্যন্ত যায়, এবং পুনরায় A বিন্দু হইতে O বিন্দুতে ফিরিয়া আসে। A বিন্দুর ভুজ হইতেছে $x=\frac{3\sqrt{3}}{2}a$ এবং A বিন্দুতে কণাটির ত্বরণ $=3\sqrt{3}\,an^2$, O বিন্দুর দিকে।

প্রশ্নমালা 4

1. যদি $y=e^{f(x)}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx}=e^{f(x)}.f'(x)$. এই সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির অন্তরকলজ নির্ণয় কর :

(i) $y=e^{x^3+4x+1}$ (ii) $y=e^{\sin x}$ (iii) $y=e^{\tan^{-1}x}$

(iv) $y=e^{\sqrt{x+1}}$ (v) $y=(e)^{e^x}$.

2. যদি $y=\sin\{f(x)\}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{dy}{dx}=\cos\{f(x)\}.f'(x).$$

এবং এই সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রসমূহে $\frac{dy}{dx}$-এর মান লিখ :

(i) $y=\sin(x^2+x+1)$ (ii) $y=\sin(\log x)$

(iii) $y=\sin(e^x)$ (iv) $y=\sin(\tan^{-1}x)$

(v) $y=\sin(x^2\cos x)$.

3. দেখাও যে,

(i) $y=\sin^{-1}f(x)$ হইলে $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}.f'(x)$

(ii) $y=\tan^{-1}f(x)$ হইলে $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+f^2(x)}.f'(x)$

(iii) $y=\frac{1}{f(x)}$ হইলে $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{f^2(x)}.f'(x)$, যেখানে $f^2(x)=\{f(x)\}^2$

উপরোক্ত সূত্রগুলি ব্যবহার করিয়া নিম্নলিখিত ক্ষেত্রসমূহে $\frac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় কর :

(iv) $y=\sin^{-1}(x^2+x-1)$ (v) $y=\sin^{-1}(\cos x)$

(vi) $y=\tan^{-1}(e^x)$ (vii) $y=\tan^{-1}(\sqrt{x})$

(viii) $y=\frac{1}{x^2+a^2}$ (ix) $y=\frac{1}{x+e^x.\log x}$

(x) $y=\frac{1}{\sin^{-1}(x^2+4)}$.

4. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(i) $y=\log\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$ (ii) $y=\frac{1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}$

(iii) $y=\sqrt{\frac{1-\tan x}{1+\tan x}}$ (iv) $y=\frac{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{2}{3}}}{(2-3x)^{\frac{3}{4}}(3-4x)^{\frac{4}{5}}}$

(v) $y=\sin x.e^x.\log x.x^x$

(vi) $y=(\tan x)^{\cot x}+(\cot x)^{\tan x}$

(vii) $y=e^{(x)^x}$ (viii) $y=(1+x^{-1})^x$

(ix) $y=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\tan^{-1}x$. (x) $y=(x^x)^x$

(xi) $y=x^{(x^x)}$ (xii) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)$.

(xiii) $y=\log^{x}_{\sin}$ (xiv) $y=\log^{x}_{e^x}$ (xv) $\log_x 4$

(xvi) $y=x^{\log x}+(\log x)^x$ (xvii) $y^x+x^y=a^b$

5. প্রমাণ কর যে,

(i) $y=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$ হইলে

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+a^2}$$

(ii) $y=-\sqrt{(8+x-x^2)}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{2x-1}{\sqrt{33}}$ হইলে

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{(8+x-x^2)}}$$

(iii) $y=-\frac{1}{5}\cot^5 x+\frac{1}{3}\cot^3 x-\cot x-x$ হইলে $\dfrac{dy}{dx}=\cot^6 x$.

(iv) $y=\frac{1}{6}[(x^6+1)\tan^{-1}x^3-x^3]$ হইলে $\dfrac{dy}{dx}=x^5\tan^{-1}x^3$

(v) $y=\log\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}+\sqrt{3}\tan^{-1}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$

হইলে $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6}{1-x^6}$

(vi) $y=\dfrac{1}{1+x^{l-m}+x^{n-m}}+\dfrac{1}{1+x^{m-n}+x^{l-n}}+\dfrac{1}{1+x^{n-l}+x^{m-l}}$

হইলে $\dfrac{dy}{dx}=0$.

6. $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর যখন

(i) $y=\tan^{-1}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ (ii) $y=\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$

(iii) $y=\sin^{-1}(3x-4x^3)$ (iv) $y=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

(v) $y=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

(vi) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{a\cos x-b\sin x}{b\cos x+a\sin x}\right)$

(vii) $y=\sin^{-1}\{2x\sqrt{1-x^2}\}$

(viii) $y=\sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right\}$

(ix) $y=\sin^{-1}\dfrac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$ (x) $y=\tan^{-1}\dfrac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$

(xi) $y=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ (xii) $y=\sin^{-1}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+a^4}}$

(xiii) $\tan y=\dfrac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}$

(xiv) $\tan y=\dfrac{\tan x+\sec x-1}{\tan x-\sec x+1}$.

7. $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(i) $x=\tan^{-1}\dfrac{3t-t^3}{1-3t^2}$, $y=\cos^{-1}\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(ii) $x=\sec^{-1}\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$, $y=\tan^{-1}\dfrac{a-t}{1+at}$

(iii) $x=\cot^{-1}\dfrac{1+t}{1-t}$, $y=\cot^{-1}(\sqrt{1+t^2}-t)$

(iv) $x=\sin^{-1}(3t-4t^3)$, $y=\cos^{-1}(8t^4-8t+1)$

(v) $x=\sin^{-1}\{2ax\sqrt{1-a^2x^2}\}$, $y=\cos^{-1}(1-2a^2x^2)$.

8. অন্তরকলজ নির্ণয় কর :

(i) x^3-এর সাপেক্ষে x^8-এর (ii) x^8-এর সাপেক্ষে x^6-এর

(iii) $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$-এর $\tan^{-1}x$-এর সাপেক্ষে

(iv) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$-এর $\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$-এর সাপেক্ষে

(v) $x^{\sin^{-1}x}$-এর $\sin^{-1}x$-এর সাপেক্ষে।

9. (i) যদি $f'(x)=1$ হয়, তবে দেখাও যে $f(x)=x+c$ যেখানে c একটি ধ্রুবক।

(ii) $f'(x)=e^x$ হইলে দেখাও যে $f(x)=e^x+c$, যেখানে $c=$ধ্রুবক।

10. (i) যদি $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{(1-y^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

(ii) যদি $f(x)=\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$f'(0)=\left(2\log\frac{a}{b}+\frac{b^2-a^2}{ab}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$$ [C.U.]

11. (i) যদি $p^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$p+\frac{d^2p}{d\theta^2}=\frac{a^2b^2}{p^3}.$$

(ii) যদি $y=\left(\frac{1}{x}\right)^x$ হয়, তবে দেখাও যে $y_2(1)=0$.

12. প্রমাণ কর :

$$\frac{dx}{dy}=1\Big/\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{d^2y}{dx^2}\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)^3,$$

$$\frac{d^3x}{dy^3}=-\left\{\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{dy}{dx}-3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\}\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)^5.$$

13. (i) যদি $x=\frac{1}{z}$ এবং $y=f(x)$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{dy}{dx}=-z^2\frac{dy}{dz}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=2z^3\frac{dy}{dz}+z^4\frac{d^2y}{dz^2}$$

(ii) যদি $x=e^z$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$x.\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}, \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}.$$

14. 7 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ মাপিতে ·1 mm. ত্রুটি হইলে, বৃত্তের ক্ষেত্রফলের ত্রুটি নির্ণয় কর। এই ত্রুটির শতকরা হার কত ?

15. একটি মিনারের পাদদেশ হইতে 100 ফুট দূরে অবস্থিত একটি বিন্দুতে মিনারের শীর্ষদেশের উন্নতি 60°. যদি উন্নতি মাপিতে 1′ ত্রুটি হয়, তবে মিনারের উচ্চতা মাপিতে কত ত্রুটি হইবে ?

16. 1 মিমি. পর্যন্ত সঠিকভাবে নির্ণয় করা যায় এইরূপ একটি স্কেল দ্বারা একটি ঘনের বাহু মাপা হইল। যদি বাহুর দৈর্ঘ্য 1·05 সে. মি. হয়, তবে ঘনের আয়তনের সর্ববৃহৎ ত্রুটি কত হইতে পারে ? ঐ ত্রুটির শতকরা হার কত ?

17. I পরিমাপের তড়িৎ-প্রবাহ একটি গ্যালভানোমিটার দ্বারা মাপিলে, গ্যালভানোমিটারের বিচ্যুতি যদি θ হয়, তবে $I \propto \tan\theta$; যখন $\theta = 45°$; তখন যদি θ মাপিতে 1.4% ত্রুটি হয়, তবে তড়িৎ-প্রবাহের ত্রুটির শতকরা হার কত ?

18. যদি একটি সংখ্যা মাপিতে 5% ত্রুটি হয়, তবে ঐ সংখ্যার সাধারণ লগারিদ্‌মের ত্রুটি কত ?

19. দেখাও যে, কোন সংখ্যার n-তম ঘাতের ত্রুটির হার ঐ সংখ্যাটির ত্রুটির হারের n গুণ এবং n-তম মূলের ত্রুটির হার সংখ্যাটির ত্রুটির হারের $\frac{1}{n}$ গুণ।

20. দেখাও যে যদি $x>0$ হয় তবে

(i) $x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\frac{\quad}{2(1+x)}$

(ii) $x>\log(1+x)>\frac{1}{1+x}$.

21. দেখাও যে $0<x<\frac{\pi}{2}$ বিস্তারে x-এর যে কোন মানের জন্য,

(i) $1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

(ii) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

(iii) $\sin x<x<\tan x$.

22. দেখাও যে $x>1$ হইলে,

(i) $x-1>\log x>\frac{x-1}{x}$

(ii) $x^2-1>2x\log x>4(x-1)-2\log x$.

23. নিম্নলিখিত অপেক্ষকটির $x=a$ বিন্দুতে সন্ততা এবং অন্তরকলনযোগ্যতা পরীক্ষা কর :

$$f(x)=\frac{x^3}{a^2}-a, \text{ যখন } 0<x<a$$
$$=0, \text{ যখন } x=a$$
$$=a-\frac{x^3}{a}, \text{ যখন } x>a.$$

24. যদি, $f(x)=x$, যখন $0<x<1$

$$=2-x, \text{ যখন } 1\leqslant x\leqslant 2$$

$$=3x-x^2-2 \text{ যখন } x>2, \text{ হয়}$$

তবে দেখাও যে $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত কিন্তু অন্তরকলনযোগ্য নহে, এবং $x=2$ বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত এবং অন্তরকলনযোগ্য।

25. যদি $f(x)=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$, যখন $0\leqslant x\leqslant a$

$$=\tfrac{1}{2}b^2-\tfrac{1}{6}x^2-\tfrac{1}{3}.\frac{a^3}{x},\ a<x\leqslant b$$

$$=\tfrac{1}{3}.\frac{b^3-a^3}{x}, \text{ যখন } x>b, \text{ হয়,}$$

তবে $f(x)$-এর মান নির্ণয় কর এবং দেখাও $f'(x)$ সর্বত্র $(x\geqslant 0)$ সন্তত। [C. U.]

26. (i) যদি $\sin y=x\sin(a+y)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$. [C. U.]

(ii) যদি $x^y=e^{x-y}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\log x}{(1+\log x)^2}$

(iii) যদি $x^2=\dfrac{1+y^2}{1-y^2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর $\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2=-\dfrac{1-x^4}{1-y^4}$.

27. বক্রস্থিত (x_1, y_1) বিন্দুতে $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ বক্রের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে এই বক্র যদি x-অক্ষ এবং y-অক্ষকে যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে, তবে যে বিন্দুর স্থানাঙ্ক (OA, OB) তাহার সঞ্চারপথ হইবে $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

28. কোন্ বিন্দুতে $x^2+2xy+2y^2=1$ কণিকের স্পর্শক

(i) x-অক্ষের সমান্তরাল, (ii) x-অক্ষের উপর লম্বভাবে থাকিবে?

29. কোন্ কোন্ বিন্দুসমূহে $y=(x-3)^2.(x-2)$ বক্রের স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হইবে? [C. U. '35]

30. দেখাও যে, $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ বক্র যে তিনটি বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে, তাহার দুইটিতে স্পর্শক পরস্পরের সমান্তরাল এবং অন্যটিতে স্পর্শক x-অক্ষের সহিত 135° কোণ উৎপন্ন করে। [Pat. '23]

31. $y=x$ সরলরেখা যে বিন্দুতে $xy^2=2-x$ বক্রকে ছেদ করিয়াছে সেই বিন্দুতে বক্রের স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

32. নিম্নলিখিত বক্রের কোন বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের এবং কোন্ বিন্দুতে y-অক্ষের সমান্তরাল তাহা নির্ণয় কর :

(i) $\frac{x^3}{a}+\frac{y^3}{b}=xy$ (Pat.)

(ii) $ax^2+2hxy+by^2=1.$

33. $y=x^2$ এবং $y=x^3$-এর সমভুজযুক্ত বিন্দুদ্বয়ে সমান্তরাল স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

34. কোন্ বিন্দুতে $y=x^2$-এর অভিলম্ব $y=4x$-এর সহিত লম্বভাবে অবস্থিত ?

35. দেখাও যে, $x^3=y^2$ বক্রের যে-কোন বিন্দু $(4m^2, 8m^3)$-এ স্পর্শকের সমীকরণ $y=3mx-4m^3$ এবং ইহা বক্রকে পুনরায় $(m^2, -m^3)$. বিন্দুতে ছেদ করে এবং ঐ বিন্দুতে স্পর্শকটি অভিলম্ব হইবে যদি

$m=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ হয়।

36. দেখাও যে,

(i) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ বক্রের যে-কোন বিন্দুতে স্পর্শকের অক্ষদ্বয় দ্বারা ছেদিত অংশের দৈর্ঘ্য ধ্রুবক।

(ii) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ বক্রের যে-কোন বিন্দুতে স্পর্শক, x-অক্ষ এবং y-অক্ষ হইতে যে দৈর্ঘ্যদ্বয় ছেদ করে তাহাদের যোগফল ধ্রুবক।

37. দেখাও যে, $y=b.e^{\frac{x}{a}}$ বক্রের যে কোন বিন্দুতে উপস্পর্শক ধ্রুবক এবং উপ-অভিলম্ব হইতেছে $\frac{y^2}{a}$. [Pat. 37, '33]

38. দেখাও যে, $x^m y^n=a^{m+n}$ বক্রের যে-কোন বিন্দুতে উপস্পর্শক ঐ বিন্দুর ভুজের সহিত সমানুপাতিক। [Bihar]

39. প্রমাণ কর যে, $y=c.\frac{e^{\frac{x}{c}}+e^{\frac{x}{c}}}{2}$ বক্রের যে-কোন বিন্দুর কোটির পাদদেশ হইতে উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্বের দৈর্ঘ্য ধ্রুবক।

40. প্রমাণ কর যে, $y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ বক্রের যে-কোন বিন্দুর ভুজ এবং ঐ বিন্দুতে উপ-স্পর্শকের গুণফল ধ্রুবক।

41. দেখাও যে, $x=a+b\log(b+\sqrt{b^2-y^2})-\sqrt{b^2-y^2}$ বক্রের যে-কোন বিন্দুতে উপ-স্পর্শক এবং উপ-অভিলম্বের যোগফল ধ্রুবক।

42. দেখাও যে, $by^2=(x+a)^3$ বক্রের উপস্পর্শকের বর্গ উপ-অভিলম্বের সহিত সমানুপাতিক। [Pat. '32

43. 12 সংখ্যাটি এমন দুইটি অংশে ভাগ কর যাহাতে অংশদ্বয়ের গুণফল বৃহত্তম হয়।

44. 10কে এমন দুইটি অংশে ভাগ কর যাহাতে একটি অংশের দ্বিগুণের সহিত অপর অংশের বর্গের যোগফল ক্ষুদ্রতম হইবে।

45. কোন্ ধনাত্মক সংখ্যাকে উহার অন্যোন্যকের সহিত যোগ করিলে যোগফল ক্ষুদ্রতম হইবে ?

46. প্রদত্ত আয়তনবিশিষ্ট একটি উপর-খোলা চোঙের পার্শ্বতলের পরিমাণ কখন ক্ষুদ্রতম হইবে ?

47. প্রদত্ত আয়তনের একটি শঙ্কুআকৃতির তাঁবুর দৈর্ঘ্য এবং উচ্চতা কত হইলে তাঁবুটি প্রস্তুত করিতে সর্বাপেক্ষা কম কাপড় লাগিবে ?

48. দেখাও যে, বৃত্তের মধ্যে যে-সকল আয়তক্ষেত্র অন্তর্লিখিত করা যায়, তাহাদের মধ্যে যাহার পরিসীমা সর্ববৃহৎ তাহা একটি বর্গক্ষেত্র হইবে।

49. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের ভিতর অন্তর্লিখিত আয়তক্ষেত্রসমূহের মধ্যে যাহার ক্ষেত্রফল সর্ববৃহৎ হইবে সেই আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ বাহির কর।

50. প্রমাণ কর, একটি বৃত্তের মধ্যে যে-সকল সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করা যায় তাহাদের মধ্যে যাহার ক্ষেত্রফল সর্ববৃহৎ সেইটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ হইবে।

51. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ হইতেছে a, উহার অপর দুইটি বাহু নির্ণয় কর ; যাহাতে,

(i) বাহুদ্বয়ের যোগফল বৃহত্তম হইবে,

(ii) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল গরিষ্ঠ হইবে।

52. যদি $s^2=(x-l_1)^2+(x-l_2)^2+\cdots\cdots+(x-l_n)^2$ হয়, যেখানে $l_1, l_2, \cdots\cdots l$ ধ্রুবক, তবে দেখাও s^2-এর ক্ষুদ্রতম মান হইবে

যখন $x=\dfrac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}$.

53. পোস্ট অফিসের নিয়ম অনুযায়ী একটি পার্সেলের মোট দৈর্ঘ্য এবং বেড় 6 ফুটের বেশী হইবে না। যদি পার্সেলটি চোঙাকৃতির হয়, তবে দেখাও

যে উহার আয়তন বৃহত্তম হইবে যদি চোঙটির দৈর্ঘ্য 2 ফুট এবং বেড় 4 ফুট হয়।

54. একটি 16 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার টিনের টুকরার চারিকোণ হইতে x সে. মি. বাহুবিশিষ্ট বর্গ কাটিয়া লইয়া উহার পার্শ্বগুলি মুড়িয়া একটি উপর-খোলা বাক্স তৈয়ারী করা হইয়াছে। ঐ বাক্সের বৃহত্তম আয়তন কত?

55. একটি জাহাজকে চালাইবার জন্য প্রতি ঘণ্টায় যত পেট্রল পোড়ে তাহা ঐ জাহাজের গতিবেগের ঘনের সঙ্গে সমানুপাতিক। দেখাও যে জাহাজটি যদি ঘণ্টায় c মাইল বেগে প্রবাহিত স্রোতের বিপরীত দিকে যায়, তবে একটি নির্দিষ্ট দূরত্বে যাইবার জন্য সর্বাপেক্ষা কম খরচ হইবে যখন জাহাজটির গতি ঘণ্টায় $\frac{3}{2}c$ মাইল।

56. যাত্রার t সেকেণ্ড বাদে একটি কণার O বিন্দু হইতে সরণ s হইলে, দেওয়া আছে $s=36t+6t^2-t^3$. কণাটির 1 সেকেণ্ড বাদে বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর। O হইতে কত দূরত্বে কণাটির ত্বরণ শূন্য হইবে?

57. যদি t সময়ে একটি বস্তুর উচ্চতা h হয়, তবে দেওয়া আছে $h=ut-\frac{1}{2}gt^2$ (u এবং g ধ্রুবক)। t সময়ে কণাটির বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর। কণাটির সর্বাধিক উচ্চতা কত হইবে?

58. একটি শঙ্কু আকৃতির জল-পাত্রের শীর্ষবিন্দু নীচের দিকে। যদি শঙ্কুটির উচ্চতা 15 ইঞ্চি এবং ব্যাসার্ধ 5 ইঞ্চি হয়, তবে যখন শঙ্কুটিতে জলের উচ্চতা x ফুট তখন আয়তন কত? যখন জলের উচ্চতা 10 ইঞ্চি তখন জলের আয়তন কি হারে বাড়িতেছে?

59. একটি জলাধারের উপর অপর একটি জলাধার আছে, এবং দুইটিকে একটি নলদ্বারা যুক্ত করা হইয়াছে। উপরের জলাধারটির তলদেশ 6 ফুট দৈর্ঘ্য এবং 4 ফুট প্রস্থবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্র এবং নীচেরটি 7 ফুট দৈর্ঘ্য এবং $3\frac{1}{2}$ ফুট প্রস্থ-বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র। যদি উপরের জলাধারে 25 ঘন ফুট জল ঢালা হয়, তবে নীচেরটিতে জলের উচ্চতা বাড়িবার হার এবং উপরটিতে জলের উচ্চতা কমিবার হারের তুলনা কর।

60. একটি বৃত্তাকার পাতকে গরম করিবার ফলে উহার সম্প্রসারণ হয়। যখন পাতটির ব্যাসার্ধ 3 ফুট তখন ইহা প্রতি সেকেণ্ডে ·0012 ইঞ্চি বৃদ্ধি পায়। এই সময়ে পাতটির ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির হার নির্ণয় কর।

61. একটি গোলককে গরম করা হইতেছে। যখন গোলকটির ব্যাসার্ধ $2\frac{1}{2}$ ফুট তখন ইহা সেকেণ্ডে ·0015 ইঞ্চি বৃদ্ধি পায়। এই সময় আয়তন বৃদ্ধির হার নির্ণয় কর।

62. কোন গ্যাসের রুদ্ধ তাপ অবস্থায় প্রসারণের নিয়ম হইতেছে $P.V^{1 \cdot 4}=$ ধ্রুবক, যেখানে P এবং V হইতেছে যথাক্রমে গ্যাসের চাপ এবং আয়তন। যখন গ্যাসের আয়তন 10 ঘন মিটার তখন যদি চাপ প্রতি বর্গ সে. মিটারে 25 কিলোগ্রাম হয় এবং ঐ সময়ে যদি প্রতি সেকেণ্ডে আয়তন 2 ঘন মিটার বাড়ান হয়, তবে চাপের পরিবর্তনের হার নির্ণয় কর।

63. t সেকেণ্ড সময়ে যদি একটি চাকা θ রেডিয়ান ঘোরে, তবে $\theta=5\pi t(4-3t+t^2)$. দেখাও চাকাটির সর্বনিম্ন কৌণিক বেগ হইবে 5π এবং দুই সেকেণ্ড বাদে চাকাটির কৌণিক বেগ, ও ত্বরণ বাহির কর।

64. t সময়ে একটি কণার কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে দূরত্ব s হইলে, $s=4t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3$ হয়। কণাটির বেগ নির্ণয় কর। কণাটির সর্বনিম্ন বেগ কত এবং ঐ সময় উহার দূরত্ব কত ?

65. ঋজুরৈখিক গতির জন্য একটি কণার t সময়ে কোন বিন্দু হইতে দূরত্ব s হইলে, $s=ae^{-kt}$, যেখানে a এবং k ধ্রুবক। কণাটির প্রাথমিক বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর।

66. উপরোক্ত উদাহরণের ন্যায় $s=\frac{a}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)$ হইলে দেখাও যে, যে-কোন সময় ত্বরণ s-এর সমান হইবে।

67. O বিন্দু হইতে t সময়ে কোন বস্তুর দূরত্ব হইতেছে $\cos \frac{\pi}{2}t+\sin. \frac{\pi}{2}t$. বৃহত্তম ত্বরণ কত এবং কখন হইবে ? দেখাও যে এই সময় কণাটির বেগ শূন্য।

68. দেখাও যে যদি $\rho=\frac{(1+y_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{y^2}$ হয়, তবে

(i) যখন $y=c.\frac{e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}}{2}$, তখন $\rho=\frac{y^2}{c}$

(ii) যখন $x=a(\cos t+t \sin t)$, $y=a(\sin t-t \cos t)$, তখন $\rho=at$

(iii) যখন $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, তখন $\rho=3(axy)^{\frac{1}{3}}$.

69. $r=f(\theta)$র জন্য যদি $\rho=\frac{(r^2+r_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r_1{}^2-rr_2}$ হয়, তবে

দেখাও যে,

(i) $\rho=\frac{1}{2}a$ যখন $r=a \cos \theta$

(ii) $\rho=\frac{a^2}{3r}$ যখন $r^2=a^2 \cos 2\theta$

(iii) $\theta=\pi$ বিন্দুতে $\rho=l$, যখন $r=\frac{l}{1+e \cos \theta}$.

(iv) $\theta=0$ বিন্দুতে $\rho=a$ যখন $r=a(\theta+\sin \theta)$.

70. যদি $X = x - \frac{y_1 + (1+y_1^2)}{y_2}$, $Y = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$ হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$ যখন $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(ii) $(X+Y)^{\frac{2}{3}} + (X-Y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$ যখন $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

(iii) $X^2 + Y^2 = a^2$ যখন $x = a(\cos t + t \sin t)$ এবং

$$y = a(\sin t - t \cos t)$$

71. $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$ সূত্র হইতে $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় কর।

72. যদি $\sin x . \sin\left(\frac{\pi}{n} + x\right) . \sin\left(\frac{2\pi}{n} + x\right) \cdots\cdots \sin\left(\frac{n-1}{n}\pi + x\right)$ $= \frac{\sin nx}{2^{n-1}}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\cot x + \cot\left(\frac{\pi}{n} + x\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{n} + x\right) + \cdots + \cot\left(\frac{n-1}{n}\pi + x\right) = n \cot nx.$$

73. $\sin x + \sin(x+h) + \cdots + \sin(x+nh)$

$$= \frac{\sin\left(x + \frac{nh}{2}\right) \sin(n+1)\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$

সূত্র হইতে, $\cos x + \cos(x+h) + \cdots + \cos(x+nh)$ শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় হয়। এই শ্রেণী দুইটি হইতে

(i) $\sin x + 2\sin 2x + \cdots\cdots + n \sin nx$

এবং (ii) $\cos x + 2\cos 2x + \cdots\cdots + n\cos nx$

শ্রেণী দুইটির যোগফল নির্ণয় কর।

74. যদি $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$ হয়, তবে θ-র মান বাহির কর যখন (i) $a=1, h=3, f(x) = \sqrt{x}$.

(ii) $a=0, h=3, f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

75. $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{\lfloor 2}f''(\theta h)$ হইলে θ-র মান নির্ণয় কর যখন $f(x) = (1-x)^{\frac{5}{2}}, h = 1$. [C. U.]

76. দেখাও যে, $x^3 - 3xy^2 = -2$ এবং $3x^2y - y^3 = 2$ বক্রদ্বয় পরস্পরকে লম্ব ভাবে ছেদ করে।

77. $ax^3 + by^3 = 1$ এবং $a'x^3 + b'y^3 = 1$ বক্রদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করিলে দেখাও যে $aa'(b-b')^{\frac{4}{3}} + bb'(a-a')^{\frac{4}{3}} = 0$ হইবে।

78. দেখাও যে, $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ রেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করিবে যদি $(a \cos \alpha)^2 + (b \sin \alpha)^2 = p^2$ হয়।

79. (i) $lx+my=1$ সরলরেখা $(ax)^n+(by)^n=1$ বক্রকে স্পর্শ করিবে যদি $\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}}+\left(\frac{m}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}}=1$ হয়।

(ii) $lx+my=1$ রেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্ব হইবে যদি $al^3+2alm^2=n^2$ হয়।

80. দেখাও যে $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$ এবং $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ পরস্পরকে স্পর্শ করিবে যদি $c=a+b$ হয়।

81. যদি $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ হয়, তবে

দেখাও যে,

(i) $ds=\sqrt{1+36x^2}\, dx$ যখন $y=3x^2$

(ii) $ds=\sqrt{\frac{(x+2a)}{3a}}.\ dx$, যখন $27ay^2=4(x-a)^3$

(iii) $ds=\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.\ dx$, যখন $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

82. যদি $\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ হয়, তবে

দেখাও যে,

(i) $ds=adt$, যখন $x=a \cos t$, $y=a \sin t$

(ii) $ds=\frac{3}{2} \sin 2t$, যখন, $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$.

83. দুইটি কণা একই বিন্দু হইতে একসঙ্গে একটি প্রদত্ত সরলরেখা অবলম্বন করিয়া যাত্রা করিল। প্রথমটি সেকেণ্ডে 40 ফুট সমবেগে, এবং দ্বিতীয় কণাটি প্রারম্ভিক বেগ 16 ফুট/সেকেণ্ড এবং সমত্বরণ 6 ফুট/সেকেণ্ড^2 লইয়া যাত্রা করিল। কণা দুইটি পুনরায় মিলিত হইবার আগে উহাদের সর্বাধিক দূরত্ব কখন এবং কত হইবে নির্ণয় কর।

84. একই সময়ে একই স্থান হইতে দুইটি কণা পরস্পর α-কোণে নত দুইটি সরলরেখায় যাত্রা করিল। একটি কণা u-সমবেগে এবং অপর কণাটি স্থির অবস্থা হইতে f-সমত্বরণে চলিতে থাকিলে, দেখাও যে উহাদের ক্ষুদ্রতম আপেক্ষিক বেগ হইবে $u \sin \alpha$, এবং ইহা $\frac{u \cos \alpha}{f}$ সময় পরে হইবে।

85. একটি যুদ্ধ জাহাজ ঘণ্টায় 30 কি.মি. বেগে উত্তরদিকে যাইবার কালে তাহার সোজা পূর্বদিকে 20 কি.মি. দূরে আর একটি জাহাজ দেখিতে পাইল ; এই দ্বিতীয় জাহাজটি পশ্চিম দিকে ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে যাইতেছিল।

কত সময় পরে তাহারা পরস্পরের নিকটতম হয় এবং তখন তাহাদের দূরত্ব কত ?

86. একটি জাহাজ কোন একটি বিন্দু O-এর 21 কি.মি. পূর্বে আছে এবং ইহা পশ্চিম দিকে ঘণ্টায় 28 কি.মি. বেগে যাইতেছে। ঐ সময় আর একটি জাহাজ O বিন্দুর 84 কি.মি. দক্ষিণে অবস্থান করে এবং উত্তরদিকে ঘণ্টায় 21 কিমি. বেগে যাইতেছে।

(i) এক ঘণ্টা পরে তাহারা কি বেগে পরস্পরের নিকটবর্তী বা দূরবর্তী হইতেছে ?

(ii) তিন ঘণ্টা পরে নিকটবর্তী বা দূরবর্তী হইবার হার কি ?

(iii) কখন তাহারা পরস্পরের সর্বাপেক্ষা নিকটবর্তী হইবে ?

87. যাত্রার t-সেকেণ্ড পরে একটি কণার O বিন্দু হইতে সরণ s হইতেছে,

$$s=t^3-9t^2+24t.$$

কণাটি কোন্ অবকাশে O বিন্দুর দিকে গতিশীল হইবে ? কখন কণাটির বেগ কমিবে ? কখন কণাটির বেগ বাড়িবে ?

88. গ্যাসপূর্ণ একটি গোলাকৃতি বেলুন হইতে প্রতি সেকেণ্ডে 900 ঘন সে.মি. গ্যাস বাহির হইয়া যাইতেছে। যখন বেলুনটির ব্যাসার্ধ 450 সে.মি. তখন উহার পার্শ্বদেশ কি হারে সঙ্কুচিত হইবে ?

89 $y=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$, এর চরম এবং অবম মান বাহির কর। কোন্ বিস্তারে y-এর মান বর্ধমান এবং ক্ষীয়মাণ তাহা নির্ণয় কর।

90. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু 6 সে.মি. এবং 8 সে.মি. দীর্ঘ এবং বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ 60°. যদি অন্তর্ভূত কোণ প্রতি সেকেণ্ডে 1° করিয়া বৃদ্ধি পায়, তবে,

(i) তৃতীয় বাহু কি হারে বৃদ্ধি পাইবে ?

(ii) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির হার কি ?

91. ABC ত্রিভুজের a এবং b বাহু যথাক্রমে 25 সে.মি. এবং 16 সে.মি. এবং C কোণের পরিমাপ 60°. যদি a এবং b বাহু সঠিকভাবে মাপা হয়, এবং C-কোণের পরিমাপের ত্রুটি $\frac{1}{2}°$ হয় তবে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের ত্রুটি বাহির কর।

92. a, b, c, d দৈর্ঘ্যের চারিটি দণ্ডকে কব্জার দ্বারা জুড়িয়া একটি চতুর্ভুজ তৈয়ারী করা হইয়াছে। দেখাও যে, চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হইবে, যদি উহা বৃত্তীয় চতুর্ভুজ হয়।

93. (i) $y=(\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)\cdots\cdots \text{to}\infty}}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2 \cot x}{1-y\log\sin x}$$

(ii) $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\cdots \text{to } \infty}}}}$ হয়, তবে

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{2y-1}$$

94. (i) যদি $y=\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+\sqrt{\cdots \text{to}\infty}}}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y-1}$$

(ii) যদি $y=(\log x)^{(\log x)^{(\log x)\cdots \text{to}\infty}}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$x \log x.\ \frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-y\log(\log x)}.$$

95. নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহ হইতে 'c' অপনয়ন কর :—

(i) $y+1=x+c\,e^{-x}$ (ii) $y^{-1}=cx-x\log x$

(iii) $y=cx+\dfrac{a}{c}$ (iv) $c^3x-c^2y-1=0$

(v) $y^2=2cx+c^2$ (vi) $(2y-3x^2-c)(2y+x^2-c)=0$

96. নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহ হইতে a এবং b অপনয়ন কর।

(i) $y=ax+b$ (ii) $ax^2+by^2=1$

(iii) $y=a+b\cos x$ (iv) $y=ax^2+bx^3+\frac{1}{2}x.$

97. (i) যদি $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy=0$, হয় তবে দেখাও যে,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(0,0)}=-\frac{af^2+bg^2-2fgh}{f^3}$$

(ii) যদি $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ হয়, তবে

দেখাও যে, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2}{(hx+by+f)^3}.$

98. একখানি বাষ্পচালিত রেল ইঞ্জিনের কয়লার খরচ উহার বেগের বর্গের সহিত সরলভেদে আছে ; বেগ ঘণ্টায় 32 কি.মি. হইলে প্রতি ঘণ্টায় কয়লা খরচ হয় 2 কুইণ্টাল। যদি প্রতি কুইণ্টাল কয়লার মূল্য 10 টাকা হয়, এবং অন্যান্য খরচ প্রতি ঘণ্টায় 11·25 টাকা হয়, তবে 100 কি.মি. যাইতে কমপক্ষে কত টাকা ব্যয় হইবে ?

99. একটি জলপূর্ণ চোঙাকৃতির পাত্রের গাত্রদেশে একটি ছিদ্র করিলে, জল অনুভূমিক দিকে যে বেগে নিঃসৃত হয় তাহা ঐ ছিদ্রের উপর অবস্থিত জলের উচ্চতার সহিত সমানুপাতিক। দেখাও যে, পাত্রের তলদেশ হইতে পাত্রে জলের উচ্চতার এক-তৃতীয়াংশ উচ্চতায় একটি ছিদ্র করিলে, ঐ ছিদ্র হইতে নিঃসৃত জল পাত্রের তলদেশ হইতে অনুভূমিক দিকে সর্বাপেক্ষা বেশী দূরে নিক্ষিপ্ত হয়।

অন্তরকলনবিদ্যা

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1

1. (i) $x=0$; (ii) $x=0$; (iii) $x=n\frac{\pi}{2}$ (n অখণ্ড সংখ্যা) ; (iv) $x=\pm 2$.

2. (i) $x=0$; (ii) $x=\pm a$. (iii) $\sqrt{x}=-1$. (iv) $x=n\frac{\pi}{2}$ (n, একটি অখণ্ড সংখ্যা)

4. 2·6457...... 5. 1·268.

$\frac{134}{165}$, $\frac{136}{165}$, $\frac{138}{165}$, $\frac{140}{165}$, $\frac{142}{165}$, $\frac{144}{165}$, $\frac{146}{165}$, $\frac{148}{165}$

8. $\sqrt{2}+{\cdot}06$, $\sqrt{2}+{\cdot}12$; $\sqrt{2}+{\cdot}18$, $\sqrt{2}+{\cdot}24$.

11. (i) অসংখ্য (ii) হ্যাঁ (iii) না।

12. (i) মূলদ সংখ্যার ; মূলদ সংখ্যা ; (iii) অসীম অনাবৃত্ত ; (iii) মূলদ।

15. (i) $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[3]{2}$ (iii) $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[6]{25}$.

প্রশ্নমালা 2

1. $f(0)=1$; $f(1)=4$; $f(2{\cdot}1)=9{\cdot}841$; $f(-2)=-23$; $f(a)=a^3-2a^2+4a+1$; $f(-x)=-x^3-2x^2-4x+1$
$f(a+h)=a^3-2a^2+4a+1+(3a^2-4a+4)h+(3a-2)h^2+h^3$.

2. $f(0)=3$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+1$;
$f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=-2\sin h+1$; $f(x)=2\cos x+1$.

3. $f(2)=4$; $f(2{\cdot}1)=4{\cdot}41$; $f(2{\cdot}01)=4{\cdot}0401$
$f(2{\cdot}001)=4{\cdot}004001$; $\frac{f(2{\cdot}0001)-f(2)}{{\cdot}0001}=4{\cdot}0001$.

4. $f(3)=0$, $f(0)=-4$, $f(-1)=0$, $f(4)=0$.

$f(-x)=\frac{(x+3)(x+4)(1-x)}{(2x-3)(x+1)}\ f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(1-3x)(1-4x)(1+x)}{x(2+3x)(1-x)}$;

$f(1)$ অসংজ্ঞের। 5. $f(0)=1$; $f(\log_a{}^x)=x$;

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a^x\frac{a^h-1}{h}$; 6. $f(0)=-\frac{1}{2}$;

$f(-1)=-\frac{2}{3}$; $f(2x)=\frac{2x-1}{4x^2+2}$; $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x(1-x)}{1+2x^2}$;

$f(x+h)=\frac{(x+h)-1}{(x+h)^2+2}$.

15. (i) অযুগ্ম ; অযুগ্ম ; 17. (ii) $-1\leqslant x\leqslant 1$ (iii) $-4\leqslant x\leqslant 5$ (iv) $-\infty<x<\infty$. (v) $x=a$ ভিন্ন সকল বাস্তব সংখ্যা। (vi) $0<x<\infty$. (vii) $-\frac{1}{2}<x<\infty$. 20. $x=0$.

22. $v=4x(8-x)^2$; $0<x<8$; 248

23. $A=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$. 24. $a=2, b=1$. 25. $\frac{13}{2}$.

26. (i) $x=\sqrt{y^2-1}$ (ii) $x=\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)$

(iii) $x=\frac{1}{2}(\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2})$ (iv) $x=\frac{1}{2}(\sqrt{y-3}+\sqrt{y+1})$

27. (i) $-\frac{a+cy}{b+dy}$ (ii) $2\tan^{-1}\sqrt{y}$.

28. $y=1{\cdot}80,\ 0<x\leqslant 1,$
$=1+(k-1)\times{\cdot}18,$
$1+(k-1){\cdot}1<x\leqslant 1+k\times{\cdot}1.$
যেখানে $k=$ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

29. $y=50-x,\quad 0\leqslant x\leqslant 30,$
$=20+(x-30),\quad 30\leqslant x\leqslant 60,$
$=50+2.(x-60),\quad 60\leqslant x\leqslant 120$
$=170,\quad x>120,$

প্রশ্নমালা 3(A)

2. $2{\cdot}99983<x<3{\cdot}00017$.

3. $\lim_{x\to 0}|x|=0$. 4. $\lim_{x\to 0}f(x)$-এর মান নাই।

প্রশ্নমালা 3(B)

1. (i) 2 ; (ii) 16 ; (iii) 1 ; (iv) 1.

1. (b) (i) $x=2$, (ii) $x=1, 2$, (iii) $x=(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$

2. 0. 3. (i) $x=0$. (ii) সন্তত, (iii) $x=0$ সন্তত ; $x=\frac{3}{2}$ অসন্তত
4. কোন অসন্তত বিন্দু নাই।

প্রশ্নমালা 3(C)

1. 6, পরিবর্তন যোগ্য অসন্ততা। 2. $x=1$, $x=2$; পরিবর্তনযোগ্য নহে।
3. 4.

প্রশ্নমালা 3(D)

1. (i) -3 ; (ii) 9, (iii) 12, (iv) 64 ; (v) $-\frac{1}{3}$; (vi) 1 ; (vii) 2 (viii) 4 ; (ix) 1 ; (x) e^2 ; (xi) $\frac{22}{13}$; (xii) 2.

প্রশ্নমালা 3(E)

2. (i) 256 ; (ii) 12 ; (iii) $\frac{7}{6}$; (iv) 32 ; (v) 1 (vi) $\frac{8}{3}$. (vii) 1 ; (viii) e^a.

প্রশ্নমালা 3(F)

1. (i) 0 ; (ii) 1 ; (iii) 0 ; (iv) 2 ; (v) 0 ; (vi) 2
3. (ii) সীমাস্থ মান আছে ; এবং সীমা 0.

প্রশ্নমালা 3

1. (i) 4 ; (ii) $\frac{\pi}{2}$; (iii) $1-e$; (iv) -4 ; (v) 9 ; (vi) $\frac{2}{\pi}$; (vii) 10. (viii) $\frac{c}{f}$.

2. (i) 1 ; (ii) 4 ; (iii) 2. (iv) $\frac{1}{2}$; (v) $-\frac{3}{4}$; (vi) 2 ; (vii) 3 ; (viii) 1 ; (ix) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

4. (i) 3 ; (ii) $\frac{5}{3}$; (iii) $\frac{b^2-a^2}{2}$; (iv) $\frac{m}{n}$; (v) $\frac{3}{5}$; (vi) 2 ; (vii) $\frac{1}{2}$; (viii) 1 ($\cos 2x$-এর স্থলে $\cos x$ পড়) ; (ix) 2 ; (x) $\sin a - a\cos a$; (xi) $\frac{4}{3}$; (xii) $\frac{\alpha}{\beta}$; (xiii) 2 ; (xiv) 2 ; (xv) ∞ ; (xvi) 2. 5. (i) $\frac{4}{5}a$; (ii) $\frac{4}{21}$; (iii) $\frac{1}{12}$; (iv) $\frac{1}{6}$; (v) 1 ; (vi) $\frac{1}{2}$; (vii) $\frac{3}{2}$.

6. (viii) সীমাটি নির্ণয় করা যায় না ; (ix) এ সীমাটি -1 এবং (x) সীমাস্থ মান -2 হইবে। 9. (i) $2x$ (ii) $-\text{cosec}^2 x+2$ (iii) $\sec x.\tan x$; (iv) $-\frac{2}{x^3}$ 10. (i) $-\frac{1}{3}$; (ii) e ; (iii) 1. 11. মান নাই।

প্রশ্নমালা 4A

1. (i) $\cdot 02x - \cdot 0299$ (ii) $\dfrac{3x-\cdot 75}{x^2(x-\cdot 5)^2}$ (iii) 0.

2. (i) $-\cdot 1,\ -2\cdot 37,\ 23\cdot 7$; (ii) $1\cdot 1,\ 4\cdot 957,\ 4\cdot 506$; (iii) $2,\ \dfrac{98}{3375},\ \dfrac{49}{3375}$.

3. (i) $\Delta x\{3x^2+3x.\Delta x+(\Delta x)^2\}$

(ii) $\dfrac{-\Delta x}{(x-1)(x+\Delta x-1)}$; (iii) $\dfrac{2(x-1)\Delta x+(\Delta x)^2}{(x-1)^2(x+\Delta x-1)^2}$

(iv) $a.\Delta x - \dfrac{b.\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

(v) $3.\Delta x\{4x^3+2x+6x^2\Delta x+\Delta x+4x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\}$

(vi) $x\dfrac{\sin\Delta x}{\sin x.\sin(x+\Delta x)}+\Delta x.\tan(x+\Delta x)+2x.\Delta x+(\Delta x)^2$

(vii) $-\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}\{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}+(x+\Delta x)^{\frac{4}{3}}\}}+4.\Delta x$

প্রশ্নমালা 4B

1. (i) 2 (ii) $8x$ (iii) x^2 (iv) $2ax$

(v) $-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ (vi) $\dfrac{-a}{(ax+b)^2}$ (vii) $-\dfrac{3}{x^4}$

(viii) $3x^2+1$.

2. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) -2. 3. (i) 3 (ii) 0 (iii) 2.

4. (i) -2 (ii) $-\frac{10}{9}$ (iii) $-\dfrac{2(a^2+1)}{(a^2-1)^2}$ 5. $2xe^{x^2}$

6. $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

7. (i) $2ax+b$ (ii) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (iii) $-\dfrac{2}{x^3}$ (iv) $4(2x+3)$

(v) $-\dfrac{1}{(x+1)^2}+e^x$ (vi) $\dfrac{ax}{\sqrt{ax^2+b}}$ (vii) 0.

8. $6t+4$. 9. $\cos t+2t$.

প্রশ্নমালা 4C

(i) $2x$ (ii) $99x^{98}$ (iii) $1000x^{999}$ (iv) $2\cdot 5x^{1\cdot 5}$
(v) $1\cdot 5x^{\cdot 5}$ (vi) $-3x^{-4}$ (vii) $-1\cdot 5x^{-2\cdot 5}$ (viii) $-3x^{-4}$
(ix) $\dfrac{-20}{x^{21}}$ (x) $-\dfrac{2\cdot 1}{x^{3\cdot 1}}$ (xi) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (xii) $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

(xiii) $\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ (xiv) $-\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}$ (xv) $\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$ (xvi) ex^{e-1}

প্রশ্নমালা 4D

1. (i) $12x^2$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (iii) $-5\sin x$ (iv) $-\frac{9}{4x^4}$

(v) $\sqrt{x}$ (vi) $-\frac{4}{x^3}$. (vii) $2^{x+2}.\log 2$.

প্রশ্নমালা 4E

1. (i) $8x+5$ (ii) $-\frac{3}{x^2}+4x$ (iii) $6x+1$ (iv) $2ax+b$

(v) $\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{3}{2}.\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}-\sec x.\tan x$

(vi) $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 x$ (vii) $2x+3$

(viii) $2nx^{2n-1}-2nx$ (ix) $-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(x) $\frac{5}{6}.\frac{1}{x^{\frac{1}{6}}}+\frac{1}{12}.\frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}}$ (xi) $\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$

(xii) $\cos x-2\sin x+3\sec^2 x-4\operatorname{cosec}^2 x+5\sec x.\tan x$
$-6\operatorname{cosec} x.\cot x-e^x$ (xiii) $1-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$.

(xiv) $-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2x^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\operatorname{cosec} x.\cot x$

প্রশ্নমালা 4F

1. (i) $6-4x-12x^2$ (ii) $-12x-45x^2+45x^4$

(iii) $4x^3+2x$ (iv) $\sec x.(2x+x^2\tan x)$ (v) $\frac{x^2-1}{x^2}$

(vi) $(e^x+1)\sin x+e^x.\cos x$ (vii) $\sec x(1+2\tan^2 x)$

(viii) $\sec^2 x-\operatorname{cosec}^2 x$ (ix) $2\tan x\sec^2 x$

(x) $4x^3(1+\sqrt{x})+\frac{1}{2}x^{\frac{7}{2}}$ (xi) $\operatorname{cosec} x-x\operatorname{cosec} x.\cot x$

(xii) $x^{n-1}(n\cot x-x\operatorname{cosec}^2 x)$

(xiii) $\operatorname{cosec}^2 x-2x\operatorname{cosec}^2 x.\cot x$

(xiv) $xe^x\{(x+2)\cos x-x\sin x\}$

(xv) $5x^4+16x^3+8x+16-2x(3x+8)\cos x+2x^2(x+4)\sin x$
$-e^x(x^3+3x^2+4-2x\sin x+2\cos x+2x\cos x)$

(xvi) $\operatorname{cosec} x - x\operatorname{cosec} x.\cot x$

(xvii) $-\dfrac{1}{x^2}\cos x-\dfrac{\sin x}{x}$

(xviii) $2x\cot x - x^2\operatorname{cosec}^2 x$

প্রশ্নমালা 4G

1. (i) $\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$ (ii) $\dfrac{2}{(x+1)^2}$ (iii) $\dfrac{x(x-8)}{(x-4)^2}$

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$ (v) $\left(-x-3\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)/\left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)^2$

(vi) $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (vii) $\dfrac{4b(c-ax^2)}{(ax^2-2bx+c)^2}$ (viii) $\dfrac{-2}{(2x+1)^2}$

(ix) $\dfrac{-a}{(ax+b)^2}$ (x) $-\dfrac{3x^2}{(x^3-1)^2}$

(ix) $\dfrac{(-e^{2x}+e^x\{1-(x+1)\cos x-x\sin x\}-\sin x}{(xe^x+1)^2}$

(xii) $\dfrac{x^4+3x^2-2x}{(x^2+1)^2}$

(xiii) $-[x^4+2x^3+8x^2+2x-2+(x^2+x)\cot x$
$+(x^2-x+1)\cot^2 x]/(x^2-x+1)^2.\, e^x$

(xiv) $-\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

(xv) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(x^2+1)}\left(2x\cos x+\sin x-\dfrac{1}{x}\right)$
$-\dfrac{2\sqrt{x}}{(x^2+1)^2}(1+x\sin x)$

প্রশ্নমালা 4H

1. (i) $10x(x^2+1)^4$ (ii) $-\dfrac{4x}{(x^2-1)^3}$ (iii) $20x(x^2+a^2)^9$

(iv) $6(x+1)\sqrt{2x^2+4x+1}$

(v) $n(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{n-1}$ (vi) $\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+7}}$

(vii) $2\cos 2x$ (viii) $-3\sin 3x$ (ix) $-5\operatorname{cosec}^2 5x$

(x) $n\sec nx.\tan nx$ (xi) $\frac{1}{2}\sqrt{\cot x.\cos x}$

(xii) $3x^2\cos(x^3)$. (xiii) $\sec x.\operatorname{cosec} x$,

(xiv) $-\cot x$, (xv) $-\tan x$ (xvi) $-\frac{1}{x}\sin(\log x)$

(xvii) $-\sec x$, (xviii) $\frac{1}{e^x+1}$ (xix) $\frac{1}{x\log x}$

2. (i) $-\frac{3x}{(x^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}$ (ii) $\frac{1+x^2}{\sqrt{2x}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(iii) $\frac{a}{(x+a)\sqrt{x^2-a^2}}$

(iv) $\frac{n}{2}\cdot\frac{\cos nx}{\sqrt{\sin nx}}$ (v) $-3x^2\sin(\sin x^3).\cos x^3$

(vi) $4\sin 2x.\cos 2x$ (vii) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\sec^2\sqrt{2x+1}$

(vii) $\cos(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}.\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

(ix) $\frac{1}{2}\sin x.e^{\sin^2\frac{1}{2}x}.\sec^2\left\{e^{\sin^2\frac{1}{2}x}\right\}$ (x) $\sec x$,

(xi) $\log 10\log ex.10^{x\log x}$ (xii) $\frac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

প্রশ্নমালা 4(J)

1. (i) $-\frac{9x}{4y}$ (ii) $-\frac{3x^2y^4-7(x+y)^6}{4x^3y^3-7(x+y)^6}$.

(iii) $\frac{2(x+y)}{1-2(x+y)}$ (iv) $-\frac{b^m}{a^m}\cdot\frac{x^{m-1}}{y^{m-1}}$ (v) $-\frac{ax+hy}{hx+by}$

(iv) $\frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$ (vii) $\frac{1-y\cos(xy)}{x\cos(xy)-1}$

(viii) $\frac{y-\cos(x+y)}{\cos(x+y)-x}$ (ix) $\frac{1-y\sec^2(xy)}{x\sec^2(xy)-1}$

(x) $-\frac{3\cos 3x}{4\sin 4y}$ (xi) $-\frac{y(1-x)}{x(1-y)}$ (xii) $\frac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}$

(xiii) $-\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}$ (xiv) $-\frac{y}{x}$.

প্রশ্নমালা 4(K)

1. (i) $-\cot\theta$ (ii) $\frac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$, (iii) $\frac{2t}{1-t^2}$

(iv) $-\frac{1}{t^2}$ (v) $-\frac{b}{a}\tan\theta$ (vi) $\tan\frac{1}{2}t$.

2. (i) $2.x^{2x}(1+\log x)$ (ii) $x^{\tan x}\left(\frac{1}{x}\tan x+\log x.\sec^2 x\right)$

(iii) $(\cos x)^{\sin x}\{\cos x.\log\cos x - \tan x.\sin x\}$

(iv) $2\log x.x^{\log x-1}$ (v) $y.\dfrac{1+\log(x+y)}{1-y\log(x+y)-y}$

(vi) $\sin x.e^{x}x^{x}\{\cot x+\log x+2\}$

(vii) $\dfrac{x(x^2+4)^{\frac{1}{3}}}{(x^3+5)^{\frac{1}{4}}}\left\{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{3(x^2+4)}-\dfrac{3x^2}{4(x^3+5)}\right\}$

(viii) $-\dfrac{y}{x}.\dfrac{x\log y+y}{y\log x+x}$

(ix) $y\left\{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+2x}+\dfrac{3}{1+3x}+\dfrac{4}{1+4x}\right\}$;

(x) $\dfrac{1}{2}y.\left\{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}\right\}$.

3. (i) $(x+1)(e^{x})^{e^{x}+1}$ (ii) $(\log x)^{x}\left\{\log(\log x)+\dfrac{1}{\log x}\right\}$

(iii) $(x^2+2)^{x^3+3x}\{3(x^2+1)(x^2+2)\log(x^2+2)$
$+2x(x^3+3x+1)\}$

প্রশ্নমালা 4(L)

1. (i) $(3x^2-2)dx$ (ii) $(3ax^2+2bx+c)dx$

(iii) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)dx$ (iv) $\dfrac{x^2+c^2}{cx^2}dx$ (v) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

(vi) $(1+\log x)dx$ (vii) $\dfrac{\log x}{(1-x)^2}dx$

(viii) $-\dfrac{2}{1-\sin 2x}dx$ (ix) $\tan^4 x\,dx$ (x) $2e^{x}\cos x\,dx$

2. (i) $\Delta y=\cdot0101$, $dy=\cdot01$
(ii) $\Delta y=\cdot07366$ $dy=\cdot08726$
(iii) $\Delta y=\cdot098808$ $dy=\cdot01$
(iv) $\Delta y=\cdot1904$ $dy=\cdot189732$

3. ·86777 ; ·49242 4. 1·00267

5. (i) 2·47759 (ii) 3·73295

প্রশ্নমালা 4(M)

1. (i) 2 (ii) $2a$ (iii) $\dfrac{2}{x^3}$ (iv) $\cos x - x\sin x$

(v) $n(n-1)ax^{n-2}+\dfrac{n(n+1)b}{x^{n+2}}$.

(vi) $-\operatorname{cosec}^2 x$ (vii) $\frac{1}{x}$ (viii) $-\frac{4}{(x+1)^3}$

2. (i) $-\frac{a}{xy}$ (ii) $-\frac{a^2}{y^3}$ (iii) $\frac{2c^2}{x^3}$ (iv) 0.

3. (i) $-\frac{1}{a\sin^3\theta}$ (ii) $-\frac{b}{a^2}\cot^3\theta$ (iii) $\frac{2}{at^3}$

(iv) $\frac{b}{3a^2}\sec^4\theta\operatorname{cosec}\theta$ (v) $\frac{1}{a(1+\cos t)^2}$

(vi) $\frac{2(1+t^2)^3}{3a(1-t^2)^3}$.

5. $y+2x-4=0$; $2y-x-3=0$

6. $ty=x+at^2$; $y+tx=2at+at^3$.

7. $ax-by=a^2-b^2$

11. (i) (a) $-4<x<2$ (b) $1<x<2$ (ii) $1<x<3$

প্রশ্নমালা 4(N)

1. $\frac{5}{8}, \frac{5}{8}$; $\frac{3}{8}, \frac{2}{3}$ 2. $a\sqrt{2}, a\sqrt{2}$; a, a.

3. $a(1-t\cot t), a(\tan t-t)$;
$a\cos t(1-t\cot t), a\sin t(\tan t-t)$

5. $x=2$ বিন্দুতে চরম মান$=10$; $x=4$ বিন্দুতে অবম মান$=6$

6. (i) $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ বিন্দু সমূহে চরম মান, $x=n\pi+(-1)^n\frac{7\pi}{6}$ বিন্দু সমূহে অবম মান।

(ii) $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে চরম মান, $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ বিন্দুতে অবম মান।

(iii) $x=n\pi$ বিন্দুসমূহে চরম মান ; $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ বিন্দু সমূহে অবম মান।

প্রশ্নমালা 4

1. (i) $e^{x^3+4x+1}.(3x^2+4)$ (ii) $e^{\sin x}.\cos x$

(iii) $e^{\tan^{-1}x}.\frac{1}{1+x^2}$ (iv) $e^{\sqrt{x+1}}.\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ (v) e^{e^x+x}

2. (i) $(2x+1)\cos(x^2+x+1)$ (ii) $\frac{1}{x}\cos(\log x)$

(iii) $e^{x} \cos(e^{x})$ (iv) $\frac{1}{1+x^2} \cos(\tan^{-1} x)$

(v) $(2x \cos x - x^2 \sin x) \cos(x^2 \cos x)$.

3. (iv) $\frac{2x+1}{\sqrt{2x+x^2-2x^3-x^4}}$ (v) -1 (vi) $\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}$

(vii) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ (viii) $\frac{2x}{-(x^2+a^2)^2}$

(ix) $-\frac{1}{(x+e^{x} \log x)^2} \cdot \left(1+e^{x} \log x + \frac{1}{x} e^{x}\right)$

(x) $-\frac{1}{\{\sin^{-1}(x^2+4)\}^2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+4)^2}}$.

4. (i) $\frac{1-x^2}{1+x^2+x^4}$ (ii) $\frac{1}{2(a-b)}\left\{\frac{1}{\sqrt{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x+b}}\right\}$.

(iii) $\frac{-1}{(\cos x+\sin x)\sqrt{\cos 2x}}$

(iv) $y\left[\frac{1}{2x}-\frac{2}{3(1-x)}+\frac{9}{4(2-3x)}+\frac{16}{5(3-4x)}\right]$

(v) $\sin x . e^{x} . \log x . x^{x}\left[\cot x+\frac{1}{x \log x}+\log x+2\right]$

(vi) $(\tan x)^{\cot x} . \operatorname{cosec}^2 x \log(e \cot x)-(\cot x)^{\tan x} .$
$\sec^2 x \log(e \tan x)$.

(vii) $e^{x^{x}} . x^{x} . \log ex$

(viii) $(1+x^{-1})^{x}[\log(1+x^{-1})-(1+x)^{-1}]$

(ix) $\frac{x^2}{(1-x^4)}$ (x) $x^{x^2+1} . \log ex^2$.

(xi) $x^{(x^{x})} . x^{x-1} . [1+x \log x \log(ex)]$

(xii) $\frac{\sin \alpha}{1-2x \cos \alpha+x^2}$. (xiii) $\frac{\log \sin x-\cot x \log x}{x(\log \sin x)^2}$

(xiv) $\frac{1-\log x}{x^2}$ (xv) $-\frac{\log 4}{x(\log x)^2}$

(xvi) $2x^{\log x-1} \log x+(\log x)^{x}\left\{\log(\log x)+\frac{1}{\log x}\right\}$

(xvii) $-\frac{y^{x} \log y+y x^{y-1}}{x^{y} \log x+x y^{x-1}}$

6. (i) -1 (ii) $\frac{2}{1+x^2}$ (iii) $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

(iv) $-\frac{1}{2}$ (v) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (vi) -1

(vii) $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (viii) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ (ix) $\frac{-\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x}$

(x) $\frac{(a^2-b^2)\sin x}{(a^2+b^2)(1+\cos^2 x)+4ab\cos x}$

(xi) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}$ (xii) $\frac{2a^2x}{a^4+x^4}$

(xiii) 1, (xiv) $\frac{1}{2}$.

7. (i) $\frac{2}{3}$, (ii) $-\frac{1}{2}$, (iii) $-\frac{1}{2}$, (iv) $-\frac{4}{5}$, (v) 1.

8. (i) $\frac{8}{3}x^5$ (ii) $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) 1.

(v) $x^{\sin^{-1}}\left\{\log x+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\sin^{-1}x\right\}$

14. 44 বর্গ মি. মি., ·3% (প্রায়) 15. 1·39 ইঞ্চি (প্রায়)
16. ·33075 ঘন সে. মি., 29% (প্রায়)
17. 2·2% 18. ·02 (প্রায়) 23. সন্তত এবং অন্তরকলনযোগ্য নহে,
27. $xx_1^{-\frac{1}{3}}+yy_1^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. 28. (i) (1, −1), (−1, 1)
(ii) $\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 29. (3, 0), $(\frac{7}{3}, \frac{4}{27})$

31. $x+y=2$, $x-y=0$.

32. (i) (0, 0), $(\frac{1}{3}\,2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}.2^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{2}{3}})$;
(0, 0), $(\frac{1}{3}.2^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}.\,2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})$

(ii) $ax+hy=0$ রেখার দ্বারা ছেদিত বিন্দুদ্বয়; $hx+by=0$ রেখার দ্বারা ছেদিত বিন্দুদ্বয়।

33. $y=0$ এবং $y-\frac{4}{3}x=-\frac{4}{9}$, $y-\frac{4}{3}x=-\frac{16}{27}$

34. (2, 4) 43. 6, 6 44. 9, 1 45. 1

46. উচ্চতা=ব্যাসার্ধ হইলে, 4. উচ্চতা= $\sqrt{2}$ × ব্যাসার্ধ

49. $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$ 51. $\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}$ 54. $\frac{8192}{27}$

56. 45, 6, 88. 57. $u-gt$, $-g$, $\frac{u^2}{2g}$ 58. $\frac{1}{27}\pi x^3$, 34·9

59. 49 : 48 60. ·27 বর্গ ই./সে. 61. 17 ব. ই./সে.

62. 7 কি. গ্রা./ব. সে. মি. কমিবে 63. 20π, 30π

64. $4-t+t^2$, $3\frac{3}{4}$, $\frac{23}{12}$ **65.** $-ak$, ak^2.

67. $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$, $(2n+\frac{1}{2})$ সেকেণ্ড **71.** $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

73. $\frac{\cos\left(x+\frac{nh}{2}\right).\sin\left(n+1\right)\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$

(i) $\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{1}{2}x}$

(ii) $\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x}{4\sin^2\frac{1}{2}x}$

74. (i) $\frac{5}{12}$ (ii) $\frac{1}{6}(3\pm\sqrt{3})$ **75.** $\frac{9}{25}$.

83. 4 সে., 48 ফুট, **85.** $19\frac{1}{5}$ মি., 12 কি. মি.

86. (i) নিকটবর্তী, $161\sqrt{82}$ কি. মি./ঘণ্টা,

(ii) দূরবর্তী, $4{\cdot}2\sqrt{10}$ কি. মি./ঘণ্টা (iii) 1 ঘণ্টা 55 মি.

87. $2<t<4$; $t<3$; $t>3$ **88.** 4 বর্গ সে. মি.

89. অধম মান $y=0$, যখন $x=-2$ এবং $x=1$; চরম মান $y=\frac{81}{16}$ যখন $x=-\frac{1}{2}$; $x<-2$ এবং $-\frac{1}{2}<x<1$ বিস্তারে ক্ষীয়মাণ, $-2<x<-\frac{1}{2}$ এবং $x>1$ বিস্তারে বর্ধমান।

90. (i) $\frac{\pi}{5\sqrt{39}}$ সে. মি./সেকেণ্ড (ii) $\frac{\pi}{15}$ বর্গ সে. মি./সেকেণ্ড

91. $\frac{5\pi}{18}$ বর্গ সে. মি.

95. (i) $y_1+y=x$, (ii) $xy_1+y=xy^2$, (iii) $y=xy_1+\frac{a}{y_1}$

(iv) $y_1{}^3x-y_1{}^2.y-1=0$ (v) $y=yy_1{}^2+2xy_1$;

(vi) $y_1{}^2-2xy_1-3x^2=0$. **96.** (i) $y_2=0$

(ii) $x(yy_2+y_1{}^2)=yy_1$; (iii) $y_2=y_1\cot x$;

(iv) $x^2y_2-4xy_1+6y=x$. **98.** 93·75 টাকা।

শুদ্ধিপত্র

পৃষ্ঠা (page)	লাইন (line)	দেওয়া আছে (instead of)	পড়তে হইবে (read)
83	শেষ লাইন, প্রশ্ন (xvii)	$\frac{e^{x+h}-e}{h}$	$\frac{e^{x+h}-e^{x}}{h}$
122	13	$-\tan x \frac{d}{dx}(x)$	$+\tan x \frac{d}{dx}(x)$
122	14	$x \sec^2 x - \tan^2 x$	$x \sec^2 x + \tan^2 x$
122	15	$-(3x^2+1) \tan x$	$-(2x^2-1) \tan x$
192	17, প্রশ্ন. 27.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$x^2+y^2=a^2$
193	13, প্রশ্ন. 36. (i)	$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{2}}=a^{\frac{2}{3}}$	$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$
196	19, প্রশ্ন. 62	$\rho=\frac{(1+y_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{y^2}$	$\rho=\frac{(1+y_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}$
197	1, প্রশ্ন, 70	$X=x-\frac{y_1+(1+y_1{}^2)}{y_2}$	$X=x-\frac{y_1(1+y_1{}^2)}{y_2}$

উত্তরমালার সংশোধন :

প্রশ্নমালা 2 : 17 (ii), (iii),……(vii) এর স্থলে 17 (i), (ii),……(vi) পড়িতে হইবে।

22 : 248 এর স্থলে 288 হইবে।

28 : $y=1{\cdot}80$, যখন $0<x\leqslant1$

$=1{\cdot}80+{\cdot}18k$, যখন $1+(k-1){\cdot}1<x\leqslant1+k\times{\cdot}1$, ইত্যাদি

প্রশ্নমালা 4B : 3(i) 3এর স্থলে 2 হইবে

প্রশ্নমালা 4F : 1(xv). $-2x \sin x+2 \cos x+2x \cos x$ এর স্থলে $+2x \sin x-2 \cos x-2x \cos x$ হইবে।

প্রশ্নমালা 4C : 1(xiii). $8x^2$-এর স্থলে $5x^2$ হইবে।

সমাকলনবিদ্যা ও অন্তরকল-সমীকরণ

(Integral Calculus and Differential Equations)

প্রথম অধ্যায়
অনিশ্চিত সমাকল
(Indefinite Integral)

§ 1·1. সমাকলনবিদ্যা বা ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাসের উদ্দেশ্য (Aim of Integral Calçulus) :

'সমাকলন' (Integration) বলিতে যোগফল 'নির্ণয়' বুঝায়। কোন অসীম শ্রেণীর পদগুলি শূন্যের দিকে অগ্রসর হইলে বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে ঐ প্রকার শ্রেণীর মান নির্ণয় করাই সমাকলনবিদ্যার উদ্দেশ্য। প্রকৃতপক্ষে বক্ররেখাদ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের প্রচেষ্টায় এই প্রকার শ্রেণীর যোগফল নির্ণয়ের প্রয়োজন হইতে সমাকলনবিদ্যার উদ্ভব হয়। আবার সমাকলনবিদ্যার আর একটি দিকও আছে। এই দিকটি হইতেছে কোন অপেক্ষকের কোন চলের সাপেক্ষে **অন্তরকলজ** বা **ডিফারেন্সিয়াল গুণাঙ্ক** (derivative) জানা থাকিলে মূল অপেক্ষকটি (Primitive) নির্ণয়। এই দিক হইতে সমাকলনবিদ্যার পদ্ধতি অন্তরকলন বিদ্যার পদ্ধতির বিপরীত। এই দিক দুইটি কিন্তু পরস্পর বিচ্ছিন্ন নয়। **"সমাকলন বিদ্যার মৌল উপপাদ্য"**-এ (Fundamental theorem of Integral Calculus-এ) এই দুইটি দৃষ্টিভঙ্গীর সমন্বয় সাধিত হইয়াছে। এই উপপাদ্য সম্বন্ধে চতুর্থ অধ্যায়ে আলোচনা করা হইবে।

ফলিত গণিত, পদার্থ বিদ্যা এবং বিজ্ঞানের অন্যান্য বিভিন্ন শাখায় সমাকলনবিদ্যার বহুল প্রয়োগ করা হয়। এই পুস্তকের বলবিদ্যা অংশে তোমরা সমাকলনবিদ্যার প্রয়োগ সম্বন্ধে পরিচিত হইবে।

ঐতিহাসিক দিক হইতে সমাকলন বিদ্যার উৎপত্তি প্রথম দৃষ্টিভঙ্গী হইতে। কিন্তু, এই পুস্তকে দ্বিতীয় দৃষ্টিভঙ্গী, অর্থাৎ সমাকলন, অন্তরকলনের বিপরীত প্রক্রিয়ারূপেই প্রথমে আলোচিত হইবে।

§ 1·2. সমাকলন, অন্তরকলনের বিপরীত পদ্ধতি : অনিশ্চিত সমাকল (Integration as the inverse process of differentiation : Indefinite Integral) :

তোমরা জান $\frac{d}{dx}(x^2)=2x$. বিপরীতক্রমে লেখা হয়, $\int 2x dx=x^2$ এবং পড়া হয় x চলের সাপেক্ষে $2x$এর সমাকল x^2. তোমরা শিখিয়াছ যে x^2

হইতে অন্তরকলন প্রক্রিয়ার সাহায্যে $2x$ পাওয়া যায়। $2x$ হইতে x^2 পাওয়ার প্রক্রিয়াকে x চলের সাপেক্ষে **সমাকলন** (Integration with respect to x) প্রক্রিয়া বলে। $2x$কে **সমাকল্য** (Integrand) এবং $\int 2x dx$ বা x^2কে x চলের সাপেক্ষে সমাকল্য $2x$এর **অনিশ্চিত সমাকল** (Indefinite Integral) বলা হয়। $\int 2x dx$-এ dx, x-এর **অন্তরকল** বা ডিফারেন্সিয়াল। x চলের সাপেক্ষে অন্তরকলন প্রক্রিয়ার চিহ্ন যেরূপ $\frac{d}{dx}$, সেইরূপ x-চলের সাপেক্ষে সমাকলন প্রক্রিয়ার চিহ্ন $\int dx$.

উদাহরণ। যেহেতু $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$

$\therefore \quad \int \cos x\, dx=\sin x.$

সংজ্ঞা : যদি $\frac{d}{dx}\{f(x)\}=g(x)$ হয়, তবে $\int g(x)dx=f(x)$.

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\int g(x)dx= f(x)$ হইলে,

$\frac{d}{dx}\{f(x)\}=g(x)$, বা, $\frac{d}{dx}\{\int g(x)dx\}=g(x)$.

1·3. কোন চলের সাপেক্ষে কোন অপেক্ষকের একটিমাত্র সমাকল থাকিতে পারে না : সমাকলন-ধ্রুবক (The integral of a function with respect to a variable is not unique : Constant of Integration) :

মনে কর $\int f(x)dx=g(x)$. $\quad\therefore\quad \frac{d}{dx}\{g(x)\}=f(x)$.

আবার $\frac{d}{dx}\{g(x)+c\}=f(x)$ [c, যে কোন একটি ধ্রুবক]

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $\int f(x)dx=g(x)+c$.

অর্থাৎ $g(x)+c$, x চলের সাপেক্ষে $f(x)$-এর একটি সমাকল (Integral).

সুতরাং x চলের সাপেক্ষে $f(x)$-এর সমাকল-সংখ্যা একাধিক।

আবার, যদি $g(x)$ ও $h(x)$, x চলের সাপেক্ষে $f(x)$ এর দুইটি সমাকল হয়, তবে $g(x)$ ও $h(x)$-এর অন্তর একটি ধ্রুবক।

কারণ, যেহেতু $\int f(x)dx=g(x)$ এবং $\int f(x)dx=h(x)$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}\{g(x)\}=f(x)$ ও $\frac{d}{dx}\{h(x)\}=f(x)$.

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\{g(x)\}-\frac{d}{dx}\{h(x)\}=0, \quad \text{বা,} \quad \frac{d}{dx}\{g(x)-h(x)\}=0$$

$\therefore \quad g(x)-h(x)$ একটি ধ্রুবক।

কারণ, তোমরা অন্তরকলনবিদ্যা অংশে শিখিয়াছ যে, কোন অপেক্ষক ধ্রুবক না হইলে, কোন চলের সাপেক্ষে উহার ডিফারেন্সিয়াল গুণাঙ্ক বা পরিবর্তনের হার শূন্য হইতে পারে না।

সুতরাং $g(x)$ ও $h(x)$-এর অন্তর একটি ধ্রুবক। [অন্তরকলনবিদ্যা অংশের উদাহরণ 7, বিবিধ উদাহরণমালা 4 দেখ]

এখন, উপরের আলোচনা হইতে ইহা স্পষ্ট যে, x চলের সাপেক্ষে $f(x)$-এর একটি সমাকল $g(x)$ হইলে $g(x)+c$ ও (c একটি ধ্রুবক) x চলের সাপেক্ষে $f(x)$-এর একটি সমাকল হইবে। c-এর বিভিন্ন মানের জন্য x চলের সাপেক্ষে $f(x)$-এর বিভিন্ন সমাকল পাওয়া যাইবে। c-এর মান 0 হইলে $g(x)$ হইবে x চলের সাপেক্ষে $f(x)$-এর একটি সমাকল। সুতরাং $g(x)+c$, x চলের সাপেক্ষে $f(x)$-এর সমাকলের বা $\int f(x)dx$-এর সাধারণ আকার। c-কে **স্বেচ্ছ সমাকলন-ধ্রুবক** (arbitrary constant of integration) বলে। কোন চলের সাপেক্ষে কোন অপেক্ষকের অনিশ্চিত সমাকলের সহিত সর্বদাই একটি স্বেচ্ছ সমাকলন-ধ্রুবক (যাহার যে কোন মান হইতে পারে; অর্থাৎ স্বেচ্ছ ধ্রুবকটি 5, 6 ইত্যাদি নয়; c, k ইত্যাদি আকারের) যোগ করিয়া সমাকলের সাধারণ আকারটি প্রকাশ করিতে হয়।

উপরের আলোচনায় দেখা গেল যে, কোন চল x-এর সাপেক্ষে কোন অপেক্ষক $f(x)$-এর একাধিক সমাকল পাওয়া যায়। অর্থাৎ কোন অপেক্ষককে নিশ্চিত করিয়া বলা যায় না যে, একমাত্র ইহাই x চলের সাপেক্ষে $f(x)$-এর সমাকল। এইজন্য $\int f(x)dx$ আকারের সমাকলকে **অনিশ্চিত সমাকল** (Indefinite Integral) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য: সময় সংক্ষেপের জন্য এই পুস্তকে অনেক ক্ষেত্রে সমাকলন-ধ্রুবক যোগ করা হইল না। কিন্তু তোমরা সর্বদাই ইহার উপস্থিতি স্মরণ রাখিবে। অনিশ্চিত সমাকল নির্ণয় করার অর্থ সমাকলের সাধারণ আকার নির্ণয়। সমাকলন-ধ্রুবক অনুপস্থিত থাকিলে সমাকলের সাধারণ আকার পাওয়া যায় না।

§ 1·4. আদর্শ আকার:

(1) $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c \;(n\neq-1)$.

প্রমাণ। $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)+\frac{d}{dx}(c)$

$$=\frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}\left(x^{n+1}\right)+0=\frac{1}{n+1}\left(n+1\right)x^{n}=x^{n}.$$

$\therefore \quad \int x^{n}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c \ (n\neq-1).$

উদাহরণ।

1. $\int x^{5}dx=\frac{x^{5+1}}{5+1}+c=\frac{x^{6}}{6}+c.$

2. $\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c.$

3. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+c=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+c.$

4. $\int x^{-6}dx=\frac{x^{-6+1}}{-6+1}+c=\frac{x^{-5}}{-5}+c=-\frac{x^{-5}}{5}+c.$

5. $\int dx=\int 1\,dx=\int x^{0}dx=\frac{x^{0+1}}{0+1}+c=\frac{x^{1}}{1}+c=x+c.$

অনুশীলনী IA.

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. $\int x^{100}dx.$ 2. $\int x^{7}dx.$ 3. $\int\frac{1}{x^{2}}dx.$ 4. $\int x^{-8}dx$

5. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^{5}}}$ 6. $\int x^{2}\sqrt{x}\,dx.$

(2) $\int x^{-1}dx$ বা $\int\frac{dx}{x}=\log x+c.$

প্রমাণ। $\frac{d}{dx}\left(\log x+c\right)=\frac{1}{x},\quad \therefore \int\frac{dx}{x}=\log x+c$

(3) $\int e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}+c.$

প্রমাণ। $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ax}}{a}+c\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)+\frac{d}{dx}(c)$

$$=\frac{1}{a}\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right)+0=\frac{1}{a}\left(a.e^{ax}\right)=e^{ax}$$

$\therefore \quad \int e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}+c.$

উদাহরণ :—

1. $\int e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3} + c.$

2. $\int e^{-5x}dx = \frac{e^{-5x}}{-5} + c = -\frac{e^{-5x}}{5} + c.$

3. $\int \frac{dx}{e^{6x}} = \int e^{-6x}dx = \frac{e^{-6x}}{-6} + c = -\frac{e^{-6x}}{6} + c.$

4. $\int \sqrt[3]{e^x}\, dx = \int (e^x)^{\frac{1}{3}}dx = \int e^{\frac{x}{3}}dx.$

$= \frac{e^{\frac{x}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = 3.e^{\frac{x}{3}} + c = 3.\sqrt[3]{e^x} + c.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}} = \int \left(e^x\right)^{-\frac{1}{2}} dx = \int e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c$

$= -2e^{-\frac{x}{2}} + c = -2\frac{1}{\sqrt{e^x}} + c.$

অনুশীলনী IB.

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. $\int e^{2x}dx.$ 2. $\int e^{17x}dx.$ 3. $\int e^{0x}dx$ 4. $\int e^{\frac{4}{5}x}dx.$

5. $\int \sqrt{e^x}\, dx.$ 6. $\int e^{-70x}dx.$ 7. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{e^x}}$ 8. $\int e^{100x}dx$

(4) $\int a^{mx}dx = \frac{1}{m}\frac{a^{mx}}{\log_e^a} + c.$

প্রমাণ $\int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{m}\frac{a^{mx}}{\log_e^a} + c\right)$

$= \frac{1}{m}\frac{1}{\log_e^a}\frac{d}{dx}\left(a^{mx}\right) + \frac{d}{dx}(c) = \frac{1}{m}\frac{1}{\log_e^a}\, m\, a^{mx} \times \log_e^a$

$= a^{mx}$

সংজ্ঞানুসারে, $\int a^{mx} dx = \frac{1}{m}\frac{a^{mx}}{\log_e^a} + c.$

উদাহরণ :—

1. $\int 2^{5x}dx = \frac{1}{5}\frac{2^{5x}}{\log_e^2} + c.$

2. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\log_e^7} + c$

3. $\int e^x dx = \frac{e^x}{\log_e^e} + c = e^x + c \left[\because \quad \log_e^e = 1\right]$

অনুশীলনী IC.

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. $\int 3^x dx$. 2. $\int (\frac{1}{2})^x dx$. 3. $\int a^x dx$. 4. $\int 6^{2x} dx$.
5. $\int 10^x dx$. 6. $\int 6^{10x} dx$.

(5) ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের সমাকলন :

(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin ax}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{d}{dx}\left(\sin ax\right) = \frac{1}{a} a \cos ax = \cos ax,$

$\therefore \quad \int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + c.$

(ii) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos ax}{a}\right) = -\frac{1}{a}\frac{d}{dx}\left(\cos ax\right)$

$= -\frac{1}{a}\left(-a \sin ax\right) = \sin ax,$

$\therefore \quad \int \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} + c.$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan ax}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{d}{dx}\left(\tan ax\right) = \frac{1}{a} a \sec^2 ax = \sec^2 ax.$

$\therefore \quad \int \sec^2 ax\, dx = \frac{\tan ax}{a} + c.$

(iv) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cot ax}{a}\right) = -\frac{1}{a}\frac{d}{dx}\left(\cot ax\right)$

$= -\frac{1}{a}\left(-a \operatorname{cosec}^2 ax\right) = \operatorname{cosec}^2 ax.$

$\therefore \quad \int \operatorname{cosec}^2 ax\, dx = -\frac{\cot ax}{a} + c.$

(v) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\operatorname{cosec} ax}{a}\right) = -\frac{1}{a}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec} ax\right)$

$= -\frac{1}{a}\left(-a \operatorname{cosec} ax \cot ax\right) = \operatorname{cosec} ax \cot ax.$

$\therefore \quad \int \operatorname{cosec} ax \cot ax\, dx = -\frac{\operatorname{cosec} ax}{a} + c.$

(vi) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sec ax}{a}\right)=\dfrac{1}{a}\dfrac{d}{dx}\left(\sec ax\right)$

$=\dfrac{1}{a}\left(a \sec ax \tan ax\right)=\sec ax \tan ax.$

$\therefore \quad \int \sec ax \tan ax\, dx=\dfrac{\sec ax}{a}+c$

অনুসিদ্ধান্ত :- উপরে প্রত্যেক সূত্রে $a=1$ বসাইয়া পাই,

$\int \cos x\, dx=\sin x+c$; $\int \sin x\, dx=-\cos x+c.$

$\int \sec^2 x\, dx=\tan x+c$; $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx=-\cot x+c.$

$\int \sec x \tan x\, dx=\sec x+c$; $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx=-\operatorname{cosec} x+c.$

উদাহরণ :—

1. $\int \cos 5x\, dx=\dfrac{\sin 5x}{5}+c$

2. $\int \sin(-3x)dx=-\dfrac{\cos(-3x)}{-3}+c=\dfrac{\cos 3x}{3}+c.$

3. $\int \sec^2 4x\, dx=\dfrac{\tan 4x}{4}+c.$

4. $\int \dfrac{\sin\theta\, d\theta}{\cos^2\theta}=\int \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}\, d\theta$

$=\int \tan\theta \sec\theta\, d\theta=\sec\theta+c.$

অনুশীলনী ID.

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. $\int \sin 7x\, dx.$ 2. $\int \sin(-2x)dx.$ 3. $\int \cos 6x\, dx.$
4. $\int \cos(-4x)dx.$
5. $\int \operatorname{cosec}^2 3x\, dx.$ 6. $\int -\operatorname{cosec} 2x \cot 2x\, dx.$

§ 1·5. **সমাকলনের সাধারণ নিয়ম** (General rules of Integration) :

(1) $\int a.f(x)dx=a.\int f(x)dx.$ (a একটি ধ্রুবক)

প্রমাণ। মনে কর $\int f(x)dx=g(x)+c.$

$\therefore \quad \dfrac{d}{dx}\left(g(x)+c\right)=f(x).$ বা, $\dfrac{d}{dx}\left(g(x)\right)+\dfrac{d}{dx}(c)=f(x),$

বা, $\frac{d}{dx}\Big(g(x)\Big)=f(x) \quad \Big[\because \quad \frac{d}{dx}(c)=0\Big]$

এক্ষণে, $\frac{d}{dx}\Big(a\{g(x)\}+ac\Big)=\frac{d}{dx}\Big(a\{g(x)\}\Big)+\frac{d}{dx}(ac)$

$$=a\frac{d}{dx}\Big(g(x)\Big)+0=a.f(x)$$

$\therefore \quad \int af(x)dx=a.g(x)+a.c=a.\{g(x)+c\}=a\int f(x)dx$

অনুসিদ্ধান্ত :

মনে কর, $f(x)=1. \quad \therefore \quad \int adx=a\int dx=ax+c.$

(2) $\int\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$

প্রমাণ। মনে কর, $\int f(x)dx=h_1(x)$ এবং $\int g(x)dx=h_2(x)$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}\Big(h_1(x)\Big)=f(x)$ এবং $\frac{d}{dx}\Big(h_2(x)\Big)=g(x).$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}\Big(h_1(x)\pm h_2(x)\Big)=\frac{d}{dx}h_1(x)\pm\frac{d}{dx}h_2(x)=f(x)\pm g(x)$

$\therefore \quad \int\{f(x)+g(x)\}dx=h_1(x)\pm h_2(x)=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$

অনুসিদ্ধান্ত 1 উপরের নিয়মটির পুনঃপুনঃ প্রয়োগ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে, $\int f_1(x)dx, \int f_2(x)dx, \cdots, \int f_n(x)dx$ প্রত্যেকে নির্ণেয় হইলে,

$$\int\{\pm f_1(x)\pm f_2(x)\pm f_3(x)\pm\cdots\pm f_n(x)\}dx.$$
$$=\pm\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\pm\int f_3(x)dx\pm\cdots\pm\int f_n(x)dx.$$

[n একটি সসীম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা]

অনুসিদ্ধান্ত 2. অনুসিদ্ধান্ত 1 এবং নিয়ম 1 হইতে পাই,

$\int f_1(x)dx, \int f_2(x)dx, \cdots, \int f_n(x)dx$, প্রত্যেকটি নির্ণেয় হইলে এবং $a_1, a_2, \cdots, a_n$, n-সংখ্যক ধ্রুবক হইলে (n সসীম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)

$$\int\{\pm a_1f_1(x)\pm a_2f_2(x)\pm\cdots\pm a_nf_n(x)\}dx$$
$$=\pm a_1\int f_1(x)dx\pm a_2\int f_2(x)dx\pm\cdots\pm a_n\int f_n(x)dx.$$

উদাহরণ :

1. $\int(x^2+e^x)dx=\int x^2dx+\int e^xdx=\frac{x^3}{3}+e^x+c.$

2. $\int(x^3+\cos x)dx=\int x^3dx+\int\cos x\,dx=\frac{x^4}{4}+\sin x+c.$

3. $\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2.\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c.$

4. $\int \sin(-2x)dx = \int -\sin 2x\,dx = -\int \sin 2x\,dx$

$= -\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + c = \frac{\cos 2x}{2} + c.$

5. $\int (x^2 - \sin x)dx = \int x^2 dx - \int \sin x\,dx = \frac{x^3}{3} - (-\cos x) + c$

$= \frac{x^3}{3} + \cos x + c.$

6. $\int (x+2)^2 dx = \int (x^2 + 4x + 4)dx = \int x^2 dx + \int 4x\,dx + \int 4dx$

$= \frac{x^3}{3} + 4\int x\,dx + 4\int dx = \frac{x^3}{3} + 4.\frac{x^2}{2} + 4x + c$

$= \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + c.$

7. $\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \int \sec^2 x\,dx - \int dx$

$= \tan x - x + c$

8. $\int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx = \int \left(e^x + 2 + e^{-x}\right)dx$

$= \int e^x dx + 2\int dx + \int e^{-x} dx$

$= e^x + 2x - e^{-x} + c.$

অনুশীলনী IE.

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. $\int (x^2 + 3^x)dx$
2. $\int (2+3x)^3 dx.$
3. $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 + x + 1} dx.$
4. $\int (1 + e^{2x})dx.$
5. $\int (x^7 + e^x + a^x)dx.$
6. $\int \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} - \frac{e^x}{e^{-x}}\right)dx.$
7. $\int \cot^2 x\,dx.$
8. $\int (2\cos x + \tan^2 x)dx.$

§ 1·6. **গুণিতক কোণের অপেক্ষককে পরিণত করিয়া Sine এবং Co sine অপেক্ষকসমূহের বিভিন্ন ঘাত ও গুণফলের সমাকলন :**

(i) $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ এবং $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ সূত্র হইতে, $\cos^2 x$কে $\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ এবং $\sin^2 x$কে $\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ আকারে পরিণত করা যায়।

সুতরাং $\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x dx$

$=\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}+c.$

অনুরূপে $\int\sin^2 x dx=\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+c.$

(ii) $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

$\therefore\quad \sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$

বা, $\int\sin^3 x dx=\int\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)dx=-\frac{3}{4}\cos x+\frac{\cos 3x}{12}+c.$

(iii) আবার, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ সূত্র হইতে

$\cos^3 x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x).$

বা, $\int\cos^3 x dx=\frac{1}{4}\int(\cos 3x+3\cos x)dx=\frac{\sin 3x}{12}+\frac{3}{4}\sin x+c$

(iv) $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$ ইত্যাদি সূত্র দ্বারা sine ও cosine-এর গুণফলকে sine ও cosine-এর যোগফলরূপে প্রকাশ করিয়া সমাকলন করা যায়। উদাহরণগুলি ভাল করিয়া লক্ষ্য কর।

উদাহরণ :—

1. $\int\cos 2x\cos 4x dx=\int\frac{1}{2}.2\cos 4x\cos 2x dx$

$=\frac{1}{2}\int(\cos 6x+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int\cos 6x dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x dx$

$=\frac{1}{2}.\frac{\sin 6x}{6}+\frac{1}{2}.\frac{\sin 2x}{2}+c=\frac{\sin 6x}{12}+\frac{\sin 2x}{4}+c.$

2. $\int 4\sin 2x\cos 3x dx=\int 2.2\cos 3x\sin 2x dx$

$=2\int(\sin 5x-\sin x)dx=2\int\sin 5x dx-2\int\sin x\,dx$

$=2\left(-\frac{\cos 5x}{5}\right)-2(-\cos x)+c=2\left(\cos x-\frac{\cos 5x}{5}\right)+c.$

অনুশীলনী IF.

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. $\int\sin x\sin 2x\,dx.$ 2. $\int\sin 10x\cos 6x\,dx.$

3. $\int 2\cos 6x\cos 4x dx.$ 4. $\int\sin^2 x dx.$ 5. $\int\cos^2 2x dx.$

6. $\int\cos^2\frac{x}{2}dx.$ 7. $\int\cos^3 x dx.$ 8. $\int\sin^3 3x dx.$

9. $\int\cos x\cos 2x\cos 3x dx.$ 10. $\int\sin x\sin 2x\sin 4x dx.$

উদাহরণমালা 1

1. $\int(2+x)^3dx=\int(8+12x+6x^2+x^3)dx$

$=\int 8dx+\int 12xdx+\int 6x^2dx+\int x^3dx$

$=8\int dx+12\int xdx+6\int x^2dx+\int x^3dx$

$=8x+12\frac{x^2}{2}+6\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+c=8x+6x^2+2x^3+\frac{1}{4}x^4+c.$

2. $\int\frac{1}{\sqrt{x}}(x^4+7\sqrt{x})dx=\int(x^{\frac{7}{2}}+7)dx$

$=\int x^{\frac{7}{2}}dx+7\int dx=\frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}+7x+c=\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+7x+c.$

3. $\int\{(x+2)(x+3)\}dx=\int(x^2+5x+6)dx$

$=\int x^2dx+5\int xdx+6\int dx=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+6x+c.$

4. $\int\frac{e^{4x}+e^{6x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{e^{5x}(e^{-x}+e^x)}{e^x+e^{-x}}dx=\int e^{5x}dx=\frac{e^{5x}}{5}+c.$

5. $\int e^{n\log x}dx=\int e^{\log x^n}dx=\int x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c.\ (n\neq 1)$

6. $\int\sin x^0dx=\int\sin\frac{\pi x}{180}dx=-\frac{\cos\frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi}{180}}+A$

$=-\frac{180}{\pi}\cos\frac{\pi x}{180}+A=-\frac{180}{\pi}\cos x^\circ+A.$

[দ্রষ্টব্য। এখানে ডিগ্রীকে রেডিয়ানে পরিণত করিয়া সূত্র প্রয়োগ করা হইল।]

7. $\int\frac{\cot x}{\tan x}dx=\int\cot^2xdx=\int(\operatorname{cosec}^2x-1)dx$

$=\int\operatorname{cosec}^2xdx-\int dx=-\cot x-x+c.$

8. $\int\frac{2\sin^3x+3\cos^3x}{\sin^2x\cos^2x}dx=\int\left(\frac{2\sin^3x}{\sin^2x\cos^2x}+\frac{3\cos^3x}{\sin^2x\cos^2x}\right)dx$

$=\int(2\sec x\tan x+3\cot x\operatorname{cosec} x)dx$

$=2\int\sec x\tan xdx+3\int\cot x\operatorname{cosec} xdx$

$=2\sec x-3\operatorname{cosec} x+c.$

9. $$\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x) dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \tan x - \cot x + c.$$

10. $$\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\left(1 - \sin 2x\right) dx$$

$$= \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\left(\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x\right) dx$$

$$= \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\left(\cos x - \sin x\right)^2 dx$$

$$= \int (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) dx$$

$$= \int \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) dx = \int \cos 2x\, dx = \frac{\sin 2x}{2} + c.$$

11. $$\int \frac{dx}{1 - \sin x} = \int \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} dx$$ [লব ও হরকে $1 + \sin x$ দ্বারা গুণ করিয়া]

$$= \int \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) dx = \int \left(\sec^2 x + \sec x \tan x\right) dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \sec x \tan x\, dx = \tan x + \sec x + c.$$

12. $$\int \frac{9^{1+x} + 3^{1+x}}{3^x} dx = \int \frac{9.9^x + 3.3^x}{3^x} dx$$

$$= \int \frac{9.3^{2x} + 3.3^x}{3^x} dx = \int \frac{3^x(9.3^x + 3) dx}{3^x} = \int \left(9.3^x + 3\right) dx$$

$$= 9\int 3^x dx + 3\int dx = 9.\frac{3^x}{\log_e 3} + 3x + c.$$

13. $$\int e^{x \log 2} dx = \int e^{\log 2^x} dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\log_e 2} + c.$$

14. $$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(\cos^2 x)^2}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\sin^2 x} dx$$

$$=\int\frac{1-2\sin^2x+\sin^4x}{\sin^2x}dx=\int(\text{cosec}^2x-2+\sin^2x)dx$$

$$=\int\text{cosec}^2x\,dx-2\int dx+\tfrac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx$$

$$=-\cot x-2x+\tfrac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+c.$$

$$=-\cot x-\tfrac{3}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+c.$$

14. $\int \cos x.\cos 2x \cos 3x\,dx$

$$=\tfrac{1}{2}\int(2\cos x\cos 2x)\cos 3x\,dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\int(\cos 3x+\cos x)\cos 3x\,dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\int(\cos^2 3x+\cos 3x\cos x)dx$$

$$=\tfrac{1}{4}\int 2\cos^2 3x+\tfrac{1}{4}\int 2\cos 3x\cos x\,dx$$

$$=\tfrac{1}{4}\int(1+\cos 6x)\,dx+\tfrac{1}{4}\int(\cos 4x+\cos 2x)dx$$

$$=\tfrac{1}{4}x+\frac{\sin 6x}{24}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 2x}{8}+c.$$

প্রশ্নমালা 1

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. (i) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$ (ii) $\int\frac{dx}{x^2}$ (iii) $\int\frac{dx}{x^{\frac{n-1}{n}}}$.

2. (i) $\int(2x-1)(x-2)dx$ (ii) $\int\sqrt{x}\left(x^6-\frac{2}{x^2}\right)dx.$

 (iii) $\int\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx$ (iv) $\int\frac{(1+x)^3}{x^5}dx$

[C. U. Int. '60]

3. (i) $\int\frac{x^2-7x+12}{x-4}dx$ (ii) $\int\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x+2}dx$

4. (i) $\int\frac{(e^x+1)^2}{e^{2x}}dx$ (ii) $\int\frac{e^{3x}-4e^x+1}{e^{2x}}dx.$

5. $\int\frac{e^{6x}-1}{e^{2x}-1}.$ 6. $\int\cos x^0 dx.$ 7. $\int\sin^2 ax\,dx.$

8. $\int\cos^2 6x\,dx$ 9. $\int\sin^2\frac{x}{3}dx.$ 10. $\int\cot^2 2x\,dx.$

11. $\int\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}dx.$ 12. $\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta.$

13. $\int 2 \sin 3x \sin 4x \, dx$. 14. $\int \cos 4x \cos 5x \, dx$.

15. $\int \sin mx \cos nx \, dx$. 16. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \, dx$.

17. $\int \frac{\tan x}{\cot x} dx$. 18. $\int \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

19. (i) $\int (\tan^2 x + 2) dx$. (ii) $\int (\tan^2 x + 2)(\cot^2 x + 3) dx$.

20. $\int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$.

21. (i) $\int \frac{(a^x + 1)^2}{a^x} dx$ (ii) $\int \frac{a^{3x} + a^x}{a^{2x}} dx$.

22. (i) $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$ (ii) $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$ (iii) $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$

23. $\int \frac{\sin x - \cos 2x}{1 - \sin x} dx$.

24. (i) $\int \sqrt{1 + \sin 2x} \, dx$ (ii) $\int \sqrt{1 + \cos 2x} \, dx$.

25. $\int \frac{\cos 2x - \cos 2\theta}{\cos x - \cos \theta} dx$; যেখানে θ, একটি ধ্রুবক।

26. $\int (\sin^6 x + \cos^6 x) dx$.

27. (i) $\int \cos^4 x \, dx$ (ii) $\int \sin^4 x \, dx$.

28. $\int \sin ax \sin bx \cos cx \, dx$.

29. $\int \sin 2x (1 + \cos 2x) dx$. [C. U. '60 Int.]

30. $\int (\cos 3x - 2 \sin x + x^2) dx$. [C. U. '61 Int.]

দ্বিতীয় অধ্যায়

চলের প্রতিস্থাপন দ্বারা সমাকলন

(Integration by substitution of variable)

§ 2·1. অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয় করিবার জন্য কতকগুলি নির্দিষ্ট নিয়ম আছে এবং ঐ নিয়মগুলির সাহায্যে অন্তরকলনযোগ্য (differentiable) যে কোন অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয় করা যায়। কিন্তু সমাকলনের ক্ষেত্রে এইরূপ কোন ধরাবাঁধা নির্দিষ্ট নিয়ম পাওয়া যায় না, যাহার সাহায্যে কোন সমাকলনযোগ্য অপেক্ষকের সমাকল নির্ণয় করা যাইবে। সমাকলনের পদ্ধতিসমূহ মূলতঃ পরীক্ষামূলক (tentative)। এই কারণে অন্তরকলন অপেক্ষা সমাকলন প্রক্রিয়া জটিলতর। তোমরা প্রথম অধ্যায়ে বিভিন্ন উদাহরণে দেখিয়াছ যে, আদর্শ আকারের নয়, এরূপ বিভিন্ন সমাকল্য (Integrand)-কে বিভিন্ন বীজগাণিতিক ও ত্রিকোণমিতিক সূত্রসাহায্যে একটি আদর্শ আকারের বা একাধিক আদর্শ আকারের সমাকল্যের যোগফল বা বিয়োগফলে পরিণত করিয়া সমাকলন করা হইয়াছে। কিন্তু সকল সমাকল্যকে এই প্রণালীতে আদর্শ আকারে পরিণত করা যায় না। সেই সকল ক্ষেত্রে অন্যান্য বিভিন্ন পদ্ধতির সাহায্য লওয়া হয়। এই পুস্তকে আরও দুইটি পদ্ধতি যথা (i) **চলের প্রতিস্থাপন দ্বারা সমাকলন** (Integration by substitution of variable) ও (ii) **অংশতঃ সমাকলনের পদ্ধতি** (Integration by parts) সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে। বর্তমান অধ্যায়ের আলোচ্য হইল চলের প্রতিস্থাপন পদ্ধতি।

§ 2·2. মনে কর $\int f(x)dx=g(x)$ [এখানে $g(x)$-ই নির্ণেয়]

সুতরাং $\dfrac{d}{dx}\{g(x)\}=f(x).$

এখন যদি $x=F(z)$ হয়, $\dfrac{dx}{dz}=F'(z)$

$$\therefore \quad \frac{d}{dz}\{g(x)\}=\frac{d}{dx}\{g(x)\}.\frac{dx}{dz}=f(x)F'(z)=f\{F(z)\}F'(z)$$

$\therefore$ সমাকলের সংজ্ঞানুসারে, $g(x)=\int f\{F(z)\}F'(z)dz$

বা, $\int f(x)dx=\int f\{F(z)\}F'(z)dz$

এক্ষণে সমাকলনের চল x হইতে zএ পরিবর্তিত হইল। সুতরাং সমাকল (নির্ণেয় হইলে) z দ্বারা প্রকাশিত হইবে। অতঃপর z ও xএর সম্পর্ক হইতে সমাকলটিকে x দ্বারা প্রকাশ করা যাইবে।

দ্রষ্টব্য। তোমরা জান $\frac{dx}{dz}$, dx ও dz এই দুইটি অন্তরকল বা ডিফারেন্সিয়ালের অনুপাত। সুতরাং $\frac{dx}{dz}=F'(z)$ হইতে পাই, $dx=F'(z)dz$ এবং এই আকারটি ব্যবহার করাই সুবিধাজনক।

উদাহরণ 1. সমাকলন কর : $\int (2x+3)^5 dx$.

মনে কর $I=\int (2x+3)^5 dx$.

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে, $\frac{dI}{dx}=(2x+3)^5$.

মনে কর, $2x+3=z$, বা, $x=\frac{z}{2}-\frac{3}{2}$, $\therefore\ \frac{dx}{dz}=\frac{1}{2}$

এক্ষণে, $\frac{dI}{dz}=\frac{dI}{dx}\cdot\frac{dx}{dz}=(2x+3)^5.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}z^5$

$$\therefore\quad I=\int \tfrac{1}{2}z^5 dz=\tfrac{1}{2}\int z^5 dz=\tfrac{1}{2}\frac{z^6}{6}+c=\tfrac{1}{12}(2x+3)^6+c.$$

উদা. 2. সমাকলন কর : $\int\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$.

মনে কর $t=\sec\theta$. $\therefore\quad dt=\frac{dt}{d\theta}d\theta=\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

এবং $t\sqrt{t^2-1}=\sec\theta\sqrt{\sec^2\theta-1}=\sec\theta\tan\theta$

$$\therefore\quad \int\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\int\frac{\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sec\theta\tan\theta}=\int d\theta=\theta+c$$

এক্ষণে, $\because\ \sec\theta=t$, $\therefore\ \theta=\sec^{-1}t$

$$\therefore\quad \int\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\sec^{-1}t+c.$$

অনেক সময় $\phi(x)=z$ আকারে চলের প্রতিস্থাপন করা হয়।

যেহেতু $\phi(x)=z$, $\frac{dz}{dx}=\phi'(x)$, $\therefore\quad dx=\frac{dz}{\phi'(x)}$.

এখন, $\phi(x)=z$ সম্পর্ক হইতে $f(x)$কে z দ্বারা প্রকাশ করিয়া $dx=\frac{dz}{\phi'(x)}$ লিখিলে $\int f(x)dx$এর আকার হইবে $\int g(z)dz$.

উদা. 3. $\int \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta$.

মনে কর $\sin\theta = z$, $\therefore \cos\theta\, d\theta = dz$

এবং $\int \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta = \int z^2 dz = \frac{z^3}{3} + c = \frac{\sin^3\theta}{3} + c$.

§ 2·3. **প্রতিস্থাপনের নিয়ম :** সমাকলন সম্পাদনের জন্য চলের প্রতিস্থাপনের কোন ধরাবাঁধা নিয়ম নাই। সাধারণতঃ পর্যবেক্ষণের দ্বারা চলের প্রতিস্থাপন করা হয়। পরবর্তী কয়েকটি অনুচ্ছেদে কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে চলের প্রতিস্থাপনের সুবিধাজনক কয়েকটি নিয়ম সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

§ 2·4. $\int f(ax+b)dx$ **আকারের সমাকলের সমাকলন।**

সমাকল্য $f(ax+b)$ আকারের হইলে সাধারণতঃ $ax+b=z$ মনে করিবে।

উদাহরণ 1. সমাকলন কর : $\int \sin(ax+b)dx$.

মনে কর $ax+b=z$. $\therefore adx = dz$ বা $dx = \frac{dz}{a}$.

$$\therefore \int \sin(ax+b)dx = \int \frac{1}{a} \sin z\, dz = \frac{1}{a}\int \sin z\, dz = -\frac{\cos z}{a} + c.$$

$$= -\frac{\cos(ax+b)}{a} + c.$$

উদা. 2. সমাকলন কর : $\int \frac{dx}{3x+4}$.

মনে কর $3x+4=t$. $\therefore 3dx = dt$ বা $dx = \frac{dt}{3}$.

$$\therefore \int \frac{dx}{3x+4} = \int \frac{dt}{3t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\log t + c$$

$$= \tfrac{1}{3}\log(3x+4) + c.$$

উদা. 3. সমাকলন কর : $\int (4-3x)^{100} dx$.

মনে কর $4-3x=z$. $\therefore -3dx = dz$, $\therefore dx = -\frac{dz}{3}$.

$$\therefore \int (4-3x)^{100}dx = -\int z^{100}\frac{dz}{3} = -\frac{1}{3}\int z^{100}dz = -\frac{1}{3}\cdot\frac{z^{101}}{101} + c.$$

$$= -\frac{(4-3x)^{101}}{303} + c.$$

উদা 4. সমাকলন কর :

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx$$

$=\int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{x-2}$. এখন মনে কর, $x-3=u$ ও $x-2=v$.

$\therefore\quad dx=du$ এবং dv (যথাক্রমে)।

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{x-2}=\int\frac{du}{u}-\int\frac{dv}{v}=\log u-\log v+c$$

$$=\log\frac{u}{v}+c=\log\frac{x-3}{x-2}+c.$$

উদা. 5. সমাকলন কর : $\int\frac{a'x+b'}{ax+b}dx.$ [C. U.]

মনে কর $ax+b=z$. $\therefore\quad adx=dz$ এবং $x=\frac{z-b}{a}$

$$\therefore\quad \int\frac{a'x+b'}{ax+b}dx=\int\frac{a'.\frac{z-b}{a}+b'}{z}.\frac{dz}{a}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a'z+ab'-a'b}{z}dz$$

$$=\frac{a'}{a^2}\int dz+\frac{ab'-a'b}{a^2}\int\frac{1}{z}dz=\frac{a'}{a^2}z+\frac{ab'-a'b}{a^2}\log z+c$$

$$=\frac{a'}{a^2}(ax+b)+\frac{ab'-a'b}{a^2}\log(ax+b)+c.$$

উদা. 6 সমাকলন কর : $\int\frac{\cos x\,dx}{\cos(x+a)}.$

মনে কর $x+a=z$; $\therefore\quad dx=dz$ এবং $x=z-a$

$$\therefore\quad \int\frac{\cos x\,dx}{\cos(x+a)}=\int\frac{\cos(z-a)\,dz}{\cos z}$$

$$=\int\frac{\cos z\cos a+\sin z\sin a}{\cos z}dz$$

$$=\cos a\int\frac{\cos z}{\cos z}dz+\sin a\int\frac{\sin z}{\cos z}dz$$

$$=\cos a\int dz-\sin a\int\frac{d(\cos z)}{\cos z}$$

$$=z\cos a-\sin a\log\cos z+c$$

$$=\cos a\cos(x+a)+\sin a\log\sec(x+a)+c.$$

অনুশীলনী IIA.

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. (i) $\int(ax+b)^{11}dx$ (ii) $\int(4x-5)^6dx.$

(iii) $\int\frac{dx}{(a-x)^2}$ (iv) $\int\frac{dx}{a-bx}.$

2. (i) $\int\cos(ax+b)dx$. (ii) $\int\sec^2(2x+3)dx$.

(iii) $\int\sin^2(2t+3)dt$. (iv) $\int\cot^2(2-3t)dt$.

3 $\int a^{p+qt}dt$.

4. (i) $\int\frac{dx}{x^2-9}$ (ii) $\int\frac{dx}{4-x^2}$ (iii) $\int\frac{dx}{4x^2-25}$

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$.

[সংকেত : $\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}=\int\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{(x+a)-(x+b)}d.$

$=\frac{1}{a-b}\left[\int\sqrt{x+a}\,dx-\int\sqrt{x+b}\,dx.\right]$

6 $\int\frac{x\,dx}{a+bx}$.

[সংকেত : $\int\frac{xdx}{a+bx}=\frac{1}{b}\int\frac{bx\,dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\left[\int\frac{a+bx-a}{a+bx}dx.\right]$

$=\frac{1}{b}\left[\int\frac{a+bx}{a+bx}dx-\int\frac{a}{a+bx}dx.\right]=\frac{1}{b}\int dx-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx}\ ]$

7. (i) $\int\frac{dx}{x^2-10x+24}$ (ii) $\int\frac{dx}{x^2-7x+12}$

§ 2·5 $\int\{f(x)\}^n f'(x)dx$ আকার :—

$\int\{f(x)\}^n f'(x)dx$-এর সমাকলনের জন্য মনে কর, $f(x)=z$

$\therefore\ f'(x)=\frac{dz}{dx}$ বা, $f'(x)dx=dz$.

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int z^n dz=\frac{z^{n+1}}{n+1}+c$ [যদি $n\neq-1$ হয়]

এবং $=\log z+c$ [যদি $n=-1$ হয়]

অর্থাৎ প্রদত্ত সমাকল $=\frac{\{f(x)\}^{n+1}}{n+1}+c$ [যদি $n\neq-1$ হয়]

এবং $=\log\{f(x)\}+c$ [যদি $n=-1$ হয়]

উদাহরণ 1. $\int(ax^2+bx+c)^3(2ax+b)\,dx$এর সমাকলনের জন্য দেখ $f(x)=ax^2+bx+c$ হইলে, $f'(x)=2ax+b$ হয় ; সুতরাং প্রদত্ত সমাকলের আকার $\int\{f(x)\}^3 f'(x)dx=\frac{\{f(x)\}^4}{4}+c$

$=\frac{(ax^2+bx+c)^4}{4}+c.$

উদা. 2. সমাকলন কর : $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$.

মনে কর $e^x+1=z$. $\therefore \quad e^x dx=dz$.

$$\therefore \quad \int \frac{e^x dx}{e^x+1}=\int \frac{dz}{z}=\log (z)+c=\log (e^x+1)+c.$$

উদা. 3. সমাকলন কর : $\int x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx$.

এখানে x^3+1কে $f(x)$ মনে করিলে $\sqrt{x^3+1}=\{f(x)\}^{\frac{1}{2}}$

আবার $f'(x)=3x^2$. কিন্তু প্রদত্ত সমাকলে $3x^2$এর স্থানে আছে x^2. সহজেই প্রদত্ত সমাকলকে

$\int \frac{1}{3}.3x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx=\frac{1}{3}\int 3x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx$ আকারে লেখা যায়।

সুতরাং $x^3+1=z$ বসাইয়া পাই,

$$\text{প্রদত্ত সমাকল}=\frac{1}{3}\int z^{\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{3}\cdot\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+c.$$

উদা. 4. সমাকলন কর : $\int \tan x \sec^2 x\, dx$.

মনে কর $\tan x=z$. $\therefore \quad \sec^2 x\, dx=dz$.

$$\therefore \quad \int \tan x \sec^2 x\, dx=\int z dz=\frac{z^2}{2}+c=\frac{\tan^2 x}{2}+c.$$

উদা. 5. সমাকলন কর : $\int \frac{\tan^{-1}x\, dx}{1+x^2}$

মনে কর $\tan^{-1}x=z$. $\therefore \quad \frac{1}{1+x^2}dx=dz$

$$\therefore \quad \text{প্রদত্ত সমাকল}=\int z dz=\frac{z^2}{2}+c=(\tan^{-1}x)^2+c.$$

উদা. 6. সমাকলন কর :

(i) $\int \frac{1+\cos x}{\sqrt{x+\sin x}}dx$ (ii) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx$

মনে কর $x+\sin x=t$. $\therefore \quad (1+\cos x)\, dx=dt$

সুতরাং (i) $\int \frac{1+\cos x}{\sqrt{x+\sin x}}dx=\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+c=2\sqrt{x+\sin x}+c$.

(ii) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx=\int \frac{dt}{t}=\log t+c=\log (x+\sin x)+c.$

উদা. 7. সমাকলন কর : (i) $\int \tan x\,dx$ (ii) $\int \cot x\,dx$ (iii) $\int \sec x\,dx$ ও (iv) $\int \operatorname{cosec} x\,dx$.

(i) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

মনে কর, $\cos x = z$. $\therefore\ -\sin x\,dx = dz$

$\therefore\ \int \tan x\,dx = -\int \frac{dz}{z} = -\log z + c = -\log(\cos x) + c.$

$= \log(\sec x) + c$

(ii) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx.$

মনে কর $\sin x = z$. $\therefore\ \cos x\,dx = dz$

$\therefore\ \int \cot x\,dx = \int \frac{dz}{z} = \log z + c = \log(\sin x) + c$

(iii) $\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}dx$

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}dx.$

মনে কর, $\sec x + \tan x = t$. $\therefore\ (\sec x \tan x + \sec^2 x)dx = dt.$

$\therefore\ \int \sec x\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log t + c = \log(\sec x + \tan x) + c.$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}dx.$

মনে কর, $\tan\frac{x}{2} = z$ $\therefore\ \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = dz.$

$\therefore \int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{dz}{z} = \log z + c = \log\left(\tan\frac{x}{2}\right) + c.$

[দ্রষ্টব্য : এই উদাহরণের সমাকলনগুলিকে সূত্র হিসাবে মনে রাখিবে।]

উদা. 8. সমাকলন কর : $\int \frac{dx}{e^x + 1}.$

$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{e^{-x}dx}{1 + e^{-x}}$

এক্ষণে মনে কর, $1 + e^{-x} = t$. $\therefore\ -e^{-x}dx = dt$

$\therefore\ \int \frac{dx}{e^x + 1} = -\int \frac{dt}{t} = -\log t + c = -\log(1 + e^{-x}) + c.$

উদা. 9. সমাকলন কর : $\int \frac{\sec x\, dx}{\log(\sec x+\tan x)}$.

মনে কর, $\log(\sec x+\tan x)=z$.

$\therefore \quad \frac{1}{\sec x+\tan x}(\sec x \tan x+\sec^2 x)dx=dz$

বা, $\frac{\sec x\,(\sec x+\tan x)dx}{\sec x+\tan x}=dz$, বা, $\sec x\, dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int \frac{dz}{z}=\log z+c$.

$=\log\{\log(\sec x+\tan x)\}+c$.

উদা. 10. সমাকলন কর :

(i) $\int \frac{dx}{(\sqrt{1-x^2})\sin^{-1}x}$ (ii) $\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}dx$.

(i) মনে কর, $\sin^{-1}x=u \therefore \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=du$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int \frac{du}{u}=\log u+c=\log(\sin^{-1}x)+c$.

(ii) মনে কর, $1+\tan x=z$. $\therefore \sec^2 x\, dx=dz$.

প্রদত্ত সমাকল $=\int \frac{dz}{z}=\log z+c=\log(1+\tan x)+c$.

অনুশীলনী II B

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. (i) $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx$.

(ii) $\int (x^3+6x^2+5x+2)(3x^2+12x+5)dx$.

2. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ [Allahabad '59]. 3. $\int \frac{2x\, dx}{1+x^2}$

4. (i) $\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ [C.P. 1933] (ii) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$

5. (i) $\int x^3\sqrt{x^4+a^4}\, dx$. (ii) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$ 6. $\int \frac{\cos x \sin x}{1+\sin^2 x}dx$.

7. $\int (\tan x+\sin x)^2(\sec^2 x+\cos x)\, dx$.

8. (i) $\int \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2} dx$ (ii) $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{1+\cot x} dx.$

(iii) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\tan x - 1}}$

9. (i) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ (ii) $\int \frac{4x^3}{1+x^4} dx.$ (iii) $\int \frac{ax^{n-1}}{x^n + b} dx.$

10. (i) $\int \frac{dx}{x + x \log x}$ [Agra '63] ii) $\int \frac{dx}{x \log x \log(\log x)}$

11. (i) $\int \frac{\cot x\, dx}{\log(\sin x)}$ (ii) $\int \frac{\tan x\, dx}{\log(\sec x)}$

12. $\int \frac{\sin x + x \cos x}{x \sin x} dx.$ 13. $\int \frac{\sec x \operatorname{cosec} x}{\log \tan x} dx.$

§ 2·6. $\int \phi\{f(x)\} f'(x)\, dx$ আকার :—

যদি $\int \phi(x) dx = g(x)$ হয়, তবে $\int \phi\{f(x)\}.\ f'(x) dx = g\{f(x)\}$ হইবে।

প্রমাণ। $\int \phi\{f(x)\}.\ f'(x) dx = \int \phi(z) dz$, [$\because$ $z = f(x)$ ধরিয়া পাই $dz = f'(x) dx$.]

$= g(z)$, [$\therefore$ $\int \phi(x) dx = g(x)$ দেওয়া আছে]

$= g\{f(x)\}$.

সুতরাং সমাকল্যটি যদি একটি সমাকলনযোগ্য অপেক্ষকের অপেক্ষক $\phi\{f(x)\}$ এবং দ্বিতীয় অপেক্ষকটির অন্তরকলজ $f'(x)$-এর গুণফল হয়, তবে দ্বিতীয় অপেক্ষক $f(x)$-কে z-এর সমান ধরিতে হইবে।

দ্রষ্টব্য। পূর্বের অনুচ্ছেদে আলোচিত $\int \{f(x)\}^n f'(x) dx$ সমাকলটি $\int \phi\{f(x)\} f'(x) dx$ আকারের একটি বিশেষ রূপ। নিম্নের উদাহরণগুলি ভাল করিয়া লক্ষ্য কর।

উদাহরণ 1. সমাকলন কর : $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx.$ [C. U. 1939]

মনে কর, $\tan^{-1} x = z$. $\therefore$ $\frac{dx}{1+x^2} = dz$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $= \int e^z dz = e^z + c = e^{\tan^{-1} x} + c.$

উদা. 2. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}\, dx$ [B. H. U. '50]

মনে কর $\sqrt{x}=z$. $\therefore$ $\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}=dz$, বা, $\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2dz$.

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int 2 \sin z\, dz=-2\cos z+c$

$=-2\cos\sqrt{x}+c$.

উদা. 3. সমাকলন কর : $\displaystyle\int\frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx$.

মনে কর, $xe^x=z$. $\therefore$ $(e^x+xe^x)\,dx=dz$

বা, $e^x(1+x)\,dx=dz$.

সুতরাং $\displaystyle\int\frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx=\int\frac{dz}{\cos^2 z}=\int\sec^2 z\, dz$

$=\tan z+c=\tan(xe^x)+c$.

অনুশীলনী IIC

সমাকলন কর (Integrate) :

1. $\displaystyle\int e^x \sec^2(e^x)dx$.

2. $\displaystyle\int\frac{a^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

3. $\displaystyle\int(\cot e^x)\, e^x dx$.

4. $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\, dx$.

5. $\displaystyle\int e^{\sin^{-1}x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. $\displaystyle\int\cos(\log x)\,\frac{dx}{x}$.

7. $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\, dx$.

8. $\int x^2\cos x^3\, dx$.

9. $\int x^{n-1}\cos x^n dx$.

10. (i) $\int x(a+bx^2)\, dx$ (ii) $\int x^{n-1}\sin(a+bx^n)\, dx$.

11. $\int(\tan x-x)\tan^2 x\, dx$.

12. $\int x^{m-1}(2x^m+11)^{100}dx$.

§ 2·7. **কয়েকটি আদর্শ আকার :**

বর্তমান অনুচ্ছেদে $\dfrac{1}{x^2+a^2}$, $\dfrac{1}{x^2-a^2}$ ও $\dfrac{1}{a^2-x^2}$ এবং উহাদের বর্গমূলের x-এর সাপেক্ষে সমাকলন পদ্ধতি দেখান হইতেছে। এই সমাকল কয়টিকে আদর্শ আকার (standard form) রূপে লইয়া সূত্র হিসাবে ব্যবহার করা হয়।

যেহেতু $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, $\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$

এবং $1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$, বা, $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$,

সেজন্য সমাকল্য x^2+a^2 এর কোন ঘাত হইলে xকে $a\tan\theta$,

x^2-a^2 এর ঘাত হইলে, xকে $a\sec\theta$ এবং a^2-x^2 এর ঘাত হইলে xকে $a\cos\theta$ বা $a\sin\theta$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করা প্রায়শঃ সুবিধাজনক। আবার অনেক ক্ষেত্রে বিকল্প বিভিন্ন পদ্ধতিতে সমাকলন করা সুবিধাজনক হয়। নীচে ছয়টি আদর্শ আকারের সমাকলন পদ্ধতি দেখান হইল।

(i) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$.

মনে কর, $x=a\tan\theta$. $\therefore\ dx=a\sec^2\theta\,d\theta$.

এবং $a^2+x^2=a^2+a^2\tan^2\theta=a^2(1+\tan^2\theta)=a^2\sec^2\theta$.

$$\therefore\ \int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{a\sec^2\theta\,d\theta}{a^2\sec^2\theta}=\frac{1}{a}\int d\theta=\frac{1}{a}\theta+c.$$

এক্ষণে, $\because\ x=a\tan\theta$, $\therefore\ \tan\theta=\frac{x}{a}$, বা, $\theta=\tan^{-1}\frac{x}{a}$.

সুতরাং $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$.

উদাহরণ 1. $$\int\frac{dx}{x^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{dx}{x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

2. $\int\frac{dx}{1+a^2x^2}$.

মনে কর, $ax=z$. $\therefore\ adx=dz$ এবং $dx=\frac{dz}{a}$

$$\therefore\ \int\frac{dx}{1+a^2x^2}=\int\frac{dz}{a(1+z^2)}=\frac{1}{a}\int\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}z$$
$$=\frac{1}{a}\tan^{-1}(ax).$$

উদা. 3. $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$.

মনে কর, $e^x=z$. $\therefore\ e^x dx=dz$ এবং $e^{2x}=(e^x)^2=z^2$.

সুতরাং $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}=\int\frac{dz}{z^2+1}=\tan^{-1}z=\tan^{-1}(e^x)$.

উদা. 4. $\int\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2x}$. মনে কর, $\sin x=z$; $\therefore\ \cos x\,dx=dz$.

সুতরাং $\int\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2x}=\int\frac{dz}{1+z^2}=\tan^{-1}z=\tan^{-1}(\sin x)$.

উদা. 5. $\int \frac{dx}{x\{1+(\log x)^2\}}$.

মনে কর, $\log x = z$. $\therefore \frac{dx}{x} = dz$ এবং $1+(\log x)^2 = 1+z^2$.

$$\therefore \int \frac{dx}{x\{1+(\log x)^2\}} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1} z = \tan^{-1}(\log x).$$

অনুশীলনী IID.

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. $\int \frac{dx}{x^2+9}$. 2. $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$. 3. $\int \frac{2x.dx}{x^4+16}$.

4. $\int \frac{\sec^2 x \, dx}{\sec^2 x+3}$. 5. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+4}$. 6. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x+4}$

7. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\{1+(\tan^{-1}x)^2\}}$ 8. $\int \frac{dx}{x\{3+(\log x)^2\}}$

9. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. [C U. '58]

(ii) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ $(x>a)$.

মনে কর $x = a \sec\theta$, $\therefore dx = a \sec\theta \tan\theta \, d\theta$,

এবং $x^2-a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2(\sec^2\theta-1) = a^2\tan^2\theta$.

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta \, d\theta}{a^2\tan^2\theta \, d\theta} = \frac{1}{a}\int \frac{\sec\theta}{\tan\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\int \left(\frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) d\theta = \frac{1}{a}\int \left(\frac{1}{\sin\theta}\right) d\theta = \frac{1}{a}\int \operatorname{cosec}\theta \, d\theta.$$

$$= \frac{1}{a}\log\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + c.$$ [§ 2·5 উদা. 7(iv) দেখ]

$$= \frac{1}{2a}\log\left(\tan^2\frac{\theta}{2}\right) + c = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a} + c.$$

[$\because$ ত্রিকোণমিতি হইতে $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$,

$\therefore \frac{x}{a} = \sec\theta = \dfrac{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$, বা, $\frac{x-a}{x+a} = \tan^2\frac{\theta}{2}$.]

বিকল্প পদ্ধতি :

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\left\{\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2a}\left\{\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right\}$$

$$=\frac{1}{2a}[\log u-\log v]+c \quad [\ x-a=u \text{ ও } x+a=v \text{ ধরিয়া }]$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\log\frac{u}{v}\right]+c=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}+c.$$

(iii) $\int\frac{dx}{a^2-x^2}\ (a>x).$

মনে কর $x=a\sin\theta$; $\therefore\ dx=a\cos\theta\, d\theta.$

এবং $a^2-x^2=a^2-a^2\sin^2\theta=a^2(1-\sin^2\theta)=a^2\cos^2\theta.$

এক্ষণে, $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\int\frac{a\cos\theta\, d\theta}{a^2\cos^2\theta}=\frac{1}{a}\int\sec\theta\, d\theta.$

$$=\frac{1}{a}\log(\sec\theta+\tan\theta)+c$$

$$=\frac{1}{a}\log\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)+c=\frac{1}{a}\log\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+c$$

$$=\frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}+c$$

$$\left[\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}=\sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}}\right.$$

$$=\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}=\sqrt{\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}}\quad\left(\because\ x=a\sin\theta,\ \therefore\ \sin\theta=\frac{x}{a}\right)$$

$$\left.=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right].$$

বিকল্প পদ্ধতি :

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\int\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2a}\left\{\int\frac{dx}{a+x}+\int\frac{dx}{a-x}\right\}=\frac{1}{2a}\left\{\int\frac{du}{u}-\int\frac{dv}{v}\right\}$$

[$x+a=u$ এবং $a-x=v$ ধরিয়া]

$$=\frac{1}{2a}\{\log u-\log v\}+c=\frac{1}{2a}\log\frac{u}{v}+c=\frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}+c.$$

দ্রষ্টব্য। 1. যেহেতু $\frac{dx}{a^2-x^2}=-\frac{dx}{x^2-a^2}$, ∴ প্রথমে মনে হইতে পারে, সমাকল দুইটি একই আকারের। কিন্তু যেহেতু ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদমের সংজ্ঞা নাই, সে কারণ, $x>a$ হইলে $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$ এবং $x<a$ হইলে $\int\frac{dx}{a^2-x^2}$ এর সমাকলন করা যায়। এইজন্য সমাকলন দুইটি পৃথকভাবে সম্পাদন করা হয়।

2. উপরের সমাকলন দুইটি সম্পাদন করিবার জন্য যথাক্রমে $\int\operatorname{cosce}\theta\, d\theta$ ও $\int\sec\theta\, d\theta$-র সাহায্য লওয়া হইয়াছে। বিকল্প পদ্ধতিতে উক্ত সমাকল দুইটি ব্যবহার করা হয় নাই। আবার অনেকেই $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$ ও $\int\frac{dx}{a^2-x^2}$.এর সাহায্যে $\int\sec\theta\, d\theta$ ও $\int\operatorname{cosec}\theta\, d\theta$ নির্ণয় করিয়া থাকেন। (নীচের উদা. 4 দেখ)। উভয় ক্ষেত্রেই কোন ভুল হয় না, কারণ $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$ ও $\int\frac{dx}{a^2-x^2}$ নির্ণয়ের বিকল্প পদ্ধতি দুইটিতে $\int\sec\theta\ d\theta$ ও $\int\operatorname{cosec}\theta\ d\theta$-র সাহায্য লওয়া হয় না। আর § 2·5 উদা. 7 (iii) ও (iv) এ প্রদর্শিত $\int\sec\theta\, d\theta$ ও $\int\operatorname{cosec}\theta\, d\theta$ নির্ণয়ের পদ্ধতিতে $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$ বা $\int\frac{dx}{a^2-x^2}$এর প্রয়োগ করা হয় নাই।

উদাহরণ 1. $\int\frac{dx}{x^2-16}=\int\frac{dx}{x^2-(4)^2}=\frac{1}{8}\log\frac{x-4}{x+4}+c\quad[x>4]$

উদা. 2. $\int\frac{dx}{9-x^2}=\int\frac{dx}{(3)^2-x^2}=\frac{1}{6}\log\frac{3+x}{3-x}+c\ [\,x<3\,]$

উদা. 3. $\int\frac{e^x dx}{1-e^{2x}}.$

মনে কর $e^x=z$; ∴ $e^x dx=dz$ এবং $e^{2x}=(e^x)^2=z^2$

$$\therefore\quad \int\frac{e^x dx}{1-e^{2x}}=\int\frac{dz}{1-z^2}=\tfrac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}=\tfrac{1}{2}\log\frac{1+e^x}{1-e^x}.$$

উদা. 4. $\int\sec\theta\, d\theta\ \left[\theta<\frac{\pi}{2}\right]$

$$=\int\frac{1}{\cos\theta}d\theta=\int\frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos^2\theta}=\int\frac{\cos\theta\, d\theta}{1-\sin^2\theta};$$

মনে কর, $\sin\theta = z$, $\therefore$ $\cos\theta\, d\theta = dz$

$$\therefore \int \sec\theta\, d\theta = \int \frac{dz}{1-z^2} = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

$$= \log\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \log\frac{1+\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \log(\sec\theta + \tan\theta).$$

উদা. 5. $\int \frac{3x^2 dx}{x^6 - 1}$ $(x > 1)$.

মনে কর, $x^3 = u$; $\therefore$ $3x^2 dx = du$

$$\therefore \int \frac{3x^2 dx}{x^6-1} = \int \frac{du}{u^2-1} = \tfrac{1}{2}\log\frac{u-1}{u+1} = \tfrac{1}{2}\log\frac{x^3-1}{x^3+1}.$$

অনুশীলনী IIE

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. $\int \frac{dx}{x^2-2}$ $(x > \sqrt{2})$;
2. $\int \frac{dx}{1-x^2}$ $(x < 1)$;
3. $\int \frac{dx}{x^2 - 2ax}$ $(x > 2a)$;
4. $\int \frac{dx}{2ax - x^2}$ $(x < 2a)$.
5. $\int \frac{dx}{x\{1-(\log x)^2\}}$
6. $\int \frac{e^{2x} dx}{1-e^{4x}}$
7. $\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta - 2}\, d\theta$
8. $\int \operatorname{cosec}\theta\, d\theta$.

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

মনে কর $x = a\tan\theta$, $\therefore$ $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

এবং $\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\tan^2\theta + a^2} = \sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)} = a\sec\theta.$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a\sec\theta\, d\theta} = \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \log(\sec\theta + \tan\theta) + c$$

এক্ষণে $\because$ $x = a\tan\theta$, $\therefore$ $\tan\theta = \frac{x}{a}$

এবং $\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log(\sec\theta + \tan\theta) + c$$

$$= \log\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) = \log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right) + c.$$

$$= \log(x + \sqrt{x^2+a^2}) - \log a + c$$

$= \log(x+\sqrt{x^2+a^2}) + k$ [$k = c - \log a$, একটি ধ্রুবক]

(v) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ [$x > a$]

মনে কর, $x = a \sec\theta$ $\therefore$ $dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

এবং $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = a\tan\theta.$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{a\tan\theta} = \int \sec\theta\, d\theta.$$

$$= \log(\sec\theta + \tan\theta) = \log\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + c$$

[$\because$ $x = a\sec\theta$. $\therefore$ $\sec\theta = \frac{x}{a}$ ও $\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$]

$$= \log(x + \sqrt{x^2-a^2}) - \log a + c$$

$$= \log(x + \sqrt{x^2-a^2}) + k.$$

দ্রষ্টব্য। $x + \sqrt{x^2 \pm a^2} = z$ ধরিয়াও উপরের সমাকলন দুইটি [(iv) ও (v)] সম্পাদন করা যায়।

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

মনে কর $x = a\sin\theta$. $\therefore$ $dx = a\cos\theta\, d\theta$

এবং $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} = a\cos\theta.$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\cos\theta} = \int d\theta = \theta + c$$

$= \sin^{-1}\frac{x}{a} + c.$ [$\because$ $x = a\sin\theta$,

$\therefore$ $\sin\theta = \frac{x}{a}$, বা, $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$]

উদাহরণ 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} = \log(x + \sqrt{x^2+3}) + c.$

উদা. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \log(x+\sqrt{x^2-2})+c.$

উদা. 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{3}+c.$

উদা. 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}.$

মনে কর $ax=z$. $\therefore$ $adx=dz$. বা, $dx=\frac{dz}{a}$.

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \int \frac{dz}{a\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{a}\sin^{-1}z+c = \frac{1}{a}\sin^{-1}(ax)+c.$$

অনুশীলনী IIF

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$. 3. $\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}.dx.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$. 5. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}$.

6. $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$

§ 2·8. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ ও $\int \frac{(px+q)dx}{ax^2+b^2+c}$ আকারের সমাকলের সমাকলন :

(i) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ কে সমাকলন করিবার জন্য ax^2+bx+cকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ সম্ভব হইলে § 2·4 উদা. 4 এ প্রদর্শিত পদ্ধতি অনুসরণ করিবে। নিম্নের উদাহরণটি দেখ।

উদাহরণ 1. $\int \frac{dx}{6x^2+17x+12} = \int \frac{dx}{(2x+3)(3x+4)}$

$$= \int \left\{ \frac{3}{3x+4} - \frac{2}{2x+3} \right\} dx.$$

$$= 3\int \frac{dx}{3x+4} - 2\int \frac{dx}{2x+3} = 3\left\{ \frac{\log(3x+4)}{3} \right\} - 2\left\{ \frac{\log(2x+3)}{2} \right\} + c,$$

$$= \log \frac{3x+4}{2x+3} + c.$$

ax^2+bx+cকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা সম্ভব না হইলে,

$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$কে § 2·7এর (i), (ii) ও (iii) আকার তিনটির যে কোন একটি আকারে প্রকাশ করিবে। কোন্ আকারে প্রকাশ করিতে হইবে তাহা a, b ও c-র মানের উপর নির্ভর করিবে।

উদা. 2. $$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

এক্ষণে মনে কর, $x+\frac{1}{2}=z$, $\therefore\quad dx=dz$

$$\therefore\quad \text{প্রদত্ত সমাকল}=\int\frac{dz}{z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{z}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

[দেখ, উপরের উদাহরণে $\int\frac{dx}{x^2+x+1}$ কোন আদর্শ আকার নয়। $x+\frac{1}{2}=z$ ধরিয়া ইহাকে $\int\frac{dz}{z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ এই আদর্শ আকারে পরিণত করা হইল।]

উদা. 3. সমাকলন কর : $\int\frac{dx}{9x^2-12x+8}$ [Rajasthan 1959]

$$\int\frac{dx}{9x^2-12x+8}=\int\frac{dx}{(3x-2)^2+4}=\int\frac{dx}{(3x-2)^2+2^2}$$

মনে কর $3x-2=z$. $\therefore\quad 3dx=dz.\quad dx=\frac{dz}{3}$.

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল$=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z^2+(2)^2}=\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{z}{2}+c.$

$$=\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{3x-2}{2}+c.$$

উদা. 4. $I=\int\frac{\sec^2x\,dx}{\tan^2x+2\tan x+3}$ এর সমাকলন কর।

মনে কর $\tan x=z$ $\quad\therefore\quad \sec^2x\,dx=dz$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল$=\int\frac{dz}{z^2+2z+3}=\int\frac{dz}{(z+1)^2+(\sqrt{2})^2}$

এইবার মনে কর $z+1=u \quad \therefore \quad dz=du$

এবং $I=\int\frac{du}{u^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}}+c$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{z+1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x+1}{\sqrt{2}}\right)+c.$$

উদা. 5. $\int\frac{dx}{2x^2-6x+4}=\int\frac{dx}{2(x^2-3x+2)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{3}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}$

$=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2-(\frac{1}{2})^2}$ [$x-\frac{3}{2}=z$ ধরিয়া]

$=\frac{1}{2}\frac{1}{2.\frac{1}{2}}\log\frac{z-\frac{1}{2}}{z+\frac{1}{2}}+c=\frac{1}{2}\log\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}+c=\frac{1}{2}\log\frac{x-2}{x-1}+c.$

উদা. 6. $\int\frac{dx}{1+x-x^2}=\int\frac{dx}{1-(x^2-x)}=\int\frac{dx}{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}$

$=\int\frac{du}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-u^2}$ [$u=x-\frac{1}{2}$ ধরিয়া]

$=\frac{1}{2.\frac{\sqrt{5}}{2}}\log\frac{u+\frac{\sqrt{5}}{2}}{u-\frac{\sqrt{5}}{2}}+c=\frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}+c$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{2x-1+\sqrt{5}}{2x-1-\sqrt{5}}+c.$

অনুশীলনী II (G)

সমাকলন কর (Integrate) :

1. $\int\frac{dx}{x^2+x-12}$. 2. $\int\frac{dx}{3x^2+13x+14}$. 3. $\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$.

4. $\int\frac{dx}{1-x-x^2}$. 5 $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+2\sin x+5}$.

6. $\int\frac{dx}{x\{(\log x)^2+\log x+1\}}$ 7. $\int\frac{x\,dx}{x^4+4x^2+3}$.

8. $\int\frac{e^x dx}{2+3e^x-2e^{2x}}$. 9. $\int\frac{\cos x\,dx}{5\sin^2 x-12\sin x+4}$.

[C. U. '67]

(ii) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx.$

তোমরা জান $\frac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right)=2ax+b.$

এক্ষণে, $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$

$$=\frac{p}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aq}{p}}{ax^2+bx+c}dx=\frac{p}{2a}\int \frac{\left(2ax+b\right)+\frac{2aq}{p}-b}{ax^2+bx+c}dx$$

$$=\frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\frac{2aq-bp}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$=\frac{p}{2a}I_1+\frac{2aq-bp}{2a}I_2$$

এক্ষণে $I_1=\log(ax^2+bx+c)$ এবং I_2এর আকারের সমাকল সম্বন্ধে উপরের (i)এ আলোচনা করা হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য। ax^2+bx+cএর উৎপাদক বিশ্লেষণ করা সম্ভব হইলে $\frac{px+q}{ax^2+bx+c}$কে, $\frac{k_1}{c_1x+c_2}+\frac{k_2}{c_3x+c_4}$ আকারে প্রকাশ করিয়াও সমাকলন করা যাইতে পারে।

উদাহরণ 1. $\int \frac{7x-9}{x^2-2x+35}dx=\int \frac{\frac{7}{2}(2x-2)-2}{x^2-2x+35}dx$ [C. U.'33]

$$=\frac{7}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+35}dx-2\int \frac{dx}{x^2-2x+35}$$

$$=\frac{7}{2}\int \frac{du}{u}-2\int \frac{dx}{(x-1)^2+(\sqrt{34})^2} \quad [x^2-2x+35=u \text{ ধরিয়া }]$$

$$=\tfrac{7}{2}\log u-2\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{34})^2} \quad [\,x-1=t \text{ ধরিয়া }]$$

$$=\tfrac{7}{2}\log(x^2-2x+35)-\frac{2}{\sqrt{34}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{34}}+c$$

$$=\tfrac{7}{2}\log(x^2-2x+35)-\frac{2}{\sqrt{34}}\tan^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{34}}+c.$$

উদা. 2. $\int \frac{2x+3}{2x^2+x-1}dx$এর সমাকলন কর :—

$$\int \frac{2x+3}{2x^2+x-1}dx=\int \frac{\frac{1}{2}(4x+1)+\frac{5}{2}}{2x^2+x-1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{4x+1}{2x^2+x-1}dx+\frac{5}{2}\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$$

এক্ষণে, $\int\frac{4x+1}{2x^2+x-1}dx=\log(2x^2+x-1)+c_1$

$$\left[\because\ \frac{d}{dx}(2x^2+x-1)=4x+1\right]$$

$$\int\frac{dx}{2x^2+x-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2.2.\frac{3}{4}}\log\frac{x+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}+c_2=\frac{1}{3}\log\frac{2x-1}{2(x+1)}+c_2$$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল

$$=\tfrac{1}{2}\log(2x^2+x-1)+\tfrac{5}{6}\log\frac{2x-1}{2(x+1)}+c.$$

অনুশীলনী II (H)

সমাকলন কর (Integrate) :

1. $\int\frac{x+1}{x^2+4x+5}dx.$ [C. U. 1926, '28]

2. $\int\frac{x^2}{x^2-4}dx.$ [C U. 1935] 3. $\int\frac{2x-1}{x^2+2x+3}dx.$

4. $\int\frac{2x-3}{1-x-x^2}dx.$ 5. $\int\frac{(1-x)dx}{4x^2-4x-3}.$

§ 2·9. (i) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}$ এবং (ii) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}(\beta>\alpha.)$

(i) মনে কর $x-\alpha=z^2$ $\therefore$ $dx=2zdz$

বা, $\frac{dx}{z}=2dz$ বা, $\frac{dx}{\sqrt{x-\alpha}}=2dz.$

আবার $x-\alpha=z^2$ $\therefore$ $x=\alpha+z^2$, বা, $x-\beta=z^2+\alpha-\beta.$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int\frac{2dz}{\sqrt{z^2+\alpha-\beta}}$

$$=2\log(z+\sqrt{z^2+\alpha-\beta})=2\log(\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}).$$

উদাহরণ 1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-ax}}=\frac{dx}{\sqrt{x(x-a)}}=2\log(\sqrt{x}+\sqrt{x-a}).$

উদা. 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7x+12}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+3)(x+4)}}$

$$=2\log(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}).$$

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} (\beta > \alpha)$.

(i)এর ন্যায় মনে কর $x-\alpha=z^2$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}=\int \frac{2dz}{\sqrt{\beta-\alpha-z^2}}=2 \sin^{-1}\frac{z}{\sqrt{\beta-\alpha}}$$

$$=2 \sin^{-1}\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{\beta-\alpha}}=2 \sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}.$$

দ্রষ্টব্য। $x=\alpha \cos^2\theta+\beta \sin^2\theta$ ধরিয়াও সমাকলটি নির্ণয় করা যায়।

উদা. 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}$

$$=2 \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a-0}}=2 \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

অনুশীলনী II (I)

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$. [C. U. 1931]

2 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-x^2-6}}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-3x^2}}$

§ 2·10. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ও (ii) $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

এখানে প্রধানতঃ দুইটি সম্ভাবনার কথা চিন্তা করা যাইতে পারে।

(a) ax^2+bx+cকে বাস্তব সহগযুক্ত দুইটি একঘাতবিশিষ্ট উৎপাদকের গুণফলরূপে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

অথবা. (b) (a)তে বর্ণিত উৎপাদকে বিশ্লেষণ সম্ভব নয়। যদি (a)তে বর্ণিত উপাদকে বিশ্লেষণ সম্ভব হয়, তবে § 2·9এর পদ্ধতি অবলম্বন করা যাইতে পারে। নতুবা (b)তে নিম্নের পদ্ধতি অনুসরণ করিবে। অবশ্য (a)তে বর্ণিত ক্ষেত্রেও নিম্নের সাধারণ পদ্ধতি অনুসরণ করিতে পার।

সাধারণ পদ্ধতি : সাধারণ পদ্ধতিতে প্রথমে দেখ a (অর্থাৎ x^2এর সহগ) ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক।

যদি a ধনাত্মক হয়,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm\alpha^2}}$$

[$4ac-b^2$, ধনাত্মক হইলে '+' চিহ্ন এবং $4ac-b^2$ ঋণাত্মক হইলে '−' চিহ্ন হইবে।]

একণে, $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm\alpha^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm\alpha^2}}\left(t=x+\frac{b}{2a}\text{ মনে করিয়া}\right)$

এবং ইহা § 2·7 (iv) ও (v)এ আলোচিত আকার।

যদি a ঋণাত্মক হয়, মনে কর $a=-d$(d ধনাত্মক)

$$\therefore\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{c+bx-dx^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{d}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{4dc+b^2}{4d^2}-\left(x-\frac{b}{2d}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{d}}\int\frac{dt}{\sqrt{\alpha^2+t^2}}\qquad\left[t=x-\frac{b}{2d},\ \alpha^2=\frac{4dc+b^2}{4d^2}\text{ ধরিয়া}\right]$$

এবং ইহা § 2·7 (vi)এ আলোচিত আকার।

উদাহরণ 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$. [C. U. '41]

প্রদত্ত সমাকল $\displaystyle=\int\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x^2-3x+\frac{9}{4})}}$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{3}{2})^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(\frac{1}{2})-t^2}}\qquad[\ x-\tfrac{3}{2}=t\text{ ধরিয়া}\ ]$$

$$=\sin^{-1}\frac{t}{\frac{1}{2}}=\sin^{-1}2t=\sin^{-1}2(x-\tfrac{3}{2})=\sin^{-1}(2x-3).$$

উদা. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4x+2}}$. [C. U. 1942]

প্রদত্ত সমাকল$=\int \frac{dx}{\sqrt{3(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3})}}$.

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}+\frac{2}{9}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}} \qquad [\, x+\tfrac{2}{3}=t \text{ ধরিয়া }]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(t+\sqrt{t^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(x+\tfrac{2}{3}+\sqrt{x^2+\tfrac{4}{3}x+\tfrac{2}{3}}\right).$$

উদা. 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{4}+(x+\frac{1}{2})^2}}$

$$=\int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+z^2}} \qquad [\, x+\tfrac{1}{2}=z \text{ ধরিয়া }]$$

$$=\log\left(z+\sqrt{z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)=\log\left(x+\tfrac{1}{2}+\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}}\right)$$

$$=\log\left(\frac{2x+1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)=\log\left(\frac{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}{2}\right)$$

$$=\log\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right)-\log 2$$

এক্ষণে, যেহেতু log 2 একটি ধ্রুবক,

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\log\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right)+c$$

অনুশীলনী II (J)

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+6)}}$ 2 (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{(5x-x^2-6)}}$

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+4}}$ [P. P. 1932] (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-3x^2}}$ [Gorakhpur '63]

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x-3}}$ [Agra '61]

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ [Agra '49]

6. $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{5 \tan^2 x - 12 \tan x + 4}}$

7. $\int \frac{dx}{x \sqrt{(\log x)^2 + 2 \log x + 5}}$

(ii) $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$-এর সমাকলনের জন্য

§ 2·8-এর (ii)এর পদ্ধতি অনুসরণ করিবে।

উদাহরণ 1. $\int \frac{2x+9}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$-এর সমাকলন কর।

$\frac{d}{dx}(x^2+x+1) = 2x+1$ এবং $2x+9 = (2x+1)+8$,

এক্ষণে, $\int \frac{2x+9}{x^2+x+1} dx = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx + \int \frac{8dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 8\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} + c_1$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 8 \log\left\{\left(x+\tfrac{1}{2}\right) + \sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}}\right\} + c_1 + c_2$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 8 \log\left\{\frac{2x+1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right\} + c.$$

উদা. 2. সমাকলন কর : $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \log(x + \sqrt{x^2+1}) + c.$$

উদা. 3. সমাকলন কর : $\int \sqrt{\frac{1+x}{1+x}} dx.$ [C. U. 1925, '28, '59]

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= I_1 + I_2 \text{ (মনে কর)}$$

একণে, $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x+c_1$

$I_2=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ নির্ণয়ের জন্য

মনে কর, $1-x^2=z \quad \therefore \quad -2x\,dx=dz$ বা, $x\,dx=-\frac{dz}{2}$

$$\therefore \quad I_2=-\int\frac{dz}{2\sqrt{z}}=-\sqrt{z}+c_2=-\sqrt{1-x^2}+c_2$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=I_1+I_2=\sin^{-1}x+c_1-\sqrt{1-x^2}+c_2$

$$=\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c. \quad [c_1+c_2=c]$$

উদা. 4. সমাকলন কর : $\int\frac{3x+1}{\sqrt{(2-3x-2x^2)}}dx$

$$\int\frac{3x+1}{\sqrt{(2-3x-2x^2)}}dx=-\tfrac{3}{4}\int\frac{-4x-3}{\sqrt{2-3x-2x^2}}dx$$

$$-\frac{5}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$$

$$=-\tfrac{3}{2}\sqrt{(2-3x-2x^2)}-\frac{5}{4\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\{(\frac{5}{4})^2-(x+\frac{3}{4})^2\}}}+c$$

$$=-\tfrac{3}{2}\sqrt{(2-3x-2x^2)}-\frac{5}{4\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4x+3}{5}\right)+c.$$

অনুশীলনী II (K)

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. $\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$ [C. U. '28 ; B. U. '45]

2. $\int\frac{x-2}{\sqrt{2x^2-8x+5}}dx.$ [C. U. '26] 3. $\int\frac{(2x+5)dx}{\sqrt{(x^2+3x+1)}}$

4. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ [Nagpur '52]

5. $\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx.$ [Poona '63]

6. $\int\frac{5-6x}{\sqrt{1+2x-3x^2}}dx.$ 7. $\int\frac{(2x+5)dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

§ 2·11. (i) $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$

ও (ii) $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{px^2+qx+r}}$.

আকারের সমাকলের সমাকলন :

(i) $cx+d=t^2$ ধরিলে $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$.

§ 2·7এর (i), (ii) ও (iii) আদর্শ আকার তিনটির একটিতে পরিণত হইবে এবং সুতরাং সমাকলন সম্পাদন করা যাইবে।

(ii) $ax+b=\frac{1}{t}$ ধরিলে $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{px^2+qx+r}}$ ..

§ 2·10.এর আকারে পরিণত হইবে।

নিম্নের উদাহরণগুলিতে প্রণালী দুইটি ব্যাখ্যা করা হইল।

উদাহরণ 1. সমাকলন কর : $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}}$.

মনে কর $x+2=u^2$ $\therefore$ $dx=2u\,du$. এবং $x+1=u^2-1$.

$$\therefore \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}}=\int \frac{2u\,du}{(u^2-1).u}=2\int \frac{du}{u^2-1}$$

$$=\log \frac{u-1}{u+1}+c=\log \frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}+1}+c$$

উদা. 2 সমাকলন কর : $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

মনে কর $x+1=t^2$ $\therefore$ $dx=2t\,dt$. এবং $x=t^2-1$

$$\therefore \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int \frac{2t\,dt}{(t^2-1)t}=2\int \frac{dt}{t^2-1}.$$

$$=2.\ \tfrac{1}{2}\log \frac{t-1}{t+1}+c=\log \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}+c.$$

উদা. 3. সমাকলন কর : $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-2x+3x^2}}$ [Punjab '60]

মনে কর $2-x=\frac{1}{t}$ $\therefore$ $-dx=-\frac{1}{t^2}dt$.

বা, $dx=\frac{dt}{t^2}$; $1-2x+3x^2=1-2\left(2-\frac{1}{t}\right)+3\left(2-\frac{1}{t}\right)^2$

$$=1-4+\frac{2}{t}+12-\frac{12}{t}+\frac{3}{t^2}=\frac{9t^2-10t+3}{t^2}$$

$$\therefore \int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-2x+3x^2}}=\int\frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{9t^2-10t+3}}{t}}$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{9t^2-10t+3}}=\int\frac{dt}{3\sqrt{t^2-\frac{10}{9}t+\frac{1}{3}}}.$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{(t-\frac{5}{9})^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{9}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{3}\log\left\{(t-\tfrac{5}{9})+\sqrt{(t-\tfrac{5}{9})^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{9}\right)^2}\right\}+c$$

$$=\frac{1}{3}\log\left\{\left(\frac{1}{2-x}-\frac{5}{9}\right)+\sqrt{t^2-\tfrac{10}{9}t+\tfrac{1}{3}}\right\}+c$$

$$=\frac{1}{3}\log\left\{\frac{5x-1}{9(2-x)}+\sqrt{\frac{1}{(2-x)^2}-\frac{10}{9(2-x)}+\frac{1}{3}}\right\}+c$$

$$=\frac{1}{3}\log\left\{\frac{5x-1}{9(2-x)}+\frac{\sqrt{1-2x+3x^2}}{3(2-x)}\right\}+c$$

অনুশীলনী II (L)

সমাকলন কর (Integrate) :

1. $\int\frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$ 2. (i) $\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$

(ii) $\int\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{3x+4}}$. (iii) $\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+3}}$. [C. U. '41]

3. (i) $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$. [Andhra '60]

(ii) $\int\frac{dx}{(1+2x)\sqrt{1+x^2}}$.

4. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. [Poona '63]

5 $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2-a^2}}$. [Nagpur '56]

6. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ 7. $\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}}}$

§ 2·12. $\int \frac{1}{a\cos x+b\sin x+c}dx$ আকারের সমাকলন :

এইরূপ আকারের সমাকলে $\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

এবং $\cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ বসাইয়া, সমাকল্যটিকে $\tan\frac{x}{2}$-এর অপেক্ষকে রূপান্তরিত করিতে হইবে। ইহার পরে $\tan\frac{x}{2}=z$ বসাইলে সমাকলটি § 2·8 (i) অনুচ্ছেদে বর্ণিত সমাকলের আকারে পরিণত হইবে। নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে ইহা বুঝান হইতেছে।

উদা. 1. সমাকলন কর : $\int\frac{dx}{5+4\cos x}$ [C. U. '74]

$$\int\frac{dx}{5+4\cos x}=\int\frac{dx}{5+4.\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\int\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx}{5\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+4\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{9+\tan^2\frac{x}{2}},$$

$$=\int\frac{2dz}{9+z^2}\left(\text{মনে কর, } \tan\frac{x}{2}=z \quad \therefore \quad \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx=dz\right)$$

$$=2\int\frac{dz}{3^2+z^2}=2.\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{z}{3}+c.$$

$$=\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}\right)+c.$$

উদা. 2. সমাকলন কর : $\int\frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$. [C. U. '67]

$$\int\frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}=\int\frac{dx}{3+2.\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+\dfrac{\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\int\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx}{3\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+4\tan\frac{x}{2}+\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{2\left(\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}+2\right)}=\int\frac{2dz}{2(z^2+2z+2)},$$

$\left[\text{মনে কর, } z=\tan\frac{x}{2} \quad \therefore \quad dz=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx\right]$

$$=\int\frac{dz}{(z+1)^2+1^2}=\tan^{-1}(z+1)+c=\tan^{-1}(\tan\frac{x}{2}+1)+c.$$

উদা. 3. সমাকলন কর : $\int\frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$. [C. U. '66]

প্রদত্ত সমাকল $=\int\frac{dx(1+\tan^2\frac{x}{2})}{3.2\tan\frac{x}{2}-4\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}$

$=\int\frac{2dz}{4z^2+6z-4}$, $z=\tan\frac{x}{2}$ ধরিয়া পাই $\sec^2\frac{x}{2}dx=2dz$

$$=\int\frac{dz}{2\{(z+\frac{3}{4})^2-(\frac{5}{4})^2\}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{4}}\log\frac{z+\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}{z+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}+c$$

$$=\frac{1}{5}\log\frac{2\tan\frac{x}{2}-1}{2\tan\frac{x}{2}+4}+c.$$

বিকল্প পদ্ধতি : $\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x}$ আকারের সমাকলকে নিম্নলিখিত ভাবে বাহির করা যায়। মনে কর, $a=r\sin\theta$, $b=r\cos\theta$ ধরা হইল।

$\therefore \quad r=\sqrt{a^2+b^2}$ এবং $\tan\theta=\frac{a}{b}$ বা, $\theta=\tan^{-1}\frac{a}{b}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল

$$=\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x}=\int\frac{dx}{r(\cos x\sin\theta+\sin x\cos\theta)}$$

$$=\frac{1}{r}\int\frac{dx}{\sin(x+\theta)}=\frac{1}{r}\int\text{cosec}\,(x+\theta)d\theta=\frac{1}{r}\log\tan\frac{x+\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{a}{b}\right)$$

এক্ষণে $a=-4$ এবং $b=3$ বসাইয়া পাই

$$\int\frac{dx}{3\sin x-4\cos x}=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}\log\tan\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{-4}{3}\right)+c$$

$$=\frac{1}{5}\log\tan\left(\frac{x}{2}-\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4}{3}\right)+c.$$

অনুশীলনী IIM

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. $\int\frac{dx}{4+5\cos x}$. 2. $\int\frac{dx}{5+4\sin x}$. 3. $\int\frac{dx}{4-5\sin x}$

4. $\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$. 5. $\int\frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$.

উদাহরণমালা 2

1. সমাকলন কর : (i) $\int\sqrt[5]{1+x}\,dx$, (ii) $\int\sqrt[4]{1+\tan x}\sec^2 x\,dx$,

(iii) $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+\log x}}$ (iv) $\int\frac{(\sin^{-1}x+3)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

(i) মনে কর, $1+x=z$, $\therefore$ $dx=dz$

সুতরাং $\int\sqrt[5]{1+x}\,dx=\int\sqrt[5]{z}\,dz=\int z^{\frac{1}{5}}dz=\frac{5}{6}z^{\frac{6}{5}}+c=\frac{5}{6}(1+x)^{\frac{6}{5}}+c$

(ii) মনে কর $1+\tan x=z$ $\therefore$ $\sec^2 x\,dx=dz$

এবং $\int\sqrt[4]{1+\tan x}\sec^2 x\,dx=\int\sqrt[4]{z}\,dz=\int z^{\frac{1}{4}}dz$

$=\frac{4}{5}z^{\frac{5}{4}}+c=\frac{4}{5}(1+\tan x)^{\frac{5}{4}}+c.$

(iii) মনে কর $1+\log x=u$ $\therefore$ $\frac{1}{x}dx=du$

এবং $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+\log x}}=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int u^{-\frac{1}{2}}du=2u^{\frac{1}{2}}+c$

$=2\sqrt{u}+c=2\sqrt{1+\log x}+c.$

(iv) মনে কর $\sin^{-1}x+3=z$ $\therefore$ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=dz$

এবং $\int\frac{(\sin^{-1}x+3)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int z^2dz=\frac{z^3}{3}+c=\frac{(\sin^{-1}x+3)^3}{3}+c.$

2. সমাকলন কর : $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x+2}}$. [Ranchi '63, P. U. '46]

মনে কর $x+2=t^2$ $\therefore$ $dx=2t\,dt$ এবং $x=t^2-2$

$$\therefore \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+2}} = \int \frac{(t^2-2)^2\, 2t\, dt}{t} = 2\int (t^4 - 4t^2 + 4)dt$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{4}{3}t^3 + 4t\right) + c$$

$$= \tfrac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{8}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + 8(x+2)^{\frac{1}{2}} + c$$

3. সমাকলন কর : $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$.

মনে কর $ax+b=z$ $\therefore$ $adx=dz$, বা, $dx=\frac{dz}{a}$

সুতরাং $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(ax+b)^2}} = \int \frac{\frac{dz}{a}}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{a}\sin^{-1}z + c.$$

$$= \frac{1}{a}\sin^{-1}(ax+b) + c.$$

4. সমাকলন কর : (i) $\int \frac{cx+d}{\sqrt{ax+b}}dx$

(ii) $\int (cx+d)\sqrt{ax+b}\, dx$.

মনে কর $ax+b=z^2$, $\therefore$ $adx=2zdz$ এবং $x=\frac{z^2-b}{a}$.

(i) $$\int \frac{cx+d}{\sqrt{ax+b}}dx = \int \frac{c\left(\frac{z^2-b}{a}\right)+d}{z} . 2\frac{z}{a}\, dz$$

$$= \frac{2c}{a^2}\int z^2 dz + \frac{2(ad-bc)}{a^2}\int dz = \frac{2c}{a^2}\frac{z^3}{3} + \frac{2(ad-bc)}{a^2}z + k$$

$$= \frac{2c}{3a^2}\left(ax+b\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2(ad-bc)}{a^2}\left(ax+b\right)^{\frac{1}{2}} + k.$$

(ii) $$\int (cx+d)\sqrt{ax+b}\, dx = \int \left(c.\,\frac{z^2-b}{a}+d\right).z.\frac{2z}{a}dz$$

$$= \frac{2c}{a^2}\int z^4 dz + 2\frac{ad-bc}{a^2}\int z^2 dz = \frac{2c}{a^2}\frac{z^5}{5} + 2\frac{ad-bc}{a^2}\frac{z^3}{3} + k$$

$$= \frac{2c}{5a^2}\left(ax+b\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{2(ad-bc)}{3a^2}\left(ax+b\right)^{\frac{3}{2}} + k.$$

5. সমাকলন কর : $\int \frac{x^3+3x^2+3x+4}{x^2+2x+1}\, dx$. [C. U. '63]

$$\int\frac{x^3+3x^2+3x+4}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{x(x^2+2x+1)+(x^2+2x+1)+3}{x^2+2x+1}\,dx$$

$$=\int\left\{x+1+\frac{3}{(x+1)^2}\right\}dx=\int x\,dx+\int dx+\int\frac{3}{(x+1)^2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+x-\frac{3}{x+1}+c.$$

6 সমাকলন কর : $\int\frac{(x^2+1)x}{x^4+1}dx,$ [C. U. '68]

$$\int\frac{(x^2+1)x}{x^4+1}\,dx=\int\frac{x^3dx}{x^4+1}+\int\frac{x}{x^4+1}\,dx=I_1+I_2$$

এখন, $I_1=\int\frac{x^3dx}{x^4+1}=\int\frac{\frac{1}{4}dz}{z}$, [$x^4+1=z$ বসাইয়া পাই $4x^3dx=dz$]

$$=\tfrac{1}{4}\log(z)=\tfrac{1}{4}\log(x^4+1)$$

এবং $I_2=\int\frac{x}{x^4+1}dx=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{t^2+1}$, [$x^2=t$ বসাইয়া পাই $2xdx=dt$]

$$=\tfrac{1}{2}\tan^{-1}t=\tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x^2).$$

$$\therefore\quad \int\frac{(x^2+1)x}{x^4+1}\,dx=\tfrac{1}{4}\log(x^4+1)+\tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x^2)+c.$$

7. $\int\tan^3x\,dx=\int\tan x.\tan^2x\,dx=\int\tan x(\sec^2x-1)dx$

$=\int\tan x\sec^2x\,dx-\int\tan x\,dx$

$=\int z.dz-\log\sec x$, [প্রথম সমাকলে $\tan x=z$ ধরিয়া পাই $\sec^2x\,dx=dz$]

$$=\frac{z^2}{2}-\log\sec x+c=\tfrac{1}{2}\tan^2x-\log\sec x+c.$$

8. সমাকলন কর : $\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx.$ [C. U. '58]

$$\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\log(\sin x+\cos x)+c$ [$\because$ দ্বিতীয় সমাকলটি $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ আকারের]

[দ্রষ্টব্য : সমাকলটি $\int \frac{a \sin x+b \cos x}{c \sin x+d \cos x} dx$ আকারে থাকিলে সমাকলের লবটিকে $l\times$(হর)$+m\times$(হরের অন্তরকলজ), এই আকারে প্রকাশ করিবে। নিম্নের উদাহরণ দেখ।]

9. সমাকলন কর : $\int \frac{2 \sin x+3 \cos x}{3 \sin x+4 \cos x} dx.$

মনে কর $2 \sin x+3 \cos x=l(3 \sin x+4 \cos x)$

$+m(3 \cos x-4 \sin x)$

[অর্থাৎ লব$=l$(হর)$+m$ (হর) আকারে লেখা হইল]

$=(3l-4m)\sin x+(4l+3m)\cos x$

উভয় পক্ষের $\sin x$ এবং $\cos x$-এর সহগ সমান ধরিয়া পাই

$\left.\begin{array}{l}2=3l-4m\\ 3=4l+3m\end{array}\right\}$ ইহা সমাধান করিয়া পাই, $l=\frac{18}{25}$, $m=\frac{1}{25}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাকল

$$=\int \frac{\frac{18}{25}(3 \sin x+4 \cos x)+\frac{1}{25}(3 \cos x-4 \sin x)}{3 \sin x+4 \cos x} dx$$

$$=\int \frac{18}{25} dx+\frac{1}{25}\int \frac{3 \cos x-4 \sin x}{3 \sin x+4 \cos x} dx$$

$$=\frac{18}{25}x+\frac{1}{25}\log(3 \sin x+4 \cos x)+c.$$

উদা. 10. সমাকলন কর : (i) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x} dx$, (ii) $\int \frac{\cos x}{\cos 2x} dx.$

(i) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x} dx=\int \frac{2 \cos^2 x-1}{\cos x} dx=2\int \cos x\, dx-\int \sec x\, dx$

$=2 \sin x-\log(\sec x+\tan x)+c.$

(ii) $\int \frac{\cos x}{\cos 2x} dx=\int \frac{\cos x}{1-2 \sin^2 x} dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2} \cos x\, dx}{1-(\sqrt{2} \sin x)^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{1-z^2}$ [$\sqrt{2} \sin x=z$ ধরিয়া পাই $\sqrt{2} \cos x\, dx=dz$]

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\log\frac{1+z}{1-z}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{1+\sqrt{2} \sin x}{1-\sqrt{2} \sin x}.$$

উদা. 11. সমাকলন কর : $\int \frac{dx}{(a \cos x+b \sin x)^2}.$

$$\int \frac{dx}{(a \cos x+b \sin x)^2}=\int \frac{dx}{\cos^2 x(a+b \tan x)^2}$$

$$=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{(a+b\tan x)^2}=\int\frac{\frac{1}{b}\,dz}{z^2},\quad [a+b\tan x=z \text{ ধরিয়া পাই, } b\sec^2 x\,dx=dz]$$

$$=-\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{a+b\tan x}+c.$$

বিকল্প পদ্ধতি। মনে কর $a=r\cos\theta,\ b=r\sin\theta$

$$\therefore\quad a\cos x+b\sin x=r(\cos x.\cos\theta+\sin x.\sin\theta)$$
$$=r\cos(x-\theta)$$

যেখানে $r=\sqrt{a^2+b^2}$ এবং $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$

$$\therefore\quad \text{নির্দেয় সমাকল্য}=\int\frac{dx}{r^2\cos^2(x-\theta)}=\frac{1}{r^2}\int\sec^2(x-\theta)dx$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\tan\left(x-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)+c'.$$

উদা. 12. সমাকলন কর : (i) $\int\sin^6 x\cos^3 x\,dx.$ [C. U. '68]

(ii) $\int\sin^2 x\cos^2 x\,dx$ (iii) $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx.$

(i) $\int\sin^6 x\cos^3 x\,dx=\int\sin^6 x.(1-\sin^2 x)\cos x\,dx,$

[মনে কর $\sin x=z,\quad\therefore\quad\cos x\,dx=dz$]

$$=\int z^6(1-z^2)dz=\int z^6dz-\int z^8dz$$

$$=\frac{z^7}{7}-\frac{z^9}{9}+c=\tfrac{1}{7}\sin^7 x-\tfrac{1}{9}\sin^9 x+c.$$

(ii) $\int\sin^2 x\cos^2 x\,dx=\int\frac{1}{4}.2\sin^2 x.2\cos^2 x\,dx$

$$=\tfrac{1}{4}\int(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)dx=\tfrac{1}{4}\int(1-\cos^2 2x)dx$$

$$=\tfrac{1}{4}\int\left(1-\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\tfrac{1}{4}\int\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 4x\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}\right)+c.$$

(iii) $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx=\int\tan^2 x.(1+\tan^2 x).\sec^2 x\,dx,$

[মনে কর, $\tan x=z\quad\therefore\quad\sec^2 x\,dx=dz$]

$$=\int z^2(1+z^2)dz=\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+c=\tfrac{1}{3}\tan^3 x+\tfrac{1}{5}\tan^5 x+c.$$

[দ্রষ্টব্য : $\int \sin^p x . \cos^q x \, dx$ আকারের সমাকলে $\sin x$ এবং $\cos x$-এর মধ্যে কোনটির ঘাত অযুগ্ম ধনাত্মক সংখ্যা হইলে অপরটিকে z-এর সমান ধরিতে হয়।

যদি $\sin x$ এবং $\cos x$ উভয়ের ঘাতই যুগ্ম ধনাত্মক সংখ্যা হয়, তবে সমাকল্যটিকে $\sin x$ এবং $\cos x$-এর গুণিতককোণ-এ প্রকাশ করিতে হইবে।

$\sin x$ এবং $\cos x$ উভয়ের ঘাত যুগ্ম এবং যে কোন একটি ঋণাত্মক হইলে $\tan x = z$ বা, $\cot x = z$ বসাইতে হইবে।]

১. 13. সমাকলন কর : $\int \sqrt{1+\sec x}\, dx.$ [C. U. '62]

$$\int \sqrt{1+\sec x}\, dx = \int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{1-2\sin^2\frac{x}{2}}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}\, dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad \left[\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} = z \text{ ধরিয়া পাই } \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2}\, dx = dz \right]$$

$$= 2\sin^{-1} z + c$$

$$= 2\sin^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right) + c.$$

১. 14. সমাকলন কর : $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}} dx.$ [C. U.]

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}} dx = \int \frac{1+\sin x - 1}{\sqrt{1+\sin x}} dx$$

$$= \int \sqrt{1+\sin x}\, dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+\sin x}} dx$$

$$= \int \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) dx - \int \frac{dx}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}},$$

কারণ, $\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \sin x$

$$= 2\sin\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} - \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=2\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \operatorname{cosec}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$=2\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\log\tan\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+c.$$

প্রশ্নমালা 2

সমাকলন কর :

1. $\int(1+x)^5\,dx.$

2. $\int\frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}\,dx.$

3. $\int\frac{\cos 2x}{3+4\sin 2x}\,dx.$

4. $\int x a^{x^2}dx$

5 $\int x^2 e^{x^3}dx$

6. (i) $\int\frac{e^x dx}{3+4e^x}.$ (ii) $\int e^{x^2+6x+9}.(x+3)\,dx.$

7. $\int\frac{\log\ \log x)}{x.\log x}dx.$

8. $\int\frac{\log\sqrt{x}}{3x}\,dx.$ [C. U. '64]

9. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$ [C. U. '62]

10. $\int\frac{xdx}{x^2+3x+2}.$ [C. U. '74]

11. $\int\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx.$ [C. U. '74]

12. $\int\frac{x-\alpha}{x^2-5x+4}\,dx.$ [C U.]

13. (i) $\int\frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}\,dx.$ [C. U. '67]

(ii) $\int\frac{x^3-2x+3}{x^2+x-2}\,dx.$ [C. U. '63]

14. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}.$ [C. U. '66] (সংকেত : $1+x^3=z^2$ ধর)

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+12}}$. [C. U. '62]

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

17.(i) $\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\, dx$. [C. U. '68] (ii) $\int \sqrt{\frac{a-x}{x}}\, dx$.

18. (i) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

[সংকেত : $1+\sqrt{x}=z$ ধর]

19. (i) $\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+a^2x^2}}$.

20. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2e^x+2}}\, dx$.

21. (i) $\int \sin^6 x \cos^3 x\, dx$. [C. U. '68]

(ii) $\int \sin^4 x \,.\, \cos^2 x\, dx$ (iii) $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^4 x}\, dx$.

22. $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)}\, dx$. 23. $\int \sqrt{2x-x^2}\, dx$.

24 $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\, dx$. 25. $\int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\, dx$.

26. $\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}\, dx$. 27. $\int \frac{1}{1+\sin 2x}\, dx$.

28. $\int \frac{\sec x}{a+b\tan x}\, dx$. [C. U. '43]

29. (i) $\int \frac{dx}{3+2\sin x}$. [C. U. '65] (ii) $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$.

30. (i) $\int \frac{dx}{4-5\sin^2 x}$. (ii) $\int \frac{dx}{4-5\cos^2 x}$

31. (i) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x+3\sin^2 x}$ (ii) $\int \frac{dx}{(4\cos x+3\sin x)^2}$

32. (i) $\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\, dx$. (ii) $\int \frac{\cos x+2\sin x}{3\cos x+4\sin x}\, dx$.

33. $\int \frac{6+3 \sin x+14 \cos x}{3+4 \sin x+5 \cos x}\, dx.$

[সংকেত : লব $= l$ (হর) $+ m$(হর)$' + n$ আকারে প্রকাশ কর]

34. (i) $\int \frac{dx}{4 \cos^3 x-3 \cos x}.$ (ii) $\int \frac{dx}{\cos 3x-\cos x}.$

35. (i) $\int \frac{\cos 3x}{\cos x}\, dx.$ (ii) $\int \frac{\cos x}{\cos 3x}\, dx.$

36. (i) $\int \frac{\sin 3x}{\sin x}\, dx.$ (ii) $\int \frac{\sin x}{\sin 3x}\, dx.$

37. দেখাও যে,

(i) $\int \frac{1}{1-\sin^4 x}\, dx = \frac{1}{2} \tan x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1}(\sqrt{2} \tan x)$

(ii) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}\, dx = 2\sqrt{\tan x}.$

(iii) $\int \tan^6 x\, dx = -\frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x - x.$

(iv) $\int \cot^5 x\, dx = -\frac{1}{4} \cot^4 x + \frac{1}{2} \cot^2 x + \log \sin x.$

38. দেখাও যে, $\int \sin \{\phi(x)\}\phi'(x) dx = -\cos \{\phi(x)\}$ এবং নিম্নলিখিত সমাকলগুলির মান লিখ :

(i) $\int \sin (\log x).\frac{1}{x}\, dx.$ (ii) $\int \sin (e^x).e^x\, dx.$

(iii) $\int \sin (xe^x).e^x(x+1)\, dx.$ (iv) $\int \sin (\tan x) \sec^2 x\, dx.$

39. যদি, $\int f(x)dx = g(x)$ হয়, তবে দেখাও যে,

$\int f\{\sin x\}. \cos x\, dx = g\{\sin x\}$ এবং নিম্নলিখিত সমাকলগুলির মান লিখ :

(i) $\int e^{\sin x}. \cos x\, dx.$ (ii) $\int \sin^5 x.\cos x\, dx.$

(iii) $\int \frac{1}{\sin^8 x}. \cos x\, dx.$ (iv) $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}. \cos x\, dx.$

(v) $\int \sin (\sin x) \cos x\, dx.$

40 সমাকলন কর : (i) $\int \frac{\cos x\, dx}{(1+\sin x)\sqrt{2+\sin x+\sin^2 x}}$

(ii) $\int \frac{e^x}{(2e^x+1)\sqrt{e^x+2}} dx.$

তৃতীয় অধ্যায়

অংশতঃ সমাকলনের পদ্ধতি

(Integration by Parts)

§ 3·1. এই অধ্যায়ে কোন চলের সাপেক্ষে ঐ চলের দুইটি অপেক্ষকের গুণফলের সমাকলন-পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে। সাধারণতঃ গুণফলের সমাকলন অংশতঃ সমাকলনের পদ্ধতির (Integration by Parts এর) সাহায্যে করা হয়।

উপপাদ্য। একই চল x-এর সকল মানের জন্য x-এর সাপেক্ষে ঐ চলের দুইটি অপেক্ষক u ও v-র অন্তরকলজ (ডিফারেন্সিয়াল গুণাঙ্ক) নির্ণয় সম্ভব হইলে,

$$\int u\frac{dv}{dx}dx=uv-\int v\frac{du}{dx}dx.$$

প্রমাণ। $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

সুতরাং সমাকলের সংজ্ঞানুসারে,

$$uv=\int\left(u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\right)dx$$

$$=\int u\frac{dv}{dx}dx+\int v\frac{du}{dx}dx.$$

বা, $\int u\frac{dv}{dx}dx=uv-\int v\frac{du}{dx}dx.$

উপরের উপপাদ্যে u এবং $\frac{dv}{dx}$ উভয়েই x-এর অপেক্ষক। মনে কর

$u=f(x)$ এবং $\frac{dv}{dx}=\phi(x)$.

যেহেতু $\frac{dv}{dx}=\phi(x)$, $\therefore$ $dv=\phi(x)dx$

বা, $\int dv=\int\phi(x)dx$, বা, $v=\int\phi(x)dx$

এবং $\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\{f(x)\}$

সুতরাং উপপাদ্যটি হইতে লেখা যায়,

$$\int f(x)\phi(x)dx=f(x)\int \phi(x)dx-\int\left[\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}\int\phi(x)dx\right]dx.$$

অর্থাৎ, দুইটি অপেক্ষকের গুণফলের সমাকল
=(প্রথম অপেক্ষক) × (দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল)
−{(প্রথম্ অপেক্ষকের ডিফারেন্সিয়াল গুণাঙ্ক)
× দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল }-এর সমাকল।
এই সূত্রটিকে অংশতঃ সমাকলনের সূত্র বলা হয়।

উদাহরণ 1. $\int x \sin x\, dx$

$$=\{x\int \sin x\, dx\}-\int\left[\left\{\frac{d}{dx}(x)\right\}\int\sin x\, dx\right]dx$$

$$=-x\cos x-\int\{(1)(-\cos x)\}dx$$

$$=-x\cos x+\int\cos x\, dx=-x\cos x+\sin x+c.$$

উদা. 2. $\int x^2 \cos x\, dx=x^2\int\cos x\, dx$

$$-\int\left[\left\{\frac{d}{dx}(x^2)\right\}\int\cos x\, dx\right]dx$$

$$=x^2\sin x-\int(2x).\sin x\, dx$$

$$=x^2\sin x-2\int x\sin x\, dx$$

$$=x^2\sin x-2(-x\cos x+\sin x+c)$$

[উদাহরণ (1) অনুযায়ী]

$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c'.$$

লক্ষ্য কর : $f(x)$ ও $\phi(x)$-এর যে কোনটিকে প্রথম অপেক্ষক মনে করা চলে। কিন্তু কোন্‌টিকে প্রথম অপেক্ষক আর কোন্‌টিকে দ্বিতীয় অপেক্ষক ধরিলে সমাকলন সহজ হয় তাহা পূর্বে নির্ণয় করা প্রয়োজন। উদাহরণ 1-এ, x-কে প্রথম অপেক্ষক এবং $\sin x$-কে দ্বিতীয় অপেক্ষক লওয়া হইয়াছে। এখানে $\int x\, dx$ ও $\int \sin x\, dx$ উভয়ই আদর্শ আকারের হওয়ায়, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই উহাদের সমাকলন নির্ণয়ে জটিলতা নাই। মনে কর, $\sin x$-কে প্রথম অপেক্ষক ধরা হইল। তাহা হইলে,

$$\int x\sin x\, dx=\sin x.\int x\, dx-\int\left\{\left(\frac{d}{dx}(\sin x)\int x\, dx\right)\right\}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\sin x-\int\frac{x^2}{2}\cos x\, dx \quad \cdots(\text{ক})$$

প্রদত্ত সমাকলে, সমাকল্য x ও একটি ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের গুণফল। $\sin x$-কে প্রথম অপেক্ষক ধরার ফলে (৫)-এ $\int \frac{x^2}{2} \cos x \ dx$ পাওয়া গেল এবং এখানে সমাকল্য একটি ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক এবং x-এর একটি ঘাতের গুণফল। বরঞ্চ $\int \frac{x^2}{2} \cos x \ dx$-এ x-এর ঘাত বাড়িয়া গেল এবং ফলে সমাকলন দীর্ঘতর হইবে। এখন যদি $\int \frac{x^2}{2} \cos x \ dx$-এর সমাকলনের জন্য $\cos x$-কে প্রথম অপেক্ষক লওয়া হয়, দেখিবে আবার $\int \frac{x^3}{6} \sin x \ dx$ নির্ণয়ের প্রয়োজন হইবে এবং সমাকলন সম্পূর্ণ হইবে না।

অতএব, $\int x \sin x \ dx$-এর সমাকলনের জন্য সর্বদা $\sin x$ বা $\cos x$-কে প্রথম অপেক্ষক ধরিলে সমাকলন কখনই সম্পূর্ণ হইবে না। সুতরাং দেখিতেছ যে কোন্ অপেক্ষকটিকে প্রথম অপেক্ষক এবং কোন্‌টিকে দ্বিতীয় অপেক্ষক ধরিবে তাহা সঠিক নির্বাচনের উপর সমাকলনের সফলতা নির্ভর করিতেছে। প্রথম অপেক্ষক নির্বাচনের কোন ধরাবাঁধা নিয়ম নাই। তবে সাধারণতঃ যে অপেক্ষকের সমাকল নির্ণয় সহজ নহে, তাহাকে প্রথম অপেক্ষক হিসাবে নির্বাচন করা সুবিধাজনক। $\int x \sin x \ dx$-এর ক্ষেত্রে উভয় অপেক্ষকেরই সমাকল নির্ণয় সহজ ; কিন্তু এক্ষেত্রে x-কে দ্বিতীয় অপেক্ষক ধরিলে সমাকলন জটিলতর হইতেছে। এই পদ্ধতিটি তখনই অনুসরণ করিবে, যখন দেখিবে যে, একটি অপেক্ষকের সমাকল নির্ণয় সহজ নহে। নীচে প্রথম অপেক্ষক নির্বাচনের কয়েকটি নিয়ম দেওয়া হইল। মনে রাখিবে এই নিয়মগুলির ব্যতিক্রম সম্ভব ; কিন্তু, প্রাথমিকস্তরে এই নিয়মগুলি কার্যকরী হইবে।

প্রথম অপেক্ষক নির্বাচনের নিয়ম :

সমাকল্যটি,

(1) বীজগাণিতিক ও ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের গুণফল হইলে, বীজগাণিতিক অপেক্ষকটিকে প্রথম অপেক্ষক হিসাবে লইবে।

(2) বীজগাণিতিক ও সূচক অপেক্ষকের গুণফল হইলে, বীজগাণিতিক অপেক্ষকটি প্রথম অপেক্ষক হিসাবে নির্বাচন করিবে।

(3) বীজগাণিতিক ও লগারিদমিক অপেক্ষকের গুণফল হইলে, লগারিদমিক অপেক্ষকটিকে প্রথম অপেক্ষক হিসাবে লইবে।

(4) বীজগাণিতিক ও বিপরীতবৃত্তীয় অপেক্ষকের গুণফল হইলে, বিপরীতবৃত্তীয় অপেক্ষকটিকে প্রথম অপেক্ষক ধরিবে।

(5) ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক ও সূচক অপেক্ষকের গুণফল হইলে, যে-কোনটিকে প্রথম অপেক্ষক হিসাবে নির্বাচন করিবে।

(6) অনেক সময় $\int f(x)\,dx$ আকারের সমাকলের সমাকলনের জন্য সমাকল্যকে $1.f(x)$ ধরা হয় এবং এই সকল ক্ষেত্রে $f(x)$-কে প্রথম অপেক্ষক হিসাবে লইবে।

উদা. 3. $\int x \sec^2 x\, dx = x \int \sec^2 x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x) \int \sec^2 x\, dx\right\}dx$

$= x \tan x - \int \tan x\, dx = x \tan x - \log(\sec x) + c.$

উদা. 4. $\int x^2 \cos^2 x\, dx = \int x^2\, \frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx$

$= \frac{1}{2}\left[\int x^2 dx + \int x^2 \cos 2x\, dx\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} + x^2\int \cos 2x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\int \cos 2x\, dx\right\}dx\right]$

$= \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2\, \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int 2x.\, \frac{\sin 2x}{2}\, dx$

$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 \sin 2x}{4} - \frac{1}{2}\int x \sin 2x\, dx$

$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 \sin 2x}{4} - \frac{1}{2}\left[x\int \sin 2x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(x\right)\int \sin 2x\, dx\right\}dx\right]$

$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 \sin 2x}{4} - \frac{1}{2}.x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + \frac{1}{2}\int\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx$

$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 \sin 2x}{4} + \frac{x \cos 2x}{4} - \frac{1}{2}.\frac{\sin 2x}{4}$

$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 \sin 2x}{4} + \frac{x \cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{8}.$

উদা. 5. $\int x^2 e^x dx = x^2\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(x^2\right).\int e^x dx\right\}dx$

$= x^2 e^x - \int 2x.e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx$

$= x^2 e^x - 2x.e^x + 2\int\left\{\frac{d}{dx}\left(x\right)\int e^x dx\right\}dx$

$= x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x = e^x(x^2 - 2x + 2),$

উদা. 6. $\int xe^{ax}dx = x.\int e^{ax}dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int e^{ax}dx\right\}dx$

$= x.\frac{e^{ax}}{a} - \int\frac{e^{ax}}{a}dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right).$

অনুশীলনী IIIA

সমাকলন কর (Integrate) :

1. $\int x^3 \sin x\, dx.$
2. $\int x^2 \sin 2x\, dx.$
3. $\int (x+5) \sec^2 x\, dx.$
4. $\int (x^2+3x) \cos^3 x\, dx.$
5. $\int xe^x\, dx.$
6. $\int (x^2-2)e^{2x}\, dx$

§ 3·2. **লগারিদ্‌মিক্ অপেক্ষকের সমাকল :—**

উদাহরণ 1. $\int \log x\, dx = \int 1.\log x\, dx$

$= \log x \int 1.dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)\int 1.dx\right\}dx = x \log x - \int\frac{1}{x}.x\, dx$

$= x \log x - \int dx = x \log x - x = x(\log x - 1).$

অনুসিদ্ধান্ত।

$\int \log x^n dx = \int n \log x\, dx = n\int \log x\, dx = nx(\log x - 1).$

উদা. 2. $\int (\log x)^2 dx = \int 1.(\log x)^2 dx$

$= (\log x)^2.\int 1.dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)^2\int 1\, dx\right\}dx$

$= x\{\log x\}^2 - \int\frac{2 \log x}{x}.x\ dx = x\{\log x\}^2 - 2\int \log x\, dx$

$= x(\log x)^2 - 2x(\log x - 1)$ [উদাহরণ 1 হইতে]

$= x\{(\log x)^2 - 2 \log x + 2\},$

উদা. 3. $\int x^2 \log x\, dx$

$= \log x.\int x^2 dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\log x).\int x^2 dx\right\}dx$

$= \frac{x^3}{3}\log x - \int\frac{1}{x}.\frac{x^3}{3}dx = \frac{x^3}{3}\log x - \int\frac{x^2}{3}dx$

$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{9}(3 \log x - 1).$

উদা. 4. $\int\log(x^2+7x+12)dx=\int\log\{(x+3)(x+4)\}dx$

$=\int\log(x+3)dx+\int\log(x+4)dx$

$=\int\log u\,du+\int\log v\,dv$ [$x+3=u$ ও $x+4=v$ ধরিয়া]

$=u(\log u-1)+v(\log v-1)$

$=(x+3)\{\log(x+3)-1\}+(x+4)\{\log(x+4)-1\}$

$=(x+3)\log(x+3)+(x+4)\log(x+4)-2x-7$

সুতরাং নির্ণেয় সমাকল

$=(x+3)\log(x+3)+(x+4)\log(x+4)-2x+c$

[কারণ -7 ধ্রুবক হওয়ায়, সমাকলন-ধ্রুবকের অন্তর্ভুক্ত হইবে।]

অনুশীলনী III B

সমাকলন কর (Integrate) :

1. $\int\log ax\,dx.$
2. $\int(\log x)^3\,dx.$
3. $\int x\log x\,dx.$
4. $\int\frac{\log x}{x^2}dx.$
5. $\int(1+x^2)\log x\,dx.$
6. $\int(2x^2-5x+2)\log x\,dx$
7. $\int\log(\sin x)\cos x\,dx.$

§ 3·3, বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের সমাকল নির্ণয় :

উদাহরণ 1. $\int\sin^{-1}x\,dx=\int1.\sin^{-1}x\,dx$

$=\sin^{-1}x.\int1.dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)\int1.dx\right\}dx$

$=x\sin^{-1}x-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x\,dx$

এক্ষণে, $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ নির্ণয়ের জন্য, মনে কর $1-x^2=t^2$

$\therefore\quad -2x\,dx=2t\,dt$ বা $x\,dx=-t\,dt$ এবং $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{t^2}=t$

$\therefore\quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{t\,dt}{t}=-\int dt=-t=-\sqrt{1-x^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাকল$=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}.$

অনুসিদ্ধান্ত। $\int\cos^{-1}x\,dx=\int\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x\right)dx$

$=\int\frac{\pi}{2}dx-\int\sin^{-1}x\,dx=\frac{\pi}{2}x-x\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$

$=\frac{\pi}{2}x-x\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x\right)-\sqrt{1-x^2}=x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}.$

উদা. 2. $\int\tan^{-1}x\,dx=\int 1.\tan^{-1}x\,dx$

$=\tan^{-1}x.\int 1.dx-\int\left\{\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)\int 1.dx\right\}dx$

$=x\tan^{-1}x-\int\frac{1}{1+x^2}x\,dx=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$

অনুসিদ্ধান্ত। $\int\cot^{-1}x\,dx$

$=\int\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)dx=\int\frac{\pi}{2}dx-\int\tan^{-1}x\,dx$

$=\frac{\pi}{2}x-\{x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\}$

$=\frac{\pi}{2}x-x\left(\frac{\pi}{2}-\cot^{-1}x\right)+\frac{1}{2}\log(1+x^2)$

$=x\cot^{-1}x+\frac{1}{2}\log(1+x^2).$

উদা. 3. $\int\sec^{-1}x.dx=\int 1.\sec^{-1}x.\,dx$

$=\sec^{-1}x.\int 1.dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x).\int 1\,dx\right\}dx$

$=x\sec^{-1}x-\int\left\{\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)\int 1.dx\right\}dx$

$=x\sec^{-1}x-\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}x\,dx=x\sec^{-1}x-\log(x+\sqrt{x^2-1}).$

অনুসিদ্ধান্ত। $\int\operatorname{cosec}^{-1}x\,dx=x\operatorname{cosec}^{-1}x+\log(x+\sqrt{x^2-1}).$

উদা. 4. $\int(\sin^{-1}x)^2dx=\int 1.(\sin^{-1}x)^2dx$

$=(\sin^{-1}x)^2\int 1.dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)^2\int 1.dx\right\}dx$

$=x(\sin^{-1}x)^2-\int\frac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}x\,dx$

$=x(\sin^{-1}x)^2-2\Big[\sin^{-1}x\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$-\int\left\{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\right\}dx\Big]$

$$x(\sin^{-1}x)^2+2[\sin^{-1}x.\sqrt{1-x^2}+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-\sqrt{1-x^2})dx]$$

$$=x(\sin^{-1}x)^2+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x-\int 2.dx$$

$$=x(\sin^{-1}x)^2+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x-2x.$$

উদা. 5. $\int\cos^{-1}\sqrt{x}\,dx=\int 1.\cos^{-1}\sqrt{x}\,dx$

$$=\cos^{-1}\sqrt{x}\int 1\,dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\cos^{-1}\sqrt{x})\int 1.dx\right\}dx$$

$$=x\cos^{-1}\sqrt{x}-\int-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}.x\,dx$$

$$=x\cos^{-1}\sqrt{x}+\tfrac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}}.$$

এক্ষণে, $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$ নির্ণয়ের জন্য মনে কর $x=\sin^2\theta$

$$\therefore\quad\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}}=\int\frac{\sin\theta\,2\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta}=\int 2\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=\int(1-\cos 2\theta)d\theta=\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}=\sin^{-1}\sqrt{x}-\frac{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}{2}$$

$$=\sin^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাকল $=x\cos^{-1}\sqrt{x}+\frac{\sin^{-1}\sqrt{x}}{2}-\frac{\sqrt{x-x^2}}{2}$

$$=x\cos^{-1}\sqrt{x}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\sqrt{x}\right)-\frac{\sqrt{x-x^2}}{2}$$

$$=(x-\tfrac{1}{2})\cos^{-1}\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x-x^2}}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\quad\int\cos^{-1}\sqrt{x}\,dx=(x-\tfrac{1}{2})\cos^{-1}\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x-x^2}}{2}+c$$

উদা. 6. $\int\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx=\int\sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right).\sec^2\theta\,d\theta,$

[$x=\tan\theta$ ধরিয়া $dx=\sec^2\theta\,d\theta$]

$$=\int\sin^{-1}(\sin 2\theta).\sec^2\theta\,d\theta=2\int\theta\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=2[\theta\tan\theta-\int 1.\tan\theta\,d\theta]=2(\theta\tan\theta-\log\sec\theta)+c$$

$$=2(x\tan^{-1}x-\log\sqrt{1+x^2})+c.$$

অনুশীলনী IIIC

সমাকলন কর (Integrate) :

1. $\int \tan^{-1} ax.dx.$ 2. $\int \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}).dx$

3. $\int \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\,dx.$ 4. $\int \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx.$

5. $\int \sin^{-1}\sqrt{x}\,dx.$ 6. $\int (\sin^{-1}x)^3\,dx.$

7. $\int \cos^{-1}x\,dx.$ ($\int \sin^{-1}x\,dx$ নির্ণয় না করিয়া]

8. $\int \cot^{-1}x\,dx.$ [$\int \tan^{-1}x\,dx$ নির্ণয় না করিয়া]

9. $\int \text{cosec}^{-1}x\,dx.$ [$\int \sec^{-1}x\,dx$ নির্ণয় না করিয়া]

10. $\int \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ [$\int \sec^{-1}x\,dx$ নির্ণয় না করিয়া].

§ 3·4. আদর্শ আকার

$\int e^{ax}\cos bx\,dx$ ও $\int e^{ax}\sin bx\,dx.$

মনে কর, $\int e^{ax}\cos bx\,dx = I_1$ ও $\int e^{ax}\sin bx\,dx = I_2$

$$\therefore\quad I_1 = e^{ax}\cos bx\,dx.$$

$$= e^{ax}.\int \cos bx\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(e^{ax})\int \cos bx\,dx\right\}dx.$$

$$= e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \int ae^{ax}\frac{\sin bx}{b}$$

$$\frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx \qquad \cdots(1)$$

$$= \frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}I_2 \quad \cdots(\alpha)$$

অনুরূপে, $I_2 = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \int ae^{ax}\frac{\cos bx}{b}$

$$= -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx \qquad \cdots(2)$$

$$= \frac{a}{b}I_1 - \frac{e^{ax}\cos bx}{b} \qquad \cdots(\beta)$$

(α) হইতে পক্ষান্তর করিয়া পাই,

$$b\,I_1 + a\,I_2 = e^{ax}\sin bx \qquad \cdots(3)$$

এবং (β) হইতে পক্ষান্তর করিয়া পাই

$$a\,I_1 - b\,I_2 = e^{ax}\cos bx \qquad \cdots(4)$$

$(3)\times b+(4)\times a$ করিয়া পাই

$$(a^2+b^2)\ I_1=e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)$$

বা, $I_1=\dfrac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}$ ...(5)

আবার $(3)\times a-(4)\times b$ করিয়া পাই

$(a^2+b^2)\ I_2=e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)$

বা, $I_2=\dfrac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$ ....(6)

বিকল্প পদ্ধতি :

প্রথম পদ্ধতিতে একই সঙ্গে I_1 ও I_2 নির্ণয় করা হইয়াছে। I_1 ও I_2কে পৃথক্‌ভাবেও নির্ণয় করা যায়।

$$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}I_1$$

বা, $\left(1+\dfrac{a^2}{b^2}\right)I_1=\dfrac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{b^2}$

বা, $I_1=\dfrac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}$

অনুরূপে $I_2=\dfrac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$

এক্ষণে, মনে কর $a=r\cos\theta$ এবং $b=r\sin\theta$.

$\therefore\quad a^2+b^2=r^2$ বা $r=\sqrt{a^2+b^2}$ এবং $\theta=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$

$\therefore\quad (a^2+b^2)\ I_1=e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)$

$$=\frac{e^{ax}(r\cos\theta\cos bx+r\sin\theta\sin bx)}{r^2}$$

$$=\frac{e^{ax}}{r}\cos(bx-\theta)=\frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(bx-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right).$$

অনুরূপে $I_2=\dfrac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(bx-\tan^{-1}\dfrac{b}{a}\right).$

$$\therefore\quad \int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(bx-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

এবং $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$

$$=\frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(bx-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right).$$

আকার দুইটিকে আদর্শ আকার রূপে মনে রাখিবে।

উদাহরণ 1. $\int e^x\sin x\,dx=\dfrac{e^x}{\sqrt{2}}\sin(x-\tan^{-1}1)$

[এখানে $a=b=1$]

$$=\frac{e^x}{\sqrt{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{e^x}{\sqrt{2}}\left\{\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$=\frac{e^x}{2}\left(\sin x-\cos x\right)\quad\left[\because\quad \sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.\right]$$

উদা. 2. $\int e^x\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int e^x(1+\cos 2x)\,dx.$

$=\frac{1}{2}\int e^x\,dx+\frac{1}{2}\int e^x\cos 2x\,dx.$

$=\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{1}{2}\,\dfrac{e^x(\cos 2x+2\sin 2x)}{1+4}$

$=\frac{1}{2}e^x\{1+\frac{1}{5}\cos 2x+2\sin 2x)\}.$

অনুশীলনী IIID.

সমাকলন কর (Integrate):

1. $\int e^x\cos x\,dx.$
2. $\int e^x\cos ax\,dx.$
3. $\int e^x\sin^2 x\,dx.$
4. $\int e^x\sin 3x\cos x\,dx.$
5. $\int e^{2x}\cos^3 x\,dx$
5. $\int e^{2x}\sin^3 x\,dx.$

§ 35. $\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx.$

$\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx=\int e^x f(x)dx+\int e^x f'(x)dx.$

$=f(x)e^x-\int f'(x)e^x\,dx+\int c^x f'(x)\,dx$ [অংশতঃ সমাকলনের পদ্ধতি দ্বারা $\int e^x f(x)dx$-এর সমাকল নির্ণয় করিয়া]

$=f(x)e^x.$

উদাহরণ 1. $\int e^x(\sin x+\cos x)dx=\int e^x\sin x\, dx+\int e^x \cos x\, dx$
$=\sin x.e^x-\int\cos x.e^x\, dx+\int e^x \cos x\, dx=\sin x.e^x$.

উদা. 2. $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx$ [C. U. '30, '33, '37, '48 ; Punjab '52, '54, '54; Agra '55, '58; Allahabad '55]

$$\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{x+1-1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

এক্ষণে, মনে কর $\frac{1}{(x+1)}=f(x)$, $\therefore\ f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx=e^xf(x)=\frac{e^x}{x+1}$.

উদা. 3. $\int e^x\left(\log x+\frac{1}{x}\right)dx$.

এখানে $\frac{d}{dx}\left(\log x\right)=\frac{1}{x}$ $\therefore$ $\int e^x\left(\log x+\frac{1}{x}\right) dx=e^x \log x$.

অনুশীলনী III (E)

সমাকলন কর (Integrate) :—

1. $\int e^x(\cos x-\sin x)\, dx$. 2. $\int e^x(\tan x+\sec^2x)\, dx$. [C. U. '63]

3. $\int e^x\sec x(1+\tan x)dx$. 4. $\int e^x(x^2+2x)\, dx$.

5. $\int e^x\left(\tan^{-1} x+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$.

6. $\int e^x (\log \sin x+\cot x)\, dx$. 7. $\int e^x.\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\, dx$.

§ 36. আদর্শ আকার :

(i) $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx$ (ii) $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx$ (iii) $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$.

(i) $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx=\int 1.\sqrt{x^2+a^2}\, dx$

$$=\sqrt{x^2+a^2}.x-\int\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}.x\, dx$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\, dx$$
$$+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

বা, $2\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \log(x+\sqrt{x^2+a^2})$

(পক্ষান্তর করিয়া)

$$\therefore \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2}).$$

দ্রষ্টব্য : নিম্নে $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ নির্ণয়ের জন্য প্রদর্শিত পদ্ধতিতেও এই সমাকলটি নির্ণয় করা যায়। আবার উপরের পদ্ধতিতেও $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ নির্ণয় করিতে পার।

(ii) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int 1.\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}\,x\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx \quad \cdots (1)$$

আবার $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$

$$= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx \quad \cdots\cdots (2)$$

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই,

$$2\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\log(x+\sqrt{x^2-a^2})$$

$$\therefore \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2-a^2}).$$

(iii) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int 1.\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\,x\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

পক্ষান্তর করিয়া,

$$2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\therefore\quad \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}.$$

দ্রষ্টব্য : $x=a\sin\theta$ ধরিয়াও সহজেই সমাকলটি নির্ণয় করা যায়। তোমরা এই পদ্ধতিতে সমাকলটি নির্ণয় কর।

উদা. 1. $\int\sqrt{x^2+3}\,dx=\frac{x\sqrt{x^2+3}}{2}+\frac{3}{2}\log(x+\sqrt{x^2+3}).$

উদা. 2. $\int\sqrt{x^2-16}\,dx=\frac{x\sqrt{x^2-16}}{2}-8\log(x+\sqrt{x^2-16}).$

উদা. 3. $\int\sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx=\frac{1}{b}\int\sqrt{a^2-t^2}\,dt$

[$bx=t$ (মনে কর) $\therefore\quad b\,dx=dt$]

$$=\frac{1}{b}\left\{\frac{t\sqrt{a^2-t^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{t}{a}\right\}$$

$$=\frac{1}{b}\left\{\frac{bx\sqrt{a^2-b^2x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{bx}{a}\right\}.$$

|. 4 $\int\sec^3x\,dx.$ মনে কর $\tan x=t.$ $\therefore\quad \sec^2x\,dx=dt$

এবং $\sec x=\sqrt{1+\tan^2x}=\sqrt{1+t^2}$

$$\therefore\quad \int\sec^3x\,dx=\int\sec x\sec^2x\,dx=\int\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$=\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2}+\frac{1}{2}\log(t+\sqrt{1+t^2})$$

$$=\frac{\tan x\sec x}{2}+\frac{1}{2}\log(\sec x+\tan x).$$

উদা. 5. $\int(x-1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx.$

এখানে $\frac{d}{dx}(x^2+x+1)=2x+1$

একণে $(x-1)\sqrt{x^2+x+1}$

$$=\frac{1}{2}(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\sqrt{x^2+x+1}$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{2}\int(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$

$$-\frac{3}{2}\int\sqrt{x^2+x+1}\,dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{3}{2}\int\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\tfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3(x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+x+1}}{4}$$
$$-\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{3}{8}\log(x+\tfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})+c$$

$$=\tfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{3}{8}(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}$$
$$-\tfrac{9}{16}\log(x+\tfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})+c.$$

[দ্রষ্টব্য : উপরে $\sqrt{x^2+x+1}$কে $\frac{1}{2}(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}$ $-\frac{3}{2}\sqrt{x^2+x+1}$ আকারে পরিণত করিবার জন্য সরাসরি মনে কর, $x-1=\alpha(2x+1)+\beta$, $\therefore$ $\alpha=\frac{1}{2}$ এবং $\alpha+\beta=-1$ বা $\beta=-\frac{3}{2}$].

উদা. 6. $\int\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\,dx.$ $[\alpha<x<\beta]$

$$=\int\sqrt{-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta}\,dx$$

$$=\int\sqrt{\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2-\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}{2}+\frac{\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-\frac{\alpha+\beta}{2}}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$=\tfrac{1}{4}\Big\{(2x-\alpha-\beta)\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}+\frac{(\beta-\alpha)^2}{8}\sin^{-1}\frac{2x-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\Big\}.$$

বিকল্প প্রণালী : মনে কর $x=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta$

$\therefore\ dx=(\beta-\alpha)\sin 2\theta\,d\theta$

$x-\alpha=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta-\alpha=(\beta-\alpha)\sin^2\theta$

$\beta-x=\beta-\alpha\cos^2\theta-\beta\sin^2\theta=(\beta-\alpha)\cos^2\theta.$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int\sqrt{(\beta-\alpha)\sin^2\theta\,(\beta-\alpha)\cos^2\theta}$
$(\beta-\alpha)\sin 2\theta\,d\theta$

$$=\int\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^2\sin^2 2\theta\,d\theta$$
$$=\tfrac{1}{4}(\beta-\alpha)^2\int(1-\cos 4\theta)\,d\theta$$
$$=\tfrac{1}{4}(\beta-\alpha)^2\theta-\tfrac{1}{16}(\beta-\alpha)^2\sin 4\theta.$$

এক্ষণে, $x-\alpha=(\beta-\alpha)\sin^2\theta$, $\therefore$ $\sin\theta=\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}$,

আবার $\sin 4\theta=4\sin\theta\cos\theta.\cos 2\theta$

$$=4\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$=4\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}\sqrt{1-\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}\left\{\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}-\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right\}$$

$$=4\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}\sqrt{\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}}.\frac{\alpha+\beta-2x}{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{4}{(\beta-\alpha)^2}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}(\alpha+\beta-2x)$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}$

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}(\alpha+\beta-2x).$$

অনুশীলনী III F

সমাকলন কর (Integrate):

1 $\int\sqrt{x^2+9}\,dx.$ 2. $\int\sqrt{16-9x^2}\,dx$

3. $\int\sqrt{1-a^2x^2}\,dx.$ 4. $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$

5. $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ 6. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

7. $\int\sqrt{4-3x-2x^2}\,dx.$ 8. $\int\sqrt{5-2x+x^2}\,dx.$

[C. U. '66]

উদাহরণমালা 3

উদা. 1. সমাকলন কর : $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx.$ [C. U. '75]

$$\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\left(\frac{x}{1+\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx$$

$$=\int\left(x.\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int x\sec^2\frac{x}{2}\,dx+\int\tan\frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x.\int\sec^2\frac{x}{2}\,dx-\int\left(\frac{1}{2}.1.\int\sec^2\frac{x}{2}dx\right)dx+\int\tan\frac{x}{2}\,dx$$

[প্রথম সমাকলটির অংশতঃ সমাকলন করিয়া]

$=\frac{1}{2}x.\,2\tan\frac{x}{2}-\int\tan\,{}^{x}dx+\int\tan\frac{x}{2}\,dx$

$=x\tan\frac{x}{2}+c.$

উদা. 2. মান নির্ণয় কর : $\int e^{x}\log(e^{2x}+3e^{x}+2)\,dx.$

মনে কর $e^{x}=z \quad \therefore \quad e^{x}dx=dz.$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int\log(z^{2}+3z+2)\,dz$

$=\int\log(z+1)(z+2)\,dz$

$=\int\log(z+1)\,dz+\int\log(z+2)\,dz.$

এক্ষণে, $\int\log(z+1)\,dz=z.\log(z+1)-\int\frac{z}{z+1}\,dz$

$=z\log(z+1)-\int dz+\int\frac{dz}{z+1}$

$=z\log(z+1)-z+\log(z+1).$

অনুরূপে $\int\log(z+2)\,dz=z\log(z+2)-z+2\log(z+2).$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল

$=z\log(z+1)+z\log(z+2)-2z+\log(z+1)+\log(z+2)^{2}$

$=z\log(z^{2}+3z+2)-2z+\log\{(z+1)(z+2)^{2}\}$

$=e^{x}\log(e^{2x}+3e^{x}+2)-2e^{x}+\log\{(e^{x}+1)(e^{2x}+4e^{x}+4)\}.$

উদা. 3. সমাকলন কর : $\int\cos x\sqrt{\sin^{2}x-4\sin x+5}\,dx.$

মনে কর, $\sin x=z, \quad \therefore \quad \cos x\,dx=dz.$

$\therefore \quad \int\cos x\sqrt{\sin^{2}x-4\sin x+5}\,dx,$

$=\int\sqrt{z^{2}-4z+5}\,dz=\int\sqrt{(z-2)^{2}+1}\,dz$

$=\frac{1}{2}(z-2)\sqrt{(z-2)^{2}+1}+\frac{1}{2}\log(z-2+\sqrt{(z-2)^{2}+1})+c$

$=\frac{1}{2}(\sin x-2)\sqrt{\sin^{2}x-4\sin x+5}$

$+\frac{1}{2}\log(\sin x-2+\sqrt{\sin^{2}x-4\sin^{2}x+5})+c.$

উদা. 4. সমাকলন কর : $\int 2^{x}\sin 3x\,dx.$

$\int 2^{x}\sin 3x\,dx=\int e^{x\log 2}\sin 3x\,dx.$

[কারণ $2^{x}=e^{\log 2^{x}}=e^{x\log 2}$]

$$\frac{e^{x\log 2}}{(\log 2)^2+3^2}\{\log 2\sin 3x-3\cos 3x\}+c$$

[$\int e^{ax}\sin bx$ সূত্রে $a=\log 2$, $b=3$ ধরিয়া]

$$=\frac{2^x}{9+(\log 2)^2}\{\log 2\sin 3x-3\cos 3x\}+c.$$

উদা. 5. সমাকলন কর : $\int x(\sin^{-1}x)^2dx.$

$$\int x(\sin^{-1}x)^2dx=\int\theta^2\sin\theta.\cos\theta\, d\theta,$$

[$\sin^{-1}x=\theta$ ধরিয়া পাই, $x=\sin\theta$, $\cos\theta\, d\theta=dx$]

$$=\tfrac{1}{2}[\int\theta^2\sin 2\theta\, d\theta]$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\theta^2\frac{-\cos 2\theta}{2}-\int 2\theta\frac{-\cos 2\theta}{2}d\theta\right]$$

$$=-\frac{\theta^2}{4}\cos 2\theta+\tfrac{1}{2}\int\theta\cos 2\theta\, d\theta$$

$$=-\tfrac{1}{4}\theta^2\cos 2\theta+\tfrac{1}{2}\left\{\theta.\frac{\sin 2\theta}{2}-\int 1.\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta\right\}$$

$$=-\tfrac{1}{4}\theta^2\cos 2\theta+\tfrac{1}{4}\theta\sin 2\theta+\frac{\cos 2\theta}{4}+c$$

$$=\tfrac{1}{4}\{(1-2\sin^2\theta).\theta^2+2\sin\theta.\cos\theta.\theta+1-2\sin^2\theta\}+c$$

$$=\tfrac{1}{4}\{(1-2x^2)(\sin^{-1}x)^2+2x\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x-2x^2\}+c.'$$

উদা. 6. সমাকলন কর : $\int\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2}dx,$ [C. U.]

$$=\int\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2}dx,\ [z=\tan^{-1}x \text{ ধরিয়া পাই, } dz=\frac{1}{1+x^2}dx]$$

$$=\int\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{1+x^2}.\frac{dx}{1+x^2}=\int\frac{e^{mz}}{1+\tan^2z}dz$$

$$=\int\cos^2z.e^{mz}dz=\int\frac{1+\cos 2z}{2}e^{mz}\,dz$$

$$=\tfrac{1}{2}\int e^{mz}dz+\tfrac{1}{2}\int e^{mz}.\cos 2z\,dz$$

$$=\tfrac{1}{2}\frac{e^{mz}}{m}+\tfrac{1}{2}\frac{e^{mz}}{m^2+2^2}(m\cos 2z+2\sin 2z)+c$$

$$=\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{2m}\left\{1+\frac{m}{m^2+4}\left(m\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{4x}{1+x^2}\right)\right\}+c.$$

উদা. 7. সমাকলন কর : $\int\left\{\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right\}dx.$

$$\int\left\{\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right\}dx=\int\frac{1}{\log x}dx-\int\frac{1}{(\log x)^2}dx$$

$$=x.\frac{1}{\log x}-\int x.\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\log x}\right)dx-\int\frac{1}{(\log x)^2}dx$$

[প্রথম সমাকলটিকে অংশতঃ সমাকলন করিয়া]

$$=\frac{x}{\log x}-\int x.\frac{-1}{(\log x)^2}.\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{(\log x)^2}dx$$

$$=\frac{x}{\log x}+\int\frac{1}{(\log x)^2}dx-\int\frac{1}{(\log x)^2}dx$$

$$=\frac{x}{\log x}+c.$$

উদা. 8. সমাকলন কর : $\int\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}dx.$

$$\int\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}dx$$

মনে কর, $\frac{x}{x+a}=\sin^2\theta \quad \therefore \quad x=a\tan^2\theta.$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int\sin^{-1}(\sin\theta)d(a\tan^2\theta)$

$=a\int\theta.d(\tan^2\theta)=a[\theta\tan^2\theta-\int 1.\tan^2\theta\, d\theta]$

$=a[\theta\tan^2\theta-\int(\sec^2\theta-1)d\theta].$

$=a[\theta\tan^2\theta-\tan\theta+\theta]+c$

$$=a\left[\frac{x}{a}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{x}{a}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\right]+c'$$

$$=(x+a)\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{ax}+c.$$

উদা. 9. সমাকলন কর : $\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}dx.$

$$\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}dx=\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}-x}{x^2+a^2-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx-\frac{1}{a^2}\int x dx$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{x^2}{2}\right]+c.$$

উদা. 10. সমাকলন কর : $\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$,

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{dx}{\{(x+1)^2+2\}^2},$$ [মনে কর $x+1=\sqrt{2}\tan\theta$ $\therefore\ dx=\sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta$]

$$=\int\frac{\sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta}{(2\tan^2\theta+2)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^4\theta}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{2}(x+1)}{2+(x+1)^2}\right]+c.$$

উদা. 11. সমাকলন কর : $\int xe^x\sin x\,dx$.

$$\int xe^x\sin x\,dx=x\int e^x\sin x-\int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int e^x\sin x\,dx\right\}dx$$

$$=x.\frac{e^x}{2}\left(\sin x-\cos x\right)dx-\int 1.\frac{e^x}{2}\left(\sin x-\cos x\right)dx$$

$$=\tfrac{1}{2}xe^x(\sin x-\cos x)-\tfrac{1}{2}(-e^x\cos x)+c$$

[$f(x)=-\cos x$ হইলে, $f'(x)=\sin x$]

$$=\tfrac{1}{2}e^x.\{x(\sin x-\cos x)+\cos x\}+c.$$

উদা 12. $I_n=\int\sin^n x\,dx$ হইলে দেখাও যে,

$$I_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

উপরোক্ত সূত্রের সাহায্যে $\int\sin^5 x\,dx$-এর মান বাহির কর।

$$I_n=\int\sin^n x\,dx=\int\sin^{n-1}x.\sin x\,dx$$

$$=\sin^{n-1}x\int\sin x\,dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\sin^{n-1}x)\int\sin x\,dx\right\}dx$$

$$=\sin^{n-1}x(-\cos x)-\int(n-1)\sin^{n-2}x.\cos x(-\cos x)dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x.(1-\sin^2x)dx$$

$$=-\sin^{n-1}.\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int\sin^n x\,dx$$

$$=-\sin^{n-1}x.\cos x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.$$

পক্ষান্তর করিয়া,

$$I_n+(n-1)I_n=-\sin^{n-1}x.\cos x+(n-1)I_{n-2}$$

$$\therefore \quad I_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x.\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

এখন $\int\sin^5 x\,dx=I_5=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x+\frac{4}{5}I_3,$

[উপরোক্ত সূত্রে $n=5$ লইয়া]

$$=-\tfrac{1}{5}\sin^4 x.\cos x+\tfrac{4}{5}\{-\tfrac{1}{3}\sin^2 x.\cos x+\tfrac{2}{3}I_1\}$$
$$=-\tfrac{1}{5}\sin^4 x\cos x-\tfrac{4}{15}\sin^2 x.\cos x+\tfrac{8}{15}\int\sin x\,dx$$
$$=-\tfrac{1}{5}\sin^4 x\cos x-\tfrac{4}{15}\sin^2 x\cos x-\tfrac{8}{15}\cos x+c.$$

প্রশ্নমালা 3

সমাকলন কর (Integrate) :

1. (i) $\int\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$ (ii) $\int\frac{x+\cos x}{1-\sin x}dx$

2. (i) $\int\frac{1-\cos x}{x-\sin x}dx$ (ii) $\int\frac{x-\sin x}{1-\cos x}dx$

3 (i) $\int\frac{x}{1+\cos x}dx$ (ii) $\int\frac{x}{1+\sin x}dx$

(iii) $\int\frac{x}{1-\cos x}dx.$ (iv) $\int\frac{x}{1-\sin x}dx$

(v) $\int\frac{x(1+\sin x)}{\cos^2 x}dx.$

4. (i) $\int e^x\sqrt{(e^{2x}-3e^x+1)}\,dx$

(ii) $\int\frac{\sqrt{1-2e^x+2e^{2x}}}{e^{2x}}dx$ (iii) $\int x^2\sqrt{(x^6+x^3+1)}dx$

(iv) $\int(x+a)(x^2+b^2)\,dx$ [C.U. '66] (v) $\int\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x^3}dx$

5. (i) $\int 3^x\cos 4x\,dx$ (ii) $\int e^{2x}\sin x\cos x\,dx$ [C.U. '74]

(iii) $\int e^x\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx$ [C.U. '64]

(iv) $\int e^{mx}\sin^3 x\,dx$ (v) $\int e^{-2x}\cos\frac{1}{2}x\,dx.$

6. (i) $\int x(\tan^{-1}x)^2dx$ (ii) $\int x^2\tan^{-1}x\,dx$

7. (i) $\int\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$ (ii) $\int\frac{e^{2\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^{5/2}}$

(iii) $\int \frac{xe^{\sin^{-1}x}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$ (iv) $\int \frac{x^3 e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-\ ^{\circ}}} dx$

8. (i) $\int \frac{\sin^{-1}x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$ (ii) $\int \frac{x^2\sin^{-1}x}{(1-x^2)^{5/2}}dx.$

9. (i) $\int\left\{\frac{1}{(\log x)^2}-\frac{2}{(\log x)^3}\right\}dx$

(ii) $\int\left\{\frac{1}{(\log x)^n}-\frac{n}{(\log x)^{n+1}}\right\}dx$

(iii)) $\int\left\{\log(\log x)+\frac{1}{(\log x)^2}\right\}dx$

10. (i) $\int\sin^{-1}(3x-4x^3)\,dx$ (ii) $\int\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\,dx$

(iii) $\int\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$ (iv) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

11. (i) $\int\sqrt{\frac{x}{a+x}}dx$ (ii) $\int\sqrt{\frac{x+a}{x}}\,dx$

(iii) $\int\sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx$ (iv) $\int\sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx$ [C. U. '62]

12. (i) $\int\frac{1}{x^2}(\tan^{-1} x)\,dx$ (ii) $\int x^6 \sin^{-1} x\,dx$

13. দেখাও যে, $\int\cos^n x\,dx=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$

উপরোক্ত সূত্র হইতে $\int\cos^6 x\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

14. প্রমাণ কর : $\int\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}=\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}.$

সমাকলন কর :—

15. $\int e^x(\tan x-\log\cos x)\,dx.$ [C. U. '64]

16. $\int\frac{\log\sqrt{x}}{3x}dx.$ [C. U. '64]

17. $\int e^x(1+x)\log(xe^x)\,dx.$ [C. U. '63]

18. $\int e^x(\tan x+\sec^2 x)\,dx.$ [C. U. '63]

19. $\int\log(x+\sqrt{x^2+a^2})dx.$ 20. $\int x\log(x+\sqrt{x^2+a^2})dx.$

21. $\int\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}dx$

22. (i) $\int\log(1+x)dx,$ (ii) $\int x^2\log x\,dx.$

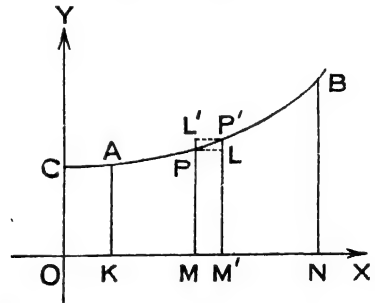
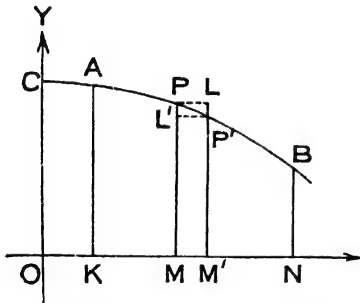
23. $\int\tan^{-1}\sqrt{x}\,dx.$

চতুর্থ অধ্যায়
নিশ্চিত সমাকল
(Definite Integral)

§ 4·1. ক্ষেত্রফল ও নিশ্চিত সমাকল (Area and Definite Integral) :

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে ঋজুরেখ ক্ষেত্র বা সরলরেখা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় তোমরা ইতিপূর্বে শিখিয়াছ।

কিন্তু বক্ররেখা বেষ্টিত ক্ষেত্র যেমন বৃত্ত, অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত ইত্যাদি, অথবা বক্ররেখা ও সরলরেখা বেষ্টিত ক্ষেত্র যেমন বৃত্তাংশ, $y^2=x$ অধিবৃত্তের, x-অক্ষ ও $x=2$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল জ্যামিতিক পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায় না। এই সকল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সমাকলন প্রক্রিয়ার সাহায্যে করা হয়। প্রকৃতপক্ষে বক্ররেখা পরিবেষ্টিত সুষম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের প্রচেষ্টা হইতেই সমাকলন বিদ্যার উৎপত্তি।

মনে কর $0 \leqslant x \leqslant b$ বিস্তারে $f(x)$ অপেক্ষকটি সন্তত এবং CAB বক্রটি অপেক্ষকটির লেখ। যেহেতু অপেক্ষকটি প্রদত্ত বিস্তারে সন্তত, সুতরাং

অপেক্ষকটির CAB অংশ অবিচ্ছিন্ন। মনে কর বক্রটি y অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

মনে কর P(x, y) বক্রটির এরূপ একটি বিন্দু যে $0<x<b$. P হইতে x-অক্ষের উপর PM লম্ব।

মনে কর COMP ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল A. অর্থাৎ x-অক্ষ, $\overline{\text{PM}}$ এবং $y=f(x)$ বক্রের দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল A.

মনে কর $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ বিন্দুটি P বিন্দুর অত্যন্ত নিকটবর্তী একটি বিন্দু এবং P′M′, x-অক্ষের উপর লম্ব।

সুতরাং $MM'=\Delta x$, $P'M'=y+\Delta y$.

মনে কর COM′P′ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=A+\Delta A$.

∴ PMM′P′ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\Delta A$.

P হইতে PL, P′M′-এর উপর এবং P′ হইতে P′L′, PM-এর উপর লম্ব অঙ্কন কর।

একণে, PMM′L আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=y.\Delta x$

এবং L′MM′P′ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=(y+\Delta y).\ \Delta x$.

সুতরাং চিত্র (i)এ, $y.\Delta x>\Delta A>(y+\Delta y).\Delta x$

বা, $y>\dfrac{\Delta A}{\Delta x}>y+\Delta y \quad \cdots (1)$

একণে, যেহেতু $f(x)$, $0\leqslant x\leqslant b$ বিস্তারে সন্তত,

∴ $\Delta x\to 0$ হইলে $\Delta y\to 0$ হইবে

সুতরাং (1) হইতে পাই, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta A}{\Delta x}=y$

বা, $\dfrac{dA}{dx}=y=f(x)$.

আবার চিত্র (ii)-এ, $y<\dfrac{\Delta A}{\Delta x}<y+\Delta y \quad \cdots (2)$

সুতরাং পূর্বের ন্যায় আমরা পাই, $\dfrac{dA}{dx}=y=f(x)$.

সুতরাং উভয়ক্ষেত্রেই $\dfrac{dA}{dx}=f(x) \quad \cdots (3)$

∴ অনিশ্চিত সমাকলের সংজ্ঞা হইতে $A=\int f(x)dx+c \cdots (4)$

(c একটি সমাকলন-ধ্রুবক)

সুতরাং $F(x)$ যদি x-এর এরূপ একটি অপেক্ষক হয় যে, $F'(x)=f(x)$,

বা $F(x)=\int f(x)\, dx$, [$F(x)$-এ কোন সমাকলন ধ্রুবক নাই]

তবে $A=F(x)+c \quad \cdots (5)$

একণে, যখন P বিন্দুটি C-র উপর সমাপতিত হয়, তখন PM, y-অক্ষে অর্থাৎ OC-র উপর সমাপতিত হয় এবং তখন $x=0$ ও $A=0$.

∴ (5) হইতে পাই, $0=F(0)+c \quad \cdots (6)$

(5) হইতে (6) বিয়োগ করিয়া পাই, $A=F(x)-F(0) \quad \cdots (7)$

এক্ষণে যদি A{(a, $f(a)$} এবং B{(b, $f(b)$} বক্রের দুইটি বিন্দু এবং $a<b$ হয়, তবে উপরের (7)এর স্থলে $x=a$ ও b বসাইয়া যথাক্রমে পাই,

OKAC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= F(a)-F(0)$ $\cdots(8)$

এবং ONBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= F(b)-F(0)$ $\cdots(9)$

(9) হইতে (8) বিয়োগ করিয়া পাই,

AKNB ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= F(b)-F(a)$.

সুতরাং x-অক্ষ, $y=f(x)$ বক্র এবং $x=a$ ও $x=b$ কোটিদ্বয়ের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $F(b)-F(a)$, যেখানে $F'(x)=f(x)$

অর্থাৎ $\int f(x)dx$কে $F(x)$ আকারে নির্ণয় করিয়া $F(b)$ হইতে $F(a)$ বিয়োগ করিলে x-অক্ষ, $y=f(x)$ বক্র এবং $x=a$ ও $x=b$ [যেখানে $a\leqslant x\leqslant b$ বিস্তারে $y=f(x)$ অপেক্ষকটি সন্তত] দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়।

$F(b)-F(a)$কে সমাকলন বিদ্যায় $\int_a^b f(x)\,dx$-এর মান বলা হয় এবং $\int_a^b f(x)\,dx$ বা $F(b)-F(a)$কে $f(x)$ এর x-এর সাপেক্ষে a হইতে b-এর মধ্যে **নিশ্চিতসমাকল** (the definite integral) বলা হয়। a-কে x-এর **নিম্ন-সীমা** (lower limit) এবং b কে x-এর **ঊর্ধ্ব-সীমা** (upper limit) বলে।

দ্রষ্টব্য 1. উপরের আলোচনায় $y=f(x)$ বক্রটিকে x-অক্ষের উপরদিকে অর্থাৎ y-কে ধনাত্মক ধরা হইয়াছে, যদি বক্রটি x-অক্ষের নীচের দিকে অবস্থিত হয়, তবে ক্ষেত্রফলটির ঋণাত্মক মান পাওয়া যাইবে। যদি কোন ক্ষেত্রফল বা নিশ্চিত সমাকলের মান শূন্য হয়, তবে x-অক্ষের উপর ও নীচের দিকের অংশ দুইটির ক্ষেত্রফলদ্বয়ের সাংখ্যমান সমান হইবে।

2. কোন অপেক্ষকের একাধিক অনিশ্চিত সমাকল থাকিলেও একাধিক নিশ্চিত সমাকল থাকিতে পারে না।

লক্ষ্য কর, নিশ্চিত সমাকলে কোন সমাকলন-ধ্রুবক থাকে না।

3. উপরের আলোচনায় মনে করা হইয়াছে যে, $\int f(x)\,dx$ অনিশ্চিত সমাকলটির মান নির্ণয় করা যায় অর্থাৎ $f(x)$ একটি সমাকলন যোগ্য অপেক্ষক। $\int_a^b f(x)\,dx$-এর মান নির্ণয় করা সম্ভব হইলে $f(x)$-কে $a\leqslant x\leqslant b$

বিস্তারে সমাকলনযোগ্য (integrable) বলে। কোন অপেক্ষক কোন বিস্তারে সমাকলনযোগ্য নাও হইতে পারে। তবে এই পুস্তকে আলোচিত সকল অপেক্ষক প্রদত্ত বিস্তারে সমাকলনযোগ্য।

4. $\int_a^b f(x)\,dx$-এ x-এর ঊর্ধ্ব-সীমা b, উহার নিম্ন-সীমা a হইতে বৃহত্তর। $b>a$ হইলে, $\int_b^a$-এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ :—

সংজ্ঞা : $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx.$

5. $\int_a^b f(x)\,dx$-এর মান নির্ণয়ের জন্য প্রক্রিয়াটি নিম্নরূপে লেখা হয়। $\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a).$

$\Big[\quad\Big]_a^b$-এর অর্থ বন্ধনীর অভ্যন্তরস্থ অপেক্ষকে x-র স্থলে ক্রমান্বয়ে b ও a বসাইয়া $F(b)$ হইতে $F(a)$-এর বিয়োগফল।

উদাহরণ 1. $\int_a^b x^2dx=\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_a^b=\dfrac{b^3}{3}-\dfrac{a^3}{3}=\dfrac{b^3-a^3}{3}.$

উদা. 2. $\int_1^4 \sqrt{x}\;dx=\left[\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{2}{3}.8-\frac{2}{3}.1=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}.$

উদা. 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1.$

উদা. 4. $\int_1^2 x^n\,dx\;(n\neq-1)=\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^2$

$$=\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{1^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1}\,(2^{n+1}-1).$$

উদা. 5. $\int_0^1(x^2+3)\,dx=\left[\dfrac{x^3}{3}+3x\right]_0^1=(\frac{1}{3}+3)-(0+0)=3\frac{1}{3}.$

উদা. 6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$ [C. U.]

$\int\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int 2\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx$

$=\frac{1}{2}\left[x+\dfrac{\sin 2x}{2}\right]$

$\therefore\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\left[x+\dfrac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-(0+0)\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$

উদা. 7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\, dx$ [G. U.]

$\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x\, dx - \int dx = \tan x - x.$

$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\, dx = \Big[\tan x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left(\tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - (\tan 0 - 0) = 1 - \frac{\pi}{4}.$

উদা. 8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx$

$\int \sin^3 x\, dx = \int \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x) dx$

$= \frac{3}{4}\int \sin x\, dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\, dx = -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x.$

$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = \Big[-\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(-\frac{3}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{12} \cos \frac{3\pi}{2}\right) - \left(-\frac{3}{4} \cos 0 + \frac{1}{12} \cos 0\right)$

$= 0 + \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

উদা. 9. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}.$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x. \quad \therefore \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\tan^{-1} x\Big]_{-1}^{1}$

$= \tan^{-1}(1) - \tan^{1}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$

উদা. 10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cos x dx.$

$\int \cos 2x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \{\cos 3x + \cos x\}\, dx$

$= \frac{1}{2}\Big[\int \cos 3x\, dx + \int \cos x\, dx\Big] = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin 3x}{3} + \sin x\Big].$

$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin 3x}{3} + \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin 3.\frac{\pi}{2}}{3} + \sin \frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{3} + 1\Big] = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$

উদা. 11. $\int_m^n \frac{mx}{m+n} dx.$

$$\int \frac{mx}{m+n} dx = \frac{m}{m+n}\int x dx = \frac{m}{m+n}.\frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \int_m^n \frac{mx}{m+n} dx = \frac{m}{m+n}\left[\frac{x^2}{2}\right]_m^n = \frac{m}{2(m+n)}\left[n^2 - m^2\right]$$

$$= \frac{m(n-m)}{2}$$

উদা. 12. $\int_{-1}^1 \quad 2x+3$

$$\int \frac{2x+3}{4} dx = \int \frac{x}{2} dx + \int \frac{3}{4} dx = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}x.$$

$$\therefore \int_{-1}^1 \frac{2x+3}{4} dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}x\right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}] = \frac{3}{2}$$

উদা. 13. $\int_0^1 e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1.$

উদা. 14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \left[x\,(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\, dx.$$

$$= \left[\frac{\pi}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - 0.\left(-\cos 0\right)\right] - \left[-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (0-0) - (-1-0) = 1.$$

উদা. 15. $\int_0^1 \sin^{-1} x \, dx.$

$$\int_0^1 \sin^{-1} x \, dx = \left[x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \sin^{-1} 1 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

উদা. 16. $\int_1^e x \log x \, dx = \left[\log x \left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - 0\right) - \frac{1}{2}\int_1^e x \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

উদা. 17. প্রমাণ কর যে, $\int_2^e\left\{\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right\}dx=e-\frac{2}{\log 2}$.

$$\int_2^e\left\{\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right\}dx=\int_2^e \frac{1}{\log x}.\ 1\ dx-\int_2^e \frac{1}{(\log x)^2}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{\log x}\cdot x\right]_2^e-\int_2^e\left\{-\frac{1}{(\log x)^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot x\right\}dx-\int_2^e\frac{1}{(\log x)^2}\,dx$$

$$=\frac{e}{\log e}-\frac{2}{\log 2}+\int_2^e\frac{1}{(\log x)^2}\,dx-\int_2^e\frac{1}{(\log x)^2}\,dx$$

$$=e-\frac{2}{\log 2}\ [\because\ \log e=1]$$

উদা. 18. প্রমাণ কর যে, $\int_{\frac{1}{2}}^2 (4x^2+1)dx=\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{8}{x^2}\,dx$ [C. U.]

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 (4x^2+1)dx=\left[\frac{4x^3}{3}+x\right]_{\frac{1}{2}}^2=\frac{32}{3}+2-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{64+12-1-3}{6}=12.$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{8}{x^2}\,dx=\left[-\frac{8}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^2=-4+16=12.$$

সুতরাং $\int_{\frac{1}{2}}^2 (4x^2+1)dx=\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{8}{x^2}\,dx.$

অনুশীলনী IV A.

মান নির্ণয় কর :

1. (i) $\int_1^{10} x^8\,dx$. (ii) $\int_1^3 x^2\,dx$. (iii) $\int_a^b dx$. (iv) $\int_2^5 (x+5)dx$.

(v) $\int_0^1 (px+q)dx$. (vi) $\int_{-1}^1 \frac{3t+2}{4}\,dt$. (vii) $\int(x+2)^3 dx$ [C. U.]

2. $\int_0^9\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx.$

3. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\,dx$. (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 nz\,dz$ ($n\neq 0$, পূর্ণসংখ্যা)

(iii) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x+\sin 2x)dx$. (iv) $\int_0^{\pi} \sin mx\,dx.$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta - \sin\theta)d\theta$. 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$.

6. $\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx$ 7. $\int_1^{\sqrt{e}} x \log x\, dx$. 8. $\int_0^4 \sqrt{1+2x}\, dx$.

9. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-2)^2}$ 10. $\int_0^1 xe^x\, dx$ [C. U. 1936]

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\theta(\sec\theta - \tan\theta)d\theta$.

m এবং n উভয়েই অখণ্ড সংখ্যা হইলে (উদা 12-14)

12. $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx$.

13. $\int_0^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx$. 14. $\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx$.

15. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 16. $\int_a^b e^{mx}\, dx$. 17. $\int_1^4 \log x\, dx$.

18. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} x\, dx$. [C. U. '70] 19. $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$.

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x\, dx$. 21. $\int_0^1 x\log(x+3)dx$.

22. $\int_0^1 x^2 \tan^{-1} x\, dx$. 23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin x + \cos x)dx$.

24. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x + \sin 2x)dx$.

§ 4·2. **নিশ্চিত সমাকলে চলের প্রতিস্থাপন** (Substitution of variable in definite integral).

পূর্বের অনুচ্ছেদে দেখা গেল, কোন অপেক্ষকের নিশ্চিত সমাকলের মান নির্ণয়ের জন্য প্রথমে অপেক্ষকটির অনিশ্চিত সমাকল নির্ণয় করিতে হয়। তোমরা জান অনেক সময় চলের প্রতিস্থাপন করিয়া অনিশ্চিত সমাকল নির্ণয় করা হয়, কিন্তু প্রদত্ত চল (অর্থাৎ যে চল প্রতিস্থাপিত হয়) দ্বারাই অনিশ্চিত সমাকলটি প্রকাশ করা হয়। কিন্তু নিশ্চিত সমাকলের মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নূতন চলকে প্রতিস্থাপিত করিয়া অনিশ্চিত সমাকলটিকে প্রদত্ত চলের

দ্বারা প্রকাশ না করিলেও চলে। প্রদত্ত চলের সীমা দুইটির জন্য নূতন চলের অনুরূপ সীমা দুইটি নির্ণয় করিয়া এই দুই সীমার মধ্যে নূতন চল দ্বারা প্রকাশিত সমাকলের মান নির্ণয় করা অনেক সময়ই সুবিধাজনক। সুতরাং চলের প্রতিস্থাপন দ্বারা নিশ্চিত সমাকলের মান নির্ণয়ের জন্য সমাকল্য, অন্তরকল (differential) এবং চলের সীমা প্রত্যেকটিরই প্রতিস্থাপন করিতে হয়।

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$

মনে কর $3-2x=u$ $\therefore$ $-2dx=du$ বা, $dx=-\frac{du}{2}$

যখন $x=0$, তখন $u=3-2.0=3$

যখন $x=1$, তখন $u=3-2.1=1$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\int_3^1 \frac{-du}{2\sqrt{u}}=-\frac{1}{2}\int_3^1 \frac{du}{\sqrt{u}}$

$=\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{du}{\sqrt{u}}$ [§ 4·1 দ্রষ্টব্য 4 দেখ]

$=\frac{1}{2}\left[2.u^{\frac{1}{2}}\right]_1^3=\left[u^{\frac{1}{2}}\right]_1^3=\sqrt{3}-1.$

উদা. 2 মান নির্ণয় কর : $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

মনে কর $x=a\sin\theta$ $\therefore$ $dx=a\cos\theta\,d\theta$

যখন $x=0$, তখন $a\sin\theta=0$ বা, $\theta=0$

যখন $x=a$, তখন $a\sin\theta=a$ বা, $\theta=\frac{\pi}{2}$

এবং $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=a\cos\theta$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\,d\theta$

এক্ষণে, $\int a^2\cos^2\theta\,d\theta=a^2\int\cos^2\theta\,d\theta$

$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)$

$\therefore$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\,d\theta=\left[\frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2\pi}{4}$

উদা. 3. মান নির্ণয় কর : $\int_0^1 \frac{3x\,dx}{4-x^2}$

মনে কর $4-x^2=u \quad \therefore \quad -2x\,dx=du$

$\therefore \quad 3x\,dx=-\frac{3}{2}du$

যখন $x=0$, তখন $u=4$; যখন $x=1$, তখন $u=3$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=-\frac{3}{2}\int_4^3 \frac{du}{u}=\frac{3}{2}\int_3^4 \frac{du}{u}=\frac{3}{2}\Big[\log u\Big]_3^4$

$=\frac{3}{2}(\log 4-\log 3).$

উদা. 4. $\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$

মনে কর, $e^x=z \quad \therefore \quad e^x dx=dz$

আবার $x=0$ হইলে $z=1$ এবং $x=1$ হইলে $z=e.$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int_1^e \frac{dz}{1+z^2}=\Big[\tan^{-1}z\Big]_1^e=\tan^{-1}e-\tan^{-1}1$

$=\tan^{-1}e-\frac{\pi}{4}$

উদা. 5. দেখাও যে $\int_2^6 \sqrt{(6-x)(x-2)}\,dx=2\pi.$

মনে কর $x=6\cos^2\theta+2\sin^2\theta$

$\therefore \quad dx=\{12\cos\theta\,(-\sin\theta)+4\sin\theta\cos\theta\}\,d\theta$

$=-8\sin\theta\cos d\theta=-4\sin 2\theta\,d\theta$

$6-x=6-6\cos^2\theta-2\sin^2\theta=6\sin^2\theta-2\sin^2\theta$

$=4\sin^2\theta.$

$x-2=6\cos^2\theta+2\sin^2\theta-2=6\cos^2\theta-2\cos^2\theta$

$=4\cos^2\theta$

$\therefore \quad \sqrt{(6-x)(x-2)}=4\sin\theta\cos\theta=2\sin 2\theta.$

যখন $x=2$, তখন $6\cos^2\theta+2\sin^2\theta=2.$

বা, $6\cos^2\theta=2-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta \;\therefore\; \cos\theta=0$

বা, $\theta=\frac{\pi}{2}$. যখন $x=6$, তখন $6=6\cos^2\theta+2\sin^2\theta$

বা, $6\,\text{Sin}^2\theta=2\sin^2\theta \quad \therefore \; \sin^2\theta=\theta$ বা, $\theta=0$

সুতরাং এখন প্রদত্ত সমাকলের আকার হইল

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2\sin 2\theta(-4\sin 2\theta\, d\theta=-4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2\sin^2 2\theta\, d\theta$$

$$4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\theta)d\theta=4\left[\theta-\frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4.\frac{\pi}{2}=2\pi$$

উদা. 6. মান নির্ণয় কর : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ $(\beta>\alpha)$

মনে কর, $x-\alpha=z^2$ $\therefore$ $dx=2zdz$

যখন $x=\alpha$, তখন $z=0$ এবং যখন $x=\beta$, তখন $z=\sqrt{\beta-\alpha}$

$$\therefore \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}=\int_0^{\sqrt{\beta-\alpha}} \frac{2z\, dz}{z\sqrt{\beta-\alpha-z^2}}$$

$$=2\int_0^{\sqrt{\beta-\alpha}} \frac{dz}{\sqrt{\beta-\alpha-z^2}}=2\left[\sin^{-1}\frac{z}{\sqrt{\beta-\alpha}}\right]_0^{\sqrt{\beta-\alpha}}$$

$$=2.[\sin^{-1} 1-\sin^{-1} 0]=2\,\frac{\pi}{2}=\pi.$$

উদা. 7. $\int_a^b \frac{\log x}{x}\, dx.$

মনে কর, $\log x=z$ $\therefore$ $\frac{dx}{x}=dz$

যখন $x=a$, তখন $z=\log a$ এবং যখন $x=b$ তখন $z=\log b$.

$$\therefore \quad \int_a^b \frac{\log x}{x}\, dx=\int_{\log a}^{\log b} zdz=\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\log a}^{\log b}$$

$$=\frac{(\log b)^2-(\log a)^2}{2}=\tfrac{1}{2}\log (ab)\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

উদা. 8. $\int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2}\, dx.$

মনে কর $x=a(1-\cos\theta)$ $\therefore$ $dx=a\sin\theta\, d\theta$

$\sqrt{2ax-x^2}=\sqrt{2a^2(1-\cos\theta)-a^2(1-\cos\theta)^2}$

$=a\sqrt{2-2\cos\theta-1+2\cos\theta-\cos^2\theta}$

$=a\sqrt{1-\cos^2\theta}=a\sin\theta$

$\therefore$ যখন $x=0$, তখন $\theta=0$ এবং $x=2a$ হইলে, $\theta=\pi$.

$\therefore\ \int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\int_0^{\pi}a^2\sin^2\theta\,d\theta$

$=a^2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$

$=\frac{a^2}{2}\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{a^2}{2}\cdot\pi=\frac{\pi a^2}{2}.$

অনুশীলনী IVB

1. $\int_0^1\sqrt{4-3x}\,dx.$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx.$ [C. U. 1970]

3 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ 4. $\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}\,dx.$

5. $\int_0^1\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ 6. $\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\,dx.$

7. $\int_1^2\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx.$ 8. $\int_2^5\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(5-x)}}.$

9. $\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(5-x)}}.$ 10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^3 x\,dx.$

11. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$ 12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}.$

13. $\int_0^1\frac{5x\,dx}{(x+2)(x^2+1)}.$ 14 $\int_0^3\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}.$

15. $\int_0^1 2e^{-x^2}x\,dx.$ 16. $\int_0^1\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx.$

17 $\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\log x}.$ 18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\,dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$ $[a^2\neq b^2]$.

19. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\log x)^2}$. 20. $\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}$.

§ 4·3. একটি বিশেষ শ্রেণীর যোগফলরূপে নিশ্চিত সমাকলের সংজ্ঞা (Definition of definite integral as the limit of the sum of a special class of series):

§ 4·1-এ সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলরূপে নিশ্চিত সমাকলের সংজ্ঞা দেওয়া হইয়াছে। বর্তমান অনুচ্ছেদে নিশ্চিত সমাকলের অপেক্ষাকৃত সাধারণ সংজ্ঞা (more generalised definition) দেওয়া হইতেছে। পরবর্তী অনুচ্ছেদে দেখান হইবে যে এই দুইটি সংজ্ঞা সঙ্গতিপূর্ণ।

সীমাবদ্ধ অপেক্ষক (Bounded Function): যদি কোন বিস্তার $a<x<b$-এর সর্বত্র কোন অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞা থাকে এবং এরূপ দুইটি সসীম রাশি M এবং m পাওয়া যায় যে ঐ বিস্তারে x-এর প্রত্যেক মানের জন্য $m<f(x)<\mathrm{M}$, তবে $f(x)$-কে $a\leqslant x<b$ বিস্তারে সীমাবদ্ধ (bounded) বলা হয়।

কোন বিস্তার $a\leqslant x\leqslant b$-এর সর্বত্র x-এর প্রত্যেক মানের জন্য যদি কোন অপেক্ষক $f(x)$-এর একটি এবং একটিমাত্র মান পাওয়া যায়, তবে ঐ বিস্তারে অপেক্ষক $f(x)$কে এক-মান বিশিষ্ট (single valued) বলা হয়।

নিশ্চিত সমাকলের সংজ্ঞা :

মনে কর a এবং b দুইটি সসীম রাশি এবং $b>a$. এক্ষণে $a<x<b$ বিস্তারে সংজ্ঞাযুক্ত, সীমাবদ্ধ, একমানবিশিষ্ট একটি অপেক্ষক $f(x)$. $a\leqslant x\leqslant b$ বিস্তারটিকে প্রত্যেকটি h দৈর্ঘ্যের n-সংখ্যক উপবিস্তার (sub-interval) $a<x<a+h,\ a+h\leqslant x\leqslant a+2h,\ \cdots, a+(n-1)h<x<a+nh=b$-এ বিভক্ত কর। সুতরাং $nh=b-a$.

$$\underset{h\to 0}{Lt}\, h\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots f(a+\overline{n-1}h)\} \qquad \cdots(1)$$

বা, $\underset{h\to 0}{Lt}\, h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)$ সীমাটিকে a ও b সীমার মধ্যে $f(x)$ অপেক্ষকটির x-এর সাপেক্ষে নিশ্চিত সমাকল (definite intergral) বলা হয়

এবং ইহাকে $\int_a^b f(x)\,dx$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $\int_a^b f(x)dx$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\sum_{r=0}^{n-1} hf(a+rh) \text{ যেখানে } nh=1$$

দ্রষ্টব্য 1. সহজেই প্রমাণ করিতে পার যে,

$$\underset{h\to 0}{Lt}\, h\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+\overline{n-1}h)\} \quad \cdots(1)$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\, h\{f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+\overline{n-1}h)+f(a+nh\}$$

সুতরাং $\underset{h\to 0}{Lt}\ \{f(a+h+f(a+2h)+\cdots+f(a+nh)+f(a+nh\} \quad \cdots(2)$

$$=\int_a^b f(x)\,dx.$$

সুবিধা অনুসারে (1) অথবা (2) সীমা দুইটির যে কোনটিকে $\int_a^b f(x)\,dx$-এর সংজ্ঞা হিসাবে লওয়া হয়।

দ্রষ্টব্য 2. যেহেতু $nh=b-a \quad \therefore \quad h=\frac{b-a}{n}$; সুতরাং যখন, $h\to 0$, তখন $n\to\infty$.

দ্রষ্টব্য : 3. কোন বিস্তারে কোন অপেক্ষক সন্তত হইলে ঐ বিস্তারে অপেক্ষকটি সমাকোলনযোগ্য (integrable) হয়। ইহার বিপরীত প্রতিজ্ঞা কিন্তু সর্বদা সত্য নহে। তবে এই পুস্তকে কেবলমাত্র সন্তত অপেক্ষক সমূহের নিশ্চিত সমাকল সম্বন্ধে আলোচনা করা হইল।

§ 4·4. একটি বিশেষ শ্রেণীর যোগফলরূপে $\int_a^b f(x)\,dx$-এর জ্যামিতিক তাৎপর্য।

মনে কর $f(x)$ অপেক্ষকটি $a<x\leqslant b$ বিস্তারের সর্বত্র সসীম এবং সন্তত এবং AB বক্রটি $y=f(x)$ সমীকরণের লেখ। $A_0(a, 0)$ এবং A_n (b, 0) বিন্দু দুইটিতে কোটিদ্বয় A_0P_0 ও A_nP_n বক্রটিকে যথাক্রমে P_0 ও P_n বিন্দুতে ছেদ করে। এক্ষণে $A_0A_n=OA_n-OA_0=b-a$.

A_0A_n রেখাংশকে প্রত্যেকটি h-দৈর্ঘ্যের n-সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করা হইল।

$\therefore \quad nh=b-a, \quad$ বা, $\quad a+nh=b.$

$(a+h, 0)\,(a+2h,\ 0),\cdots\{a+(n-1)h, 0\},\ (a+nh, 0)$ বিন্দুগুলির প্রত্যেকটিতে x-অক্ষের উপর লম্ব অঙ্কন কর এবং চিত্রে প্রদর্শিত বক্রের নীচের দিকের এবং উপর দিকের আয়তক্ষেত্রগুলি সম্পূর্ণ কর।

মনে কর, $y=f(x)$ বক্র, $x=a$, $x=b$ কোটিদ্বয় এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল A.

মনে কর, A_1 ও A_2 যথাক্রমে নীচের দিকের ও উপর দিকের আয়তক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফলসমূহের যোগফল।

চিত্র হইতে স্পষ্টতঃ $A_1 < A < A_2 \quad \cdots(1)$

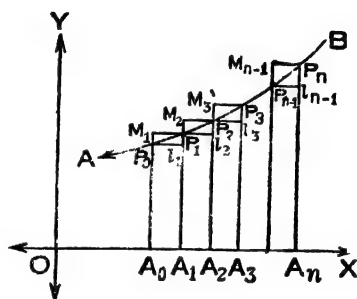
এক্ষণে, $A_1 = hf(a)+hf(a+h)+\cdots+hf\{a+(n-1)h\}$

$$= h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)$$

এবং $A_2 = hf(a+h)+f(a+2h)+\cdots+hf(a+nh)$

$$= h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh) - hf(a) + h(b)$$

এক্ষণে যদি h-এর মান অতিক্ষুদ্র হয় অর্থাৎ যদি $h\to 0$ হয়, তবে n অত্যন্ত বৃহৎ অর্থাৎ $n\to\infty$ হইবে।

সুতরাং যখন $n\to\infty$ হইবে তখন, $f(a)$ এবং $f(b)$ সসীম হওয়ায়, $hf(a)$ এবং $hf(b)$ প্রত্যেকটি 0-র দিকে অগ্রসর হইবে।

$$\therefore \quad A_1, \ \underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh) = \int_a^b f(x)\,dx\text{-এর দিকে}$$

এবং A_2, $\underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh) = \int_a^b f(x)\,dx$-এর দিকে অগ্রসর হইবে।

সুতরাং (1) হইতে পাই, $A=\int_a^b f(x)\,dx$

সুতরাং $\int_a^b f(x)\,dx$, হইতেছে $y=f(x)$ বক্র, x-অক্ষ এবং $x=a$ ও $x=b$ কোটি দ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

দ্রষ্টব্য 1. § 41 এবং এই অনুচ্ছেদ হইতে এখন বুঝিতে পার, ক্ষেত্রফলরূপে এবং যোগফলরূপে নিশ্চিত সমাকলের যে দুইটি সংজ্ঞা পাওয়া যায়, তাহাদের জ্যামিতিক তাৎপর্য অভিন্ন। সুতরাং সংজ্ঞা দুইটি পরস্পর সঙ্গতিপূর্ণ।

যোগফলের সীমারূপে নিশ্চিত সমাকলের সংজ্ঞাকে অপেক্ষাকৃত সাধারণ সংজ্ঞা বলা হয়।

দ্রষ্টব্য 2. বর্তমান অনুচ্ছেদে আলোচিত অপেক্ষকটি একটি বর্দ্ধমান (increasing) অপেক্ষক (চিত্র দেখ)। ক্ষিয়মান অপেক্ষক বা কখনও ক্ষিয়মান, কখনও বর্দ্ধমান অপেক্ষক সম্বন্ধেও অনুরূপ আলোচনা করিয়া নিশ্চিত সমাকলের একই জ্যামিতিক তাৎপর্য নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1. সংজ্ঞা হইতে মান নির্ণয় কর $\int_0^1 3dx$

$$\int_0^1 3dx = \underset{n\to\infty}{Lt}\ h \sum_{r=1}^{n} f(rh)\ ;\ \text{যেখানে } nh=1-0=1.$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h(3+3+3+\cdots\cdots n \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত})$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}(h.\,3n) = 3.\underset{h\to 0}{Lt}\ nh = 3\underset{h\to 0}{Lt}(1) = 3.\,1 = 3.$$

উদা. 2 মান নির্ণয় কর :— $\int_0^1 (ax^2+b)\,dx$

$$\int_0^1 (ax^2+b)dx = \underset{h\to 0}{Lt}\ h \sum_{r=1}^{n} [a(rh)^2+b],\ nh=1-0=1$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h[a(h)^2+a(2h)^2+a(3h)^2+\cdots\cdots+a(nh)^2]$$

$$+ \underset{h\to 0}{Lt}\ h[b+b+b+\cdots\cdots n \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h.\,ah^2(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) + \underset{h\to 0}{Lt}(h.\,nb)$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ ah^3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \underset{h\to 0}{Lt}\ b(nh)$$

$$= \frac{a}{3}\underset{h\to 0}{Lt}\ n^3h^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)+b.\,1.$$

$$= \frac{a}{3}\underset{n\to\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)+b. = \frac{a}{3}.\,1+b = \frac{a}{3}+b.$$

উদা. 3. নিশ্চিত সমাকল একটি যোগফলের সীমা, এই সংজ্ঞা হইতে $\int_0^1 x^3dx$-এর মান নির্ণয় কর।

[Find from the first principle or from the definition the value of $\int_0^1 x^3dx$]

এখানে $a=0,\ b=1\ ;\ f(x)=x^3,\ nh=b-a=1-0=1$

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে,

$$\int_0^1 x^3 dx = \underset{h\to 0}{Lt}\, h\{f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+nh)\}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\, h\{h^3+2^3h^3+3^3h^3+\cdots+n^3h^3\},\ [\because\ a=0]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\, h^4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\, h^4.\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \underset{h\to 0}{Lt}\, \frac{n^4h^4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4}$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\, \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4} = \frac{1}{4}.$$ [$\because$ $nh=1$ এবং যখন $h\to 0$, তখন $n\to\infty$]

উদা. 4. সংজ্ঞা হইতে $\int_a^b e^x dx$-এর মান নির্ণয় কর। [C. U.]

এখানে $f(x)=e^x$; $nh=b-a$

একণে $\int_a^b e^x\, dx = \underset{h\to 0}{Lt}\, h\left\{e^a + e^{a+h} + e^{a+2h} + \cdots + e^{a+(n-1)h}\right\}$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\, he^a\{1+e^h+e^{2h}+\cdots+e^{(n-1)h}\}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\, he^a\, \frac{e^{nh}-1}{e^h-1} = \underset{h\to 0}{Lt}\, he^a\frac{e^{b-a}-1}{e^h-1}$$

$$= e^a\left(e^{b-a}-1\right)\underset{h\to 0}{Lt}\,\frac{h}{e^h-1} = \left(e^b-e^a\right)\frac{1}{\underset{h\to 0}{Lt}\,\frac{e^h-1}{h}}$$

$$= (e^b-e^a).1 = e^b-e^a$$

উদা. 5. মান নির্ণয় কর :—

$$\underset{n\to\infty}{Lt}\,\frac{1+2^{10}+3^{10}+\cdots+n^{10}}{n^{11}}$$ [C. U. 58]

$$\underset{n\to\infty}{Lt}\,\frac{1+2^{10}+3^{10}+\cdots+n^{10}}{n^{11}}$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\,\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{10}+\left(\frac{2}{n}\right)^{10}+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^{10}\right]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\, h[h^{10}+(2h)^{10}+\cdots+(nh)^{10}],$$ [$nh=1=1-0$ মনে করিয়া]

$$=\lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}(rh)^{10}=\int_0^1 x^{10}dx=\left[\frac{x^{11}}{11}\right]_0^1=\frac{1}{11}$$

উদা. 6. মান নির্ণয় কর :—

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]$$

[C. U. '62 ; '67]

প্রদত্ত সীমা

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1^2}{n^2}}+\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}}+\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}}+\cdots+\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}}+\frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0} h\left\{\frac{1}{1+h^2}+\frac{1}{1+2^2h^2}+\cdots+\frac{1}{1+n^2h^2}\right\}$$

[$nh=1=1-0$ মনে করিয়া ; যখন $n\to\infty$, তখন $h\to 0$]

$$=\lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+(rh)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx \text{ (সংজ্ঞানুসারে)}$$

$$=\left[\tan^{-1}x\right]_0^1=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{4}$$

উদা. 7. মান নির্ণয় কর :

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1^2}{n^3+1^3}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}\right\}$$ [C. U. '63]

প্রদত্ত সীমা $=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{1^2}{n^3}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^3}+\frac{\frac{2^2}{n^3}}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^3}+\cdots+\frac{\frac{n^2}{n^3}}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^3}\right\}$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1^2h^3}{1+h^3}+\frac{2^2h^3}{1+2^3h^3}+\cdots+\frac{n^2h^3}{1+n^3h^3}\right\}$$

[$nh=1=1-0$ বসাইয়া]

$$= \lim_{h\to 0} h\left\{ \sum \frac{r^2h^2}{1+r^3h^3}\right\}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\, dx = \tfrac{1}{3}\Big[\log\,(1+x^3)\Big]_0^1$$

$$= \tfrac{1}{3}(\log 2 - \log 1) = \tfrac{1}{3}\log 2.$$

অনুশীলনী IV C

1. সংজ্ঞা হইতে মান নির্ণয় কর :

(i) $\int_0^1 x^2\, dx$ (ii) $\int_0^1 (ax^2+bx+c)\, dx$ (iii) $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$

(iv) $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (v) $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx.$

2. নিম্নলিখিত সীমাগুলি নির্ণয় কর :

(i) $\underset{n\to\infty}{Lt}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right\}$ [C.U.]

(ii) $\underset{n\to\infty}{Lt}\left\{\frac{1}{n}+\frac{n^2}{(n+1)^3}+\frac{n^2}{(n+2)^3}+\cdots+\frac{1}{8n}\right\}$ [C.U.]

(iii) $\underset{n\to\infty}{Lt}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{n+r}{n^2+r^2}\right).$

(iv) $\underset{n\to\infty}{Lt}\frac{1+2^m+3^m+\cdots+n^m}{n^{m+1}},$ $[m>-1]$

§ 4·5. **সমাকলন বিদ্যার মৌল উপপাদ্য** (Fundamental Theorem of Integral Calculus).

সূচনাতেই বলা হইয়াছে যে অনিশ্চিত সমাকল ও নিশ্চিত সমাকলের পারস্পরিক সম্পর্ক সমাকলন বিদ্যার মৌল উপপাদ্য হইতে পাওয়া যায়। এই অনুচ্ছেদে প্রমাণ ব্যতিরেকে উপপাদ্যটি বিবৃত করা হইতেছে। উপপাদ্যটির প্রমাণ পাঠ্যক্রমের অন্তর্গত নয়।

সমাকলন বিদ্যার মৌল উপপাদ্য : $f(x)$ এবং $\phi(x)$ অপেক্ষক দুইটি যদি এইরূপ হয় যে, $f(x)$ অপেক্ষকটি $a\leq x\leq b$ বিস্তারে সমাকলন যোগ্য এবং ঐ বিস্তারে সর্বত্র $\phi'(x)=f(x)$, তবে

$$\int_a^b f(x)\, dx = \phi(b)-\phi(a)$$

নিশ্চিত সমাকলের কয়েকটি ধর্ম (Properties of Definite Integrals) সম্বন্ধে নিম্নে আলোচনা করা হইল।

(1) সংজ্ঞানুসারে $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)dx$. [পূর্বেই বলা হইয়াছে]

(2) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz$.

প্রমাণ : $\int f(x)dx = \phi(x)$ হইলে, $\int f(z)dz = \phi(z)$.

এক্ষণে, $\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a)$ এবং $\int_a^b f(z)\,dz = \phi(b) - \phi(a)$

$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz.$

(3) $a < c < b$ হইলে,

$$\int^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

প্রমাণ : মনে কর, $\int f(x)\,dx = \phi(x)$.

$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a)$;

$\int_a^c f(x)\,dx = \phi(c) - (a)$ এবং $\int_c^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(c)$.

$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a) = \{\phi(c) - \phi(a)\} + \{\phi(b) - \phi(c)\}$

$\therefore \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$

অনুসিদ্ধান্ত : $a < c_1 < c_2 < \cdots\cdots < c_n < b$ হইলে,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots\cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx + \int_{c_n}^b f(x)\,dx.$$

(4) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx.$

প্রমাণ : মনে কর, $a - x = z \quad \therefore \quad -dx = dz.$

আবার $x = 0$ হইলে $z = a$ এবং $x = a$ হইলে $z = 0$.

$\therefore \quad \int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(z)dz$

$$=\int_0^a f(z)\,dz \text{ [ধর্ম (1)]}=\int_0^a f(x)dx. \quad \text{[ধর্ম (2)]}$$

(5) $f(x)=f(a+x)$ হইলে,

$$\int_0^{na} f(x)\,dx=n\int_0^a f(x)\,dx,$$ যেখানে n একটি অখণ্ড ধন সংখ্যা।

প্রমাণ। মনে কর $x=a+z \quad \therefore \quad dx=dz.$

যখন $x=a$, তখন $z=0$ এবং যখন $x=2a$, তখন $z=a.$

$$\therefore \quad \int_a^{2} f(x)\,dx=\int_0^a f(a+z)\,dz=\int_0^a f(a+x)\,dx \text{ [ধর্ম (2)]}$$

$$=\int_0^a f(x)\,dx \quad [\because \quad f(a+x)=f(x)]$$

অনুরূপে, $\int_{2a}^{3a} f(x)\,dx=\int_a^{2a} f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx.$

$$\int_{3a}^{4a} f(x)\,dx=\int_{2a}^{3a} f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx$$

.. ..

$$\int_{(n-1)a}^{na} f(x)\,dx=\int_{(n-2)a}^{(n-1)a} f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx.$$

এক্ষণে, $\int_0^{na} f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^{2a} f(x)\,dx+$

$$\int_{2a}^{3a} f(x)+\cdots+\int_{(n-1)a}^{na} f(x)\,dx$$

$$=\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx+\cdots+\int_0^a f(x)\,dx.$$

$$=n\int_0^a f(x)\,dx.$$

§ 4·6 ক্ষেত্রফল নির্ণয় (Determination of Area):

এই অধ্যায়ের প্রথম অনুচ্ছেদে দেখান হইয়াছে যে $y=f(x)$ বক্র, x-অক্ষ এবং দুইটি নির্দিষ্ট কোটি $x=a$ ও $x=b$ $(a<b)$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

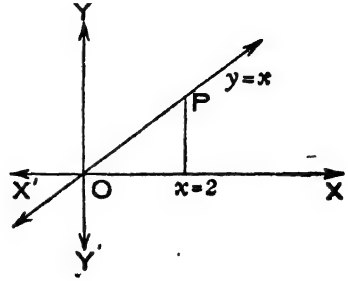
$$\int_a^b f(x)dx \text{ বা } \int_a^b ydx.$$

অনুরূপে, $x=f(y)$ বক্র, y-অক্ষ এবং দুইটি নির্দিষ্ট ভুজ $y=c$ এবং $y=d$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\int_0^d f(y)dy$ বা $\int_0^d x\,dy$.

উদাহরণ 1. সমাকলনের সাহায্যে $y=x$, $y=0$ $x=0$ এবং $x=2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

এখানে, $f(x)=x$. x-এর সীমা 0 হইতে 2. সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$=\int_0^2 y\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=2 \text{ বর্গ একক।}$$

উদা. 2. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয়ের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিয়া ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উচ্চতা সূত্রের যাথার্থ্য প্রমাণ কর।

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \text{বা} \quad y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)=\frac{b}{a}(a-x)$$

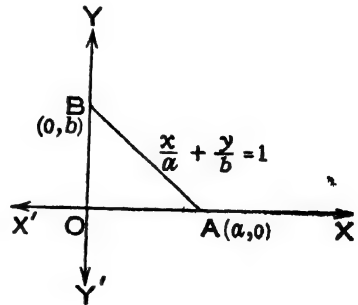
এই সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রে x-এর সীমা 0 হইতে a.

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$=\int_0^a y\,dx=\int_0^a \frac{b}{a}(a-x)\,dx$$

$$=\frac{b}{a}\left[ax-\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\frac{b}{a}\left[a^2-\frac{a^2}{2}\right]$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{1}{2}ab \text{ বর্গ একক।}$$

আবার, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখা অক্ষদ্বয়কে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিলে ক্ষেত্রটি হইতেছে $\triangle$ABO

এক্ষণে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা সূত্র হইতে

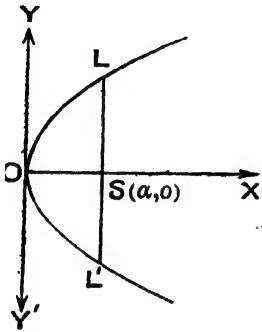
$$m\triangle ABO=\frac{1}{2}OA.OB.$$

এখন A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, b)$

সুতরাং OA $=a$ ও OB $=b$. $\therefore m\triangle ABO=\frac{1}{2}ab$ বর্গ একক।
সুতরাং সূত্রটির যাথার্থ্য প্রমাণিত হইল।

উদা. 3. একটি অধিবৃত্ত এবং উহার নাভিলম্বের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

মনে কর অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$.

অধিবৃত্তের নাভিলম্বের সমীকরণ $x=a$ এবং ইহা অধিবৃত্তকে $(a, 2a)$ ও $(a, -2a)$ বিন্দুতে এবং x-অক্ষকে $(a, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

এক্ষণে আমাদের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = LOL'SL ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

তোমরা জান অধিবৃত্ত উহার অক্ষ (এখানে x-অক্ষ)-এর সাপেক্ষে প্রতিসম। সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = LOSL ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ বা, $2m$(LOSL).

এক্ষণে, LOSL ক্ষেত্রটি $y^2=4ax$ অধিবৃত্ত, x-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=a$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ।

সুতরাং LOSL অংশের ক্ষেত্রফল $\int_0^a y\,dx$.

এখন অধিবৃত্তের x-অক্ষের উপরের অংশের জন্য $y=2\sqrt{ax}$:

$$\therefore \text{ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল}=2\int_0^a y\,dx=2\int_0^a 2\sqrt{ax}\,dx=4\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$=4\sqrt{a}\cdot\tfrac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}=\tfrac{8}{3}a^2 \text{ বর্গ একক।}$$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল πab বর্গ একক।

উপবৃত্ত উহার উপাক্ষ এবং পরাক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। সুতরাং উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল = উহার যে কোন পাদের ক্ষেত্রফলের চারগুণ (The area of an ellipse is four times the area of a quadrant of the ellipse)। সুতরাং প্রথমে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের প্রথম পাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যাক।

এক্ষণে, $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$

$$\therefore\ y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

প্রথম পাদের জন্য y ধনাত্মক ; $\therefore \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$

আবার এই পাদের জন্য x-এর সীমা $x=0$ হইতে $x=a.$

[কারণ, উপবৃত্ত x-অক্ষকে $(\pm a, 0)$ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে]।

সুতরাং $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের প্রথম পাদের ক্ষেত্রফল

$$A=\int_0^a y\,dx=\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

এক্ষণে মনে কর, $x=a\sin\theta. \quad \therefore \quad dx=a\cos\theta\,d\theta.$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=a\cos\theta$$

এবং যখন $x=0$, তখন $\theta=0$; যখন, $x=a$, তখন $\theta=\frac{\pi}{2}$.

$$\therefore \quad A=\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\,d\theta=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta.$$

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{ab}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi ab}{4}$$ বর্গ একক।

অতএব, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল$=4A=4\,\frac{\pi ab}{4}=\pi ab$ বর্গ একক।

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হইলে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল πr^2.

মনে কর বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=r^2$. সুতরাং বৃত্তের ক্ষেত্রফল $A=4\times$(উহার যে কোন পাদের ক্ষেত্রফল)।

এক্ষণে বৃত্তের প্রথম পাদের জন্য $y=\sqrt{r^2-x^2}$ এবং x-এর সীমা 0 হইতে r.

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল}=4\int_0^r y\,dx=4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$=4.\,\pi\frac{r^2}{4}=\pi r^2.$$

দ্রষ্টব্য : উপবৃত্তের প্রথম পাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের নিশ্চিত সমাকল $\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$-এ $b=a=r$ বসাইলেই, বৃত্তের প্রথম পাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

উদা. 6. $xy=k^2$, x-অক্ষ এবং $x=a$ ও $x=b$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

এখানে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\int_a^b y\,dx=\int_a^b \frac{k^2}{x}\,dx$

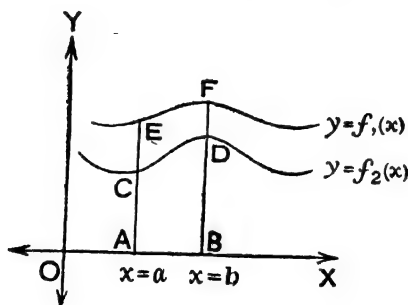
$$=k^2\Big[\log x\Big]_a^b=k^2\Big(\log b-\log a\Big)=k^2\log\frac{b}{a}.$$

উদা. 7. $y=\sin x$ বক্রের একটি তরঙ্গ (wave) দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sine-বক্র x-অক্ষকে $(n\pi, 0)$ $[n=0, \pm1, \pm2, \cdots]$ বিন্দুগুলিতে ছেদ করে। $(0, 0)$ ও $(\pi, 0)$ পরপর দুইটি ছেদবিন্দু। সুতরাং এই অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সুবিধাজনক।

এখানে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\int_0^\pi y\,dx=\int_0^\pi \sin x\,dx$

$$=\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=-\cos\pi+\cos 0=-(-1)+1=2 \text{ বর্গ একক।}$$

উদা. 8. $y=f_1(x)$ এবং $y=f_2(x)$ বক্র দুইটি এবং $x=a$ ও $x=b$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—

মনে কর $A(a, 0)$ এবং $B(b, 0)$ প্রান্তস্থ দুইটি কোটি এবং এই কোটিদ্বয় $y=f_1(x)$ বক্রকে C ও D বিন্দুতে এবং $y=f_2(x)$ বক্রকে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং CDFE ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

এক্ষণে, CDFE ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

=(ABFE ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল)—(ABDC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল)

$$=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)dx=\int_a^b \{f_1(x)-f_2(x)\}\,dx$$

উদা. 9. $y^2=4ax$ অধিবৃত্ত এবং $y=x$ সরলরেখার অন্তর্গত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

অধিবৃত্তের সমীকরণে $y=x$ বসাইয়া পাই,

$x^2=4ax$ $\therefore$ $x=0$ বা $4a$. সুতরাং $y=0$ বা $4a$.

অর্থাৎ অধিবৃত্ত ও $y=x$ সরলরেখা পরস্পরকে $(0, 0)$ ও $(4a, 4a)$ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে।

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $\int_0^{4a} (\sqrt{4ax}-x)\,dx$ [$\because$ অধিবৃত্তের সমীকরণ হইতে $y=\sqrt{4ax}$]

$$=\int_0^{4a} 2\sqrt{a}\sqrt{x}\,dx-\int_0^{4a} x\,dx.$$

$$=2\sqrt{a}\cdot\tfrac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4a}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{4a}=\frac{4\sqrt{a}}{3}.\,8a^{\frac{3}{2}}-8a^2$$

$=\frac{32}{3}a^2-8a^2=\frac{8}{3}a^2$ বর্গ একক।

উদা. 10. x-অক্ষের উপরের দিকে $x^2+y^2=2ax$ বৃত্ত এবং $y^2=ax$ অধিবৃত্তের দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$x^2+y^2=2ax$ বৃত্ত এবং $y^2=ax$ অধিবৃত্ত পরস্পরকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং x-অক্ষের উপর দিকে (a, a) বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে।

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $\int_0^a \{\sqrt{2ax-x^2}-\sqrt{ax}\}\,dx.$

[উপরের উদাহরণ 7 দেখ, এখানে $f_1(x)=\sqrt{2ax-x^2}$ এবং $f_2(x)=\sqrt{ax}$]

$$=\int_0^a \sqrt{2ax-x^2}\,dx-\int_0^a \sqrt{a}\sqrt{x}\,dx.$$

এক্ষণে, $\int_0^a \sqrt{2ax-x^2}\,dx$ নির্ণয়ের জন্য $x=a(1-\cos\theta)$ মনে কর।

$\therefore$ $dx=a\sin\theta\,d\theta.$

$$\sqrt{2ax-x^2}=\sqrt{2a^2(1-\cos\theta)-a^2(1-\cos\theta)^2}$$

$=a\sqrt{2-2\cos\theta-1+2\cos\theta-\cos^2\theta}$

$=a\sqrt{1-\cos^2\theta}=a\sin\theta$

$\therefore$ যখন $x=0$, তখন $\theta=0$

এবং $x=a$ হইলে, $\theta=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore \int_0^a \sqrt{2ax-x^2}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\,d\theta.$

$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta.$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

এবং $\int_0^a \sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}.$

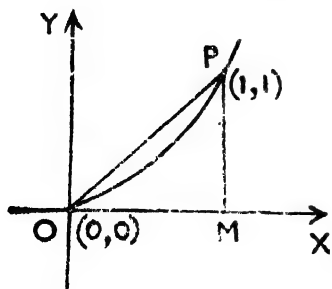
$\therefore \quad \sqrt{a}\int_0^a \sqrt{x}\,dx=\sqrt{a}.\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}a^2.$

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল$=\frac{\pi a^2}{4}-\frac{2}{3}a^2=a^2.\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right).$

উদা. 11. $y^2=x^3$ বক্র এবং $y=x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$y^2=x^3$ সমীকরণে $y=x$ বসাইয়া পাই $x^2=x^3$

বা, $x^3-x^2=0$, বা, $x^2(x-1)=0.$

$\therefore \quad x=0, 0, 1.$ এবং y-এর অনুরূপ মানগুলি হইল 0, 0 এবং ± 1.

কিন্তু $x=1$, $y=-1$ হইলে $y=x$ সমীকরণ সিদ্ধ হয় না। সুতরাং $=x$ সরলরেখা $y^2=x^3$ বক্রকে (0, 0) বিন্দু বা মূল বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (1, 1) বিন্দুতে ছেদ করে। মনে কর P বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (1, 1) এবং PM, x-অক্ষের উপর লম্ব। সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$=(\triangle OPM$-এর ক্ষেত্রফল$)-(x$-অক্ষ, $y^2=x^3$ বক্র এবং $x=0$ ও $x=1$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল$)=\triangle-A$ (মনে কর)।

এক্ষণে $\triangle=\frac{1}{2}OM.PM$ বর্গ একক $=\frac{1}{2}.1.1=\frac{1}{2}$ বর্গ একক

এবং $A=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx$ $\left[x \text{ অক্ষের উপরের অংশে } y=+x^{\frac{3}{2}}\right]$

$$=\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{5}.1 \text{ বর্গ একক}=\frac{2}{5} \text{ বর্গ একক।}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=(\frac{1}{2}-\frac{2}{5})$ বর্গ একক $=\frac{1}{10}$ বর্গ একক।

উদা. 12. দেখাও যে, $y^2=4ax$ এবং $x^2=4ay$ অধিবৃত্ত দুইটির সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}a^2$. [C. U. 1928]

$y^2=4ax$ এবং $x^2=4ay$ বক্র দুইটি পরস্পরকে (0, 0) ও $(4a, 4a)$ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে।

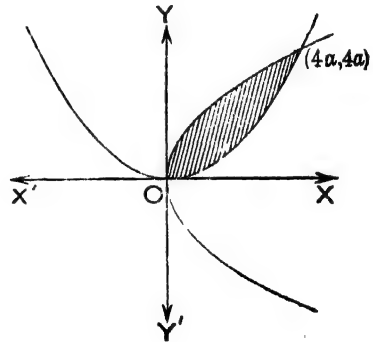
সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল হইতেছে $y^2=4ax$ অধিবৃত্ত, $y=0$, $x=0$ ও $x=4a$ কোটিদ্বয়ের অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $x^2=4ay$ অধিবৃত্ত, $y=0$, $x=0$ ও $x=4a$ কোটিদ্বয়ের অন্তর্গত ক্ষেত্রফলের অন্তর।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$=\int_0^{4a}\left(2\sqrt{ax}-\frac{x^2}{4a}\right)dx$$

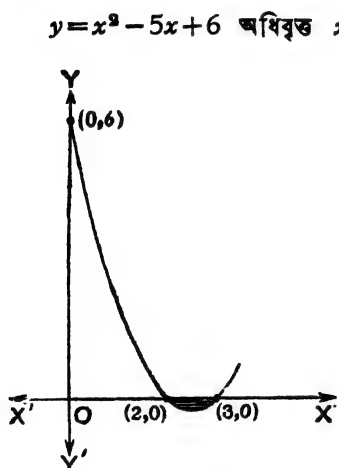
$$=2\sqrt{a}.\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4a}-\frac{1}{4a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{4a}$$

$$=2\sqrt{a}.\frac{2}{3}.8a^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4a}\cdot\frac{64a^3}{3}$$

$$=\frac{32}{3}a^2-\frac{16a^2}{3}=\frac{16}{3}a^2 \text{ বর্গ একক।}$$

§ 4·7. ক্ষেত্রফলের চিহ্ন (Sign of an area) :

পূর্ব অনুচ্ছেদের উদাহরণ 4 ও 5 লক্ষ্য করিলে দেখিবে যে উপবৃত্ত ও বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের জন্য প্রত্যেক ক্ষেত্রে আমরা প্রথম পাদে অবস্থিত উপবৃত্ত বা বৃত্তের অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিয়াছি। প্রথম পাদে অবস্থিত অঞ্চলসমূহ x-অক্ষের উপরদিকে অবস্থিত হওয়ায় নির্ণেয় ক্ষেত্রফলসমূহও

ধনাত্মক মানবিশিষ্ট হইয়াছে। উপবৃত্ত বা বৃত্ত উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম হওয়ায়, প্রাপ্ত প্রথম পাদের ক্ষেত্রফলকে 4 দ্বারা গুণ করিয়া উপবৃত্ত ও বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা হইয়াছে। যদি কোন ক্ষেত্র সম্পূর্ণরূপে x-অক্ষের নীচের দিকে অবস্থিত হয়, তবে $y=f(x)$ ঋনাত্মক হওয়ায় ক্ষেত্রফলটির ঋনাত্মক মান পাওয়া যাইবে। কিন্তু কোন ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল প্রকৃতপক্ষে চিহ্নহীন। সুতরাং বীজগণিতের দৃষ্টিভঙ্গী হইতে ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হইলেও প্রকৃত ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে চিহ্ন ধরা হয় না। নীচের উদাহরণগুলি ভাল করিয়া লক্ষ্য কর।

উদাহরণ 1. x-অক্ষ এবং $y=x^2-5x+6$ অধিবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$y=x^2-5x+6$ অধিবৃত্ত x-অক্ষকে (2, 0) ও (3, 0) বিন্দুতে ছেদ করে। চিত্রে রেখাঙ্কিত অঞ্চল x-অক্ষ ও অধিবৃত্তটি দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল। অঞ্চলটি সম্পূর্ণরূপে x-অক্ষের নীচের দিকে অবস্থিত। এক্ষণে, নির্ণেয়

$$\text{ক্ষেত্রফল}=\int_2^3(x^2-5x+6)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\right]_2^3$$

$$=\left(9-\frac{45}{2}+18\right)-\left(\frac{8}{3}-10+12\right)$$

$$=\tfrac{9}{2}-\tfrac{14}{3}=-\tfrac{1}{6}.$$

এখানে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক পাওয়া গেল। সুতরাং বীজগাণিতিক দৃষ্টিভঙ্গী হইতে যথার্থ উত্তর পাওয়া গেল। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল চিহ্নহীন এবং $\frac{1}{6}$ একক।

উদা. 2. x-অক্ষ এবং $y=x(x-1)(x-2)$ বক্রদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$y=x(x-1)(x-2)$ বক্রটি x-অক্ষকে (0, 0), (1, 0) ও (2, 0) বিন্দুতে ছেদ করে। x-অক্ষ এবং বক্রটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের দুইটি অংশ (i) একটি অংশ OAB, x-অক্ষের উপর দিকে এবং (ii) অপর অংশ BCD, x-অক্ষের সম্পূর্ণ নীচের দিকে।

এক্ষণে OAB ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$=\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx$$

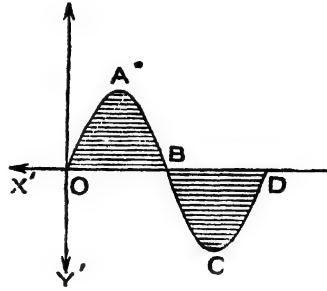
$$=\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1$$

$=\frac{1}{4}-1+1=\frac{1}{4}$ বর্গ একক

BCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$=\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx$$

$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2=-\frac{1}{4}$ বর্গ একক।

সুতরাং যদি নিম্নের ক্ষেত্রটির চিহ্ন অগ্রাহ্য করা হয়, তবে উহার প্রকৃত ক্ষেত্রফল$=\frac{1}{4}$ বর্গ একক এবং প্রদত্ত ক্ষেত্রের প্রকৃত ক্ষেত্রফল$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ $=\frac{1}{2}$ বর্গএকক।

এক্ষণে, আমরা x-এর মানের 0 হইতে 2 সীমা পর্যন্ত সমাকলন করিয়া পাই, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল$=\int_0^2 x(x-1)(x-2)dx$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^2=4-8+4=0=\frac{1}{4}+(-\frac{1}{4})$$

সুতরাং যদিও প্রদত্ত ক্ষেত্রের প্রকৃত ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}$ বর্গ একক, কিন্তু বীজগাণিতিক দৃষ্টিভঙ্গী হইতে ক্ষেত্রফল শূন্য।

অনুশীলনী IV D

1. $y=3x$, x-অক্ষ এবং $x=1$ ও $x=2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

2. $y=-x$, x-অক্ষ এবং $x=1$ ও $x=2$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

3. $y=2x+3x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=4$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

4. $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

5. (*a*). $y=\frac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=1$ ও $x=2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(*b*). $y=2x^3$, $y=0$ এবং $x=0$ ও $x=2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

6. $y=\sin 2x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{6}$-এর দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

7. $y=\sin x+\cos x$, $y=0$, $x=0$ এবং $x=\frac{\pi}{4}$-এর অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

8. x-অক্ষ এবং $y=(x-1)(x-2)$ বক্র দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র দুইটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

9. (*a*). $y^2=4ax$ এবং একটি দ্বিগুণ কোটি $x=h$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(*b*) $y^2=4ax$ অধিবৃত্ত এবং $y=2x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

10. $y=(x-2)(x-3)$ অধিবৃত্তের x-অক্ষ দ্বারা ছেদিত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

11. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{6}a^2$.

12. $y^2+x-1=0$ অধিবৃত্তের এবং $x^2+y^2=1$ বৃত্তের সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

13. $ax^2+by^2=1$ এবং $bx^2+ay^2=1$ উপবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর $(b>a)$.

14. $y^2=4x$ এবং $y^2=x$ অধিবৃত্ত দুইটি এবং $x=1$ ও $x=4$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [Burdwan 1970]

15(*a*). $y^2=6x$ এবং $x^2=6y$ অধিবৃত্তদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উদাহরণ 12 দেখ] [C. U. 1972]

(*b*). প্রমাণ কর যে $y^2=4x$ এবং $x^2=4y$ অধিবৃত্তদ্বয় $y=0$, $y=4$, $x=0$ এবং $x=4$ সরলরেখা চারিটি দ্বারা উৎপন্ন বর্গক্ষেত্রকে সমান তিনটি অংশে বিভক্ত করে।

16. $y=x^3$ বক্র এবং $y=2x$ সরলরেখার অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

17. $y=\cos x$ বক্র এবং x-অক্ষের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের (i) $x=0$ হইতে $\frac{\pi}{2}$ (ii) $x=\frac{\pi}{2}$ হইতে π এবং (iii) $x=0$ হইতে π-এর মধ্যে অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

18. x-অক্ষ এবং $y=\sin x$ বক্রের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের নিম্নলিখিত সীমার মধ্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(i) 0 এবং π (ii) π এবং 2π (iii) 0 এবং 2π.

উদাহরণমালা 4

উদাহরণ 1. মান নির্ণয় কর : $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx.$ [C. U. 1937]

$$\int\frac{1-x}{1+x}dx=\int\left(\frac{2}{1+x}-1\right)dx=2\int\frac{dx}{1+x}-\int dx$$
$$=2\log(1+x)-x$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx=\Big[2\log(1+x)-x\Big]_0^1=2\log 2-1.$$

উদা. 2 মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta\cos^3\theta\, d\theta.$

মনে কর $\sin\theta=x$. $\therefore$ $\cos\theta\, d\theta=dx$.

যখন $\theta=0$, তখন $x=0$; যখন $\theta=\frac{\pi}{2}$, তখন $x=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

$\sin^6\theta=x^6$; $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-x^2$.

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta\cos^3\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\cos^2\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$=\int_0^1(x^6-x^8)dx$$

$$=\left[\frac{x^7}{7}-\frac{x^9}{9}\right]_0^1=\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{9}=\tfrac{2}{63}.$$

উদা. 3. একটি বিশেষ শ্রেণীর যোগফলরূপে নিশ্চিত সমাকলের সংজ্ঞা হইতে $\int_{-1}^1 \frac{2x+3}{4}dx$-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. 1964]

$$\int_{-1}^1 \frac{2x+3}{4}dx=\int_{-1}^1 \tfrac{1}{2}x\, dx+\int_{-1}^1 \tfrac{3}{4}\, dx$$

$$=\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{h}{2}\Big[(-1)+(-1+h)+(-1+2h)+\cdots\cdots+\{-1+(n-1)h\}\Big]$$

$$+\underset{n\to\infty}{Lt}\ h\left[\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}+\cdots+\tfrac{3}{4}\right]$$

[$nh=1-(-1)=2$ মনে করিয়া]

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\ \tfrac{1}{2}[-nh+h\{h+2h+\cdots+(n-1)h\}]+\tfrac{3}{4}nh$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\left[-\frac{nh}{2}+\tfrac{1}{2}h^2 n(n-1)\right]+\tfrac{3}{2} \quad [\because \ nh=2]$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\left[-\tfrac{2}{2}+\tfrac{1}{4}nh\ nh(1-\tfrac{1}{n})\right]+\tfrac{3}{2}$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\ (-1)+\underset{n\to\infty}{Lt}\ \tfrac{1}{4}.2.2(1-\tfrac{1}{n})+\tfrac{3}{2}$$

$$=-1+1+\tfrac{3}{2}=\tfrac{3}{2}.$$

উদা. 4. মান নির্ণয় কর : $\int_a^b x^2\,dx$ [সংজ্ঞা হইতে]

$$\int_a^b x^2\,dx = \underset{h\to 0}{Lt}\ h[a^2+(a+h)^2+(a+2h)^2 + \cdots + (a+\overline{n-1}h)^2]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h[na^2+2ah\{1+2+\cdots+(n-1)\} + h^2\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h\left[na^2+2ah\frac{n(n-1)}{2}+h^2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\left\{nha^2+anh(nh-h) + \frac{nh(nh-h)(2n-h)}{6}\right\}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ \left\{(b-a)a^2+a(b-a)(b-a-h) + \frac{(b-a)(b-a-h)(2b-2a-h)}{6}\right\} \quad [\because \ nh=b-a]$$

$$=(b-a)a^2+a(b-a)^2+\frac{(b-a)^2.2(b-a)}{6}$$

$$=(b-a)a^2+a(b-a)^2+\tfrac{1}{3}(b-a)^3$$

$$=a(b-a)(a+b-a)+\tfrac{1}{3}(b-a)^3$$

$$=\tfrac{1}{3}[(b-a)^3+3ab(b-a)]$$

$$=\tfrac{1}{3}(b^3-a^3).$$

উদা. 5. মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\,dx}{\sin x+\cos x}$

মনে কর $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{\sin x+\cos x}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\, dx}{\cos x+\sin x}$$

$$\therefore \quad 2I=I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{\sin x+\cos x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\, dx}{\cos x+\sin x}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx.$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x+\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\tan\frac{3\pi}{8}-\log\tan\frac{\pi}{8}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)}{\tan\frac{\pi}{8}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}{\tan\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\cot\frac{\pi}{8}}{\tan\frac{\pi}{8}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\cos^2\frac{\pi}{8}}{\sin^2\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}.2\log(\sqrt{2}+1)$$

$$\therefore \quad I=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1).$$

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{8}\log 2.$

মনে কর, $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan\theta)\, d\theta$

$\therefore \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\} d\theta.$

এক্ষণে, $1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = 1 + \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \frac{2}{1+\tan\theta}$

$\therefore \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \frac{2}{1+\tan\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\log 2 - \log(1+\tan\theta)\right\} d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2 d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{4}\log 2 - I$

$\therefore \quad 2I = \frac{\pi}{4}\log 2$ (পক্ষান্তর করিয়া)

$\therefore \quad I = \frac{\pi}{8}\log 2.$

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos^2 x + b\sin^2 x)\, dx = (a+b)\frac{\pi}{4}.$

মনে কর, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos^2 x + b\sin^2 x)\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{a\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + b\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin^2 x + b\cos^2 x)\, dx$

$\therefore \quad 2I = I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos^2 x + b\sin^2 x)\, dx$

$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin^2 x + b\cos^2 x)\, dx$

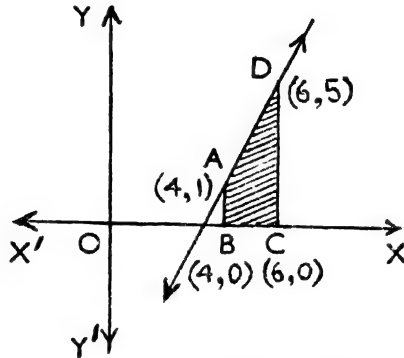
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(a\cos^2 x + b\sin^2 x) + (a\sin^2 x + b\cos^2 x)\}\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{a(\cos^2 x + \sin^2 x) + b(\sin^2 x + \cos^2 x)\}\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a+b)\, dx = \left[(a+b)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = (a+b)\frac{\pi}{2}.$

$\therefore \quad I = (a+b)\frac{\pi}{4}.$

উদা. 8. $y=2x-7$, $y=0$, $x=4$ এবং $x=6$ সরলরেখাগুলি দ্বারা বেষ্টিত ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}$(সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি)×(সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব) বর্গএকক সূত্রের যাথার্থ্য দেখাও।

প্রদত্ত সরলরেখা চারিটি দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের দুইটি বাহু $x=4$ ও $x=6$ পরস্পর সমান্তরাল।

আবার $y=2x-7$ এবং $y=0$ বাহুদ্বয় পরস্পরছেদী, সুতরাং ক্ষেত্রটি একটি ট্রাপিজিয়াম।

এক্ষণে, ট্রাপিজিয়ামটির ক্ষেত্রফল

$$=\int_4^6 y\,dx=\int_4^6 (2x-7)\,dx=\Big[x^2-7x\Big]_4^6$$

$$=(36-42)-(16-28)=6 \text{ বর্গ একক।}$$

এক্ষণে, $x=4$ বাহুটি $y=2x-7$ এবং $y=0$ রেখাদ্বয়কে যথাক্রমে A(4, 1) এবং B(4, 0) বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং ট্রাপিজিয়ামটির AB বাহুর দৈর্ঘ্য 1 একক।

আবার $x=6$ বাহুটি $y=2x-7$ এবং $y=0$ রেখাদ্বয়কে D(6, 5) ও C (6, 0) বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে। সুতরাং ট্রাপিজিয়াম ABCD-র CD বাহুর দৈর্ঘ্য 5 একক।

এক্ষণে, আবার প্রদত্ত সূত্র অনুযায়ী ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}$ (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য)×(উহাদের দূরত্ব)

$=\frac{1}{2}(1+5).\ 2$ বর্গ একক।

$=6$ বর্গ একক।

সুতরাং উভয় পদ্ধতিতেই ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল একই পাওয়া গেল। সুতরাং ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফলের প্রদত্ত সূত্রটির যাথার্থ্য প্রমাণিত হইল।

উদা. 9. (x, y) বিন্দুতে একটি বক্রের নতি $4x-3$ এবং বক্রটি $(2, 2)$ বিন্দুগামী। বক্রটি, x-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=2$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

যেহেতু (x, y) বিন্দুতে বক্রটির নতি $4x-3$,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=4x-3, \text{ বা, } dy=(4x-3)\,dx$$

$$\text{বা, } \quad y=4\frac{x^2}{2}-3x+c \text{ [সমাকলন প্রক্রিয়া দ্বারা]}$$

$$\text{বা, } \quad y=2x^2-3x+c.$$

এক্ষণে যেহেতু বক্রটি $(2, 2)$ বিন্দুগামী,

$$\therefore \quad 2=8-6+c, \quad \text{বা,} \quad c=0.$$

সুতরাং বক্রটির সমীকরণ $y=2x^2-3x$.

এক্ষণে, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\int_0^2 y\,dx=\int_0^2 (2x^2-3x)\,dx$

$$=\left[2.\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_0^2=\frac{16}{3}-6=-\frac{2}{3};$$

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\frac{2}{3}$ বর্গ একক।

প্রশ্নমালা 4

সমাকলন কর :—

1. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}$ [C. U. 1933]

2. $\int_2^3 \sqrt{(x-2)(3-x)}\,dx$ [C. U. 1965]

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^3 x\,dx.$ [C. U. 1965]

4. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(5-x)}}$ [C. U. 1966]

5. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2}$ $(0<a<1)$ [C. U. '47]

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ [C. U.]

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x} dx.$

8. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx.$ [North Bengal '69]

9. $\int_{-a}^{a} \frac{x\, e^{x^4}}{1+x^2}\, dx.$ [C. U. '66]

10. $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \frac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^5}$ [C. U. '64]

11. $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left[\frac{1}{\sqrt{2n-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n-2^2}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3^2}}+\cdots+\frac{1}{n}\right]$

[C. U. '66]

12. $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$

[C. U. '67]

13. $y=3x$ সরলরেখা এবং $y=x^3$ বক্রদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

14. অক্ষদ্বয়, $y=8+12x-x^3$ বক্র এবং বক্রটির চরম মানের বিন্দুর কোটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

পঞ্চম অধ্যায়

অন্তরকল সমীকরণ

(Differential Equations)

§ 5·1. অন্তরকল সমীকরণ :

কোন সমীকরণে অন্তরকল (differential) বা অন্তরকলজ (derivative) থাকিলে, তাহাকে অন্তরকল সমীকরণ বা ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ (Differential equation) বলে।

সুতরাং $x^2\dfrac{dy}{dx}+y-1=0$ একটি অন্তরকল সমীকরণ; কারণ এই সমীকরণে একটি অন্তরকলজ $\dfrac{dy}{dx}$ বর্তমান।

$y\,dx-x\,dy=xy\,dx$ সমীকরণে dy ও dx অন্তরকল দুইটির উপস্থিতির জন্য সমীকরণটি একটি অন্তরকল সমীকরণ।

$$\frac{dy}{dx}=0,\ dy=\sin x\,dx \quad \text{বা,} \quad y\,dy=dx$$

সমীকরণ তিনটি লক্ষ্য কর। দেখ, প্রথম সমীকরণটিতে $\dfrac{dy}{dx}$ উপস্থিত থাকিলেও x ও y উভয়েই অনুপস্থিত। দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমীকরণ দুইটিতে যথাক্রমে y ও x অনুপস্থিত। কিন্তু সমীকরণ তিনটির প্রত্যেকটিতেই অন্তরকল বা অন্তরকলজ বর্তমান থাকায়, উহারা সকলেই অন্তরকল সমীকরণ। সুতরাং অন্তরকল সমীকরণে অধীন ও স্বাধীন চল উভয়েই বা যে কোনটি প্রত্যক্ষভাবে উপস্থিত নাও থাকিতে পারে।

যে অন্তরকল সমীকরণে উপস্থিত অন্তরকলজগুলি একটি মাত্র স্বাধীন চলের সাপেক্ষে অন্তরকলনের দ্বারা পাওয়া যায়, সেই অন্তরকল সমীকরণকে **সাধারণ অন্তরকল সমীকরণ** (ordinary differential equation) বলে। এই পুস্তকে আমাদের আলোচ্য সাধারণ অন্তরকল সমীকরণ। অতঃপর অন্তরকল সমীকরণ বলিতে সাধারণ অন্তরকল সমীকরণকেই বুঝাইবে এবং সাধারণ বিশেষণটি আর ব্যবহার করা হইবে না।

§ 5·2. অন্তরকল সমীকরণের ক্রম ও ঘাত (Order and degree of a differential equation).

কোন অন্তরকল সমীকরণে উপস্থিত অন্তরকলজ (বা অন্তরকল)-সমূহের

মধ্যে সর্বোচ্চ ক্রমের বা মাত্রার অন্তরকলজ (বা অন্তরকল)-এর ক্রমটিকে ঐ সমীকরণটির ক্রম (order) বলে।

$$\text{সুতরাং } y\frac{dy}{dx}=2a \qquad \cdots(1)$$

$$x\,dy=y\,dx \qquad \cdots(2)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x^2+y^2 \qquad \cdots(3)$$

ঐ অন্তরকল সমীকরণ তিনটি, প্রথম ক্রমের সমীকরণ (equation of the first order)

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0 \qquad \cdots(4)$$

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=x^3 \qquad \cdots(5)$$

এই অন্তরকল সমীকরণ দুইটি, দ্বিতীয় ক্রমের সমীকরণ (Equation of the second order)-এর উদাহরণ।

অনুরূপে তৃতীয়, চতুর্থ……n-তম ক্রমের অন্তরকল সমীকরণের উদাহরণ দেওয়া যাইতে পারে।

আবার কোন অন্তরকল সমীকরণে উপস্থিত সর্বোচ্চ ক্রমের অন্তরকলজের ঘাত (power)-কে সমীকরণটির ঘাত বলা হয়।

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ সমীকরণটিতে অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx}$-এর সর্বোচ্চ ঘাত 1. সুতরাং সমীকরণটি প্রথম ক্রমের ও প্রথম ঘাতের (of the first order and first degree).

$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{d^2y}{dx^2}=x^3$ সমীকরণটিতে দুইটি অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx}$ ও $\frac{d^2y}{dx^2}$ উপস্থিত। ইহাদের মধ্যে সর্বোচ্চ ক্রমের অন্তরকলজ $\frac{d^2y}{dx^2}$-এর ঘাত 1. সুতরাং সমীকরণটি একটি দ্বিতীয় ক্রমের এবং প্রথম ঘাতের অন্তরকল-সমীকরণ।

$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0$ সমীকরণটি দ্বিতীয় ক্রমের কিন্তু প্রথম ঘাতের; কারণ, এখানে $\frac{d^2y}{dx^2}$-এর সর্বোচ্চ ঘাত 1. অনুরূপে n-তম ক্রমের এবং m-তম ঘাতের অন্তরকল সমীকরণের উদাহরণ দেওয়া যাইতে পারে।

একক্ষণে, $$\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\rho, \quad \cdots\text{(i)}$$ সমীকরণটি লওয়া যাক।

এই সমীকরণটিকে,

$$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\rho\frac{d^2y}{dx^2}$$

বা, $$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3=\rho^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$ [উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া]

বা, $$\rho^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-1-3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-3\left(\frac{dy}{dx}\right)^4-\left(\frac{dy}{dx}\right)^6=0 \cdots \text{(ii)}$$ আকারে লেখা যায়।

এক্ষণে, সমীকরণ-(ii), সমীকরণ-(i)-এর ভগ্নাংশ ও মূলচিহ্ন বা ভগ্নাংশ ঘাত (fractional power) মুক্ত আকার। সমীকরণ-(ii) স্পষ্টত: একটি দ্বিতীয় ক্রমের এবং দ্বিতীয় ঘাতের অন্তরকল সমীকরণ। এইজন্য সমীকরণ (i)-কেও একটি দ্বিতীয় ক্রমের ও দ্বিতীয় ঘাতের অন্তরকল সমীকরণ বলা হয়।

অনুরূপে, $$x+\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=a$$ সমীকরণটিকে

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=a-x$$

বা, $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(a-x)^2\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}$$

আকারে লিখিয়া বুঝা যায় যে, সমীকরণটির ঘাত 2 ; স্পষ্টত: সমীকরণটির ক্রম 1. সুতরাং উপরের আলোচনা হইতে বলা যায় যে, ভগ্নাংশ এবং মূলচিহ্ন বা ভগ্নাংশ ঘাতমুক্ত কোন অন্তরকল সমীকরণে উপস্থিত সর্বোচ্চ ক্রমের অন্তরকলজ বা অন্তরকলের ঘাতকে সমীকরণটির ঘাত বলা হয়। সমীকরণটিতে ভগ্নাংশ বা মূলচিহ্ন থাকিলে, প্রথমে সমীকরণটিকে ভগ্নাংশ বা মূলচিহ্নমুক্ত করিয়া পরিবর্তিত আকার হইতে সমীকরণটির ঘাত নির্ণয় করিতে হয়।

§ 5·3. **অন্তরকল সমীকরণের উৎপত্তি** (Formation of differential equations) :

তোমরা জান, $x^2+y^2-2ax=0$ সমীকরণটি একটি মূলবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ এবং বৃত্তটির কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত। এক্ষণে a-র বিভিন্ন মানের জন্য $x^2+y^2-2ax=0\cdots(1)$ সমীকরণটি মূলবিন্দুগামী এবং কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত হইবে এইরূপ বিভিন্ন বৃত্তের সমীকরণ হইবে। সুতরাং $x^2+y^2-2ax=0$ বিশেষ এক শ্রেণীর বৃত্ত (a family of circles)-এর সমীকরণ। এই সমীকরণে ধ্রুবক a-কে **প্যারামিটার** (parameter) বলা হয়। এক্ষণে, সমীকরণ-(1)-এর উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই, $2x+2y\dfrac{dy}{dx}-2a=0$ বা, $a=x+y\dfrac{dy}{dx}\quad\cdots(2)$

a-র এই মান সমীকরণ-(1)-এ বসাইয়া পাই,

$$x^2+y^2-2\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)x=0$$

বা, $$y^2-2xy\frac{dy}{dx}-x^2=0 \qquad \ldots(3)$$

দেখ, সমীকরণ-(3), a-মুক্ত। সমীকরণ-(3)-কে সমীকরণ-(1) দ্বারা প্রকাশিত বৃত্তশ্রেণীর অন্তরকল সমীকরণ বলা হয়। আরও লক্ষ্য কর যে সমীকরণ-(1)-এ একটি মাত্র স্বেচ্ছ-ধ্রুবক (arbitrary constant) বা প্যারামিটার আছে ; এবং সমীকরণটির উভয়পক্ষের একবার মাত্র অন্তরকলন করিয়া সমীকরণ-(2) পাওয়া গিয়াছে। সমীকরণ (1) ও (2) হইতে a-র অপনয়ন (elimination) করিয়া অন্তরকল-সমীকরণ (3) পাওয়া গেল। এইবার দুইটি প্যারামিটারবিশিষ্ট একটি সমীকরণ লইয়া আলোচনা করা হইতেছে।

$y=mx+c\cdots(4)$ সমীকরণে m এবং c প্যারামিটার। m এবং c-র বিভিন্ন মানের জন্য সমীকরণ-(4) বিভিন্ন সরলরেখার সমীকরণ।

এক্ষণে, সমীকরণ-(4)-এর উভয়পক্ষের অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{dy}{dx}=m \qquad \cdots(5)$$

এই অন্তরকলনের ফলে সমীকরণ-(4)-এর c প্যারামিটারটি অপনীত

হইল ; m প্যারামিটারটি অপনীত করার জন্য আর একবার অন্তরকলন করা প্রয়োজন। সমীকরণ (5)-এর উভয়পক্ষের অন্তরকলন করিয়া পাই

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0 \qquad \cdots(6)$$

সমীকরণ (6)-এ m এবং c উভয় প্যারামিটারই অনুপস্থিত। সমীকরণ (6)-কে $y=mx+c$ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখা শ্রেণীর অন্তরকল সমীকরণ বলে।

কোন সমীকরণে n-সংখ্যক নিরপেক্ষ (independent) (দ্রষ্টব্য 1 দেখ।) প্যারামিটার উপস্থিত থাকিলে, সমীকরণটির উভয়পক্ষের n সংখ্যক বার ক্রমান্বয়ে অন্তরকলন করিয়া মোট প্রাপ্ত $(n+1)$ সংখ্যক সমীকরণ হইতে ঐ n-সংখ্যক প্যারামিটারের অপনয়ন করা হয়। ঐ n-সংখ্যক প্যারামিটার অপনয়ন করিয়া যে অন্তরকল সমীকরণ পাওয়া যায়, তাহা প্রদত্ত সমীকরণ হইতে উদ্ভূত অন্তরকল সমীকরণ।

5·4. অন্তরকল সমীকরণের সমাধান (Solution of a differential equation) :

কোন অন্তরকল সমীকরণের অন্তর্গত অন্তরকল বা অন্তরকলজমুক্ত কোন সম্পর্ক যদি অন্তরকল সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে, তবে ঐ সম্পর্কটিকে সমীকরণটির একটি সমাধান বলে। অর্থাৎ কোন সমীকরণের সমাধানের উভয় পক্ষের এক বা একাধিকবার অন্তরকলন করিয়া সমীকরণটি পাওয়া যায়।

$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0$ সমীকরণটি লইয়া আলোচনা করা যাক।

মনে কর, $y=e^{2x}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=2e^{2x}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}=4e^{2x}$

সুতরাং সমীকরণটির বামপক্ষ$=4e^{2x}-5.2e^{2x}+6.e^{2x}=0.$

অতএব $y=e^{2x}$ সম্পর্কটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় এবং ইহা অন্তরকলজ মুক্ত। সুতরাং $y=e^{2x}$ সমীকরণটির একটি সমাধান।

এক্ষণে, যদি $y=Ae^{2x}$ হয়,

তবে, $\frac{dy}{dx}=2Ae^{2x}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}=4Ae^{2x}.$

এখন, সমীকরণটির বামদিকে $\frac{d^2y}{dx^2}$ এবং $\frac{dy}{dx}$-এর এই মান দুইটি বসাইয়া দেখা যায় যে, $y=Ae^{2x}$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। সুতরাং $y=Ae^{2x}$ সমীকরণটির একটি সমাধান। আবার $y=e^{3x}$ এবং $y=Be^{3x}$ উভয়েই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। সুতরাং $y=e^{3x}$ এবং $y=Be^{3x}$ উভয়েই সমীকরণটির সমাধান।

এক্ষণে, যেহেতু $y=Ae^{2x}$ এবং $y=Be^{3x}$ সমীকরণটির সমাধান, সুতরাং $y=Ae^{2x}+Be^{3x}$ ও সমীকরণটির সমাধান হইবে।

$y=Ae^{2x}+Be^{3x}$ [যেখানে, A ও B দুইটি স্বেচ্ছ ধ্রুবক (arbitrary consatnts)]-কে $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0$ অন্তরকল সমীকরণের **সাধারণ সমাধান** বলা হয়। কোন অন্তরকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান (general solution) বলিতে কি বুঝায়, সে সম্বন্ধে নীচে বলা হইতেছে।

কোন অন্তরকল সমীকরণের যে সমাধানে সমীকরণটির ক্রমের সমান সংখ্যক পরস্পর নিরপেক্ষ স্বেচ্ছ-ধ্রুবক থাকে, সেই সমাধানটিকে সমীকরণটির সাধারণ সমাধান বলা হয়।

দ্রষ্টব্য। 1. $y=\log\frac{x}{a}+c$ সম্পর্কে a ও c দুইটি ধ্রুবক। কিন্তু $\log\frac{x}{a}+c$-কে $\log x-\log a+c=\log x+k$ ($c-\log a=k$ ধরিয়া) আকারে লেখা যায়।

অর্থাৎ দুইটি ধ্রুবককে একটিমাত্র ধ্রুবকে পরিণত করা যায়। এখানে a ও c ধ্রুবক দুইটি পরস্পরের নিরপেক্ষ নয়।

অনুরূপে, $y=Ae^{a+x}$ সম্পর্কটিকে $y=Ae^{a}.e^{x}=Be^{x}$ আকারে একটি মাত্র স্বেচ্ছ-ধ্রুবক দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

যদি n-সংখ্যক স্বেচ্ছ-ধ্রুবকসমন্বিত কোন সম্পর্ককে n-অপেক্ষা কম সংখ্যক স্বেচ্ছ ধ্রুবকসমন্বিত কোন সম্পর্ক দ্বারা প্রকাশ করা না যায়, তবে ঐ n-সংখ্যক স্বেচ্ছ-ধ্রুবককে পরস্পরের নিরপেক্ষ বলা হয়।

2. § 5·3. এ দেখা গিয়াছে যে কোন সমীকরণ হইতে একটি প্যারামিটার অপনয়নের জন্য একবার অন্তরকলন করিতে হয় এবং অপনীতক (eliminant) একটি প্রথম ক্রমের অন্তরকল সমীকরণ। কোন সমীকরণ হইতে দুইটি প্যারামিটার অপনয়নের ফলে অপনীতক হয় একটি দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকল

সমীকরণ। অনুরূপে n-ক্রমের অন্তরকল সমীকরণে n-সংখ্যক নিরপেক্ষ স্বেচ্ছ-ধ্রুবক থাকিবে।

3. কোন অন্তরকল সমীকরণের সমাধান নির্ণয় বলিতে সাধারণ সমাধান নির্ণয় বুঝায়।

4. সাধারণ সমাধানে স্বেচ্ছ-ধ্রুবকসমূহের বিশেষ মান বসাইয়া বিশেষ সমাধান পাওয়া যায়।

অনুশীলনী V(A)

1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির ক্রম ও ঘাত নির্ণয় কর :—

(i) $\dfrac{dy}{dx}=\sin x$. (ii) $x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-2xy\dfrac{dy}{dx}+2y^2-x^2=0$

(iii) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-a\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0$. (iv) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-7\dfrac{dy}{dx}+12y=0$.

(v) $y-\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}(x^2+y^2)$.

2. নিম্নলিখিত সম্পর্কসমূহ হইতে অন্তরকল সমীকরণ গঠন কর।

(i) $xy=c^2$. (ii) $y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$.

(iii) $ax^2+by^2=1$. [C. U. 1945]

(iv) $y=ax+bx^2$. (v) $r=a+b\cos\theta$.

3. $ay^2=(x-c)^3$ সমীকরণ হইতে c অপনয়ন কর।

4. প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দুগামী সরলরেখাশ্রেণীর অন্তরকল সমীকরণ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$.

§5·5. **চলের বিচ্ছেদ দ্বারা প্রথম ক্রম ও প্রথমঘাতের অন্তরকল সমীকরণের সমাধান** (Solution of differential equations of the first order and of the first degree by the method of separation of variables).

তোমরা জান সকল সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করা যায় না। সকল অন্তরকল সমীকরণও সমাধানযোগ্য নহে। কি শর্তে কোন অন্তরকল সমীকরণ সমাধানযোগ্য হয়, প্রাথমিক স্তরে তাহার আলোচনা নিষ্প্রয়োজন। আবার সমাধানযোগ্য বিভিন্ন অন্তরকল সমীকরণের সমাধান প্রণালী ও বিভিন্ন। এই পুস্তকে কেবলমাত্র একটি বিশেষ প্রকার প্রথম ক্রমের

এবং প্রথমঘাতের অন্তরকল সমীকরণের সমাধান সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে। প্রথম ক্রম ও প্রথম ঘাতের যে সকল অন্তরকল সমীকরণের সমাধান **চলের বিচ্ছেদ প্রণালী** (method of separation of variables)-তে করা যায়, এই অধ্যায়ে সেই সকল সমীকরণ সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে। কোন প্রথম ক্রম ও প্রথম ঘাতের অন্তরকল সমীকরণকে $f_1(x)dx+f_2(y)dy=0$ বা, $f_1(x)dx=f_2(y)dy$ আকারে প্রকাশ করা যাইলে বলা হয় যে সমীকরণটিতে চল দুইটি বিচ্ছিন্ন হইয়াছে [এখানে $f_1(x)$ ও $f_2(y)$ যথাক্রমে কেবলমাত্র x ও y-এর অপেক্ষক] চলের বিচ্ছেদ সাধারণতঃ (i) পর্যবেক্ষণের দ্বারা (By inspection) ও (ii) প্রতিস্থাপনের দ্বারা করা হয়।

5·6. পর্যবেক্ষণের সাহায্যে চলের বিচ্ছেদ দ্বারা অন্তরকল সমীকরণের সমাধান।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $xdx+ydy=0$.

এই সমীকরণে চলগুলি বিচ্ছিন্নই আছে ; সুতরাং সমাকলন করিয়া পাই,

$\int xdx+\int ydy=0$

বা, $\frac{x^2}{2}+c_1+\frac{y^2}{2}+c_2=0$

বা, $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=-c_1-c_2$

বা, $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=c.$ [$-c_1-c_2=c$ মনে করিয়া

বা, $x^2+y^2=2c$

বা, $x^2+y^2=a^2$ [$a^2=2c$ মনে করিয়া]

উদা. 2. $(1-x)dy-(1+y)dx=0.$

বা, $(1-x)dy=(1+y)dx,$

বা, $\frac{dy}{1+y}=\frac{dx}{1-x}$

উভয়পক্ষের সমাকলন করিয়া পাই,

$\log(1+y)=-\log(1-x)+\log c,$

বা, $\log(1+y)+\log(1-x)=\log c,$

বা, $\log\{(1+y)(1-x)\}=\log c.$

বা, $(1+y)(1-x)=c.$

উদা. 3. $\dfrac{dy}{dx}+\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}=0.$

বা, $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0$

উভয়পক্ষের সমাকলন করিয়া পাই,

$\sin^{-1}y+\sin^{-1}x=\sin^{-1}c$

বা, $\sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})=\sin^{-1}c.$

বা, $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c.$

উদা 4. সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :—

$\sec^2 x \tan y\, dx+\sec^2 y \tan x\, dy=0.$

বা, $\dfrac{\sec^2 x\, dx}{\tan x}+\dfrac{\sec^2 y\, dy}{\tan y}=0.$

বা, $\displaystyle\int\frac{\sec^2 x\, dx}{\tan x}+\int\frac{\sec^2 y\, dy}{\tan y}=c'.$

এক্ষণে, $\tan x=z$ মনে করিলে $\sec^2 x\, dx=dz,$

$\therefore\quad \displaystyle\int\frac{\sec^2 x\, dx}{\tan x}=\int\frac{dz}{z}=\log z=\log(\tan x).$

অনুরূপ, $\displaystyle\int\frac{\sec^2 y\, dy}{\tan y}=\log(\tan y)$

সুতরাং নির্ণেয় সাধারণ সমাধান,

$\log\tan x+\log\tan y=\log c\quad [\,c'=\log c\,]$

বা, $\log(\tan x\tan y)=\log c.$

বা, $\tan x\tan y=c$

উদা. 5. সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :—

$e^{x-y}\,dx+e^{y-x}\,dy=0$

বা, $\dfrac{e^x}{e^y}\,dx+\dfrac{e^y}{e^x}\,dy=0$

বা, $e^{2x}\,dx+e^{2y}\,dy=0,$

বা, $\int e^{2x}\,dx+\int e^{2y}\,dy=c',$

বা, $\dfrac{e^{2x}}{2}+\dfrac{e^{2y}}{2}=c'$

বা, $e^{2x}+e^{2y}=2c'=c.$

উদা. 6. সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :—

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y^2+y+1}{x^2+x+1}=0.$$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই

$$\frac{dy}{y^2+y+1}+\frac{dx}{x^2+x+1}=0,$$

বা, $\int\frac{dy}{y^2+y+1}+\int\frac{dx}{x^2+x+1}=c'$

এক্ষণে, $\int\frac{dy}{y^2+y+1}=\int\frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$=\int\frac{dz}{z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ [$z=y+\frac{1}{2}$ (ধরিয়া)]

$=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2(y+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right).$

অনুরূপে, $\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

সুতরাং নির্ণেয় সাধারণ সমাধান :—

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2y+1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}c.$$

[$c'=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}c$ ধরিয়া]

বা, $\tan^{-1}\frac{2y+1}{\sqrt{3}}+\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=\tan^{-1}c$

বা, $\tan^{-1}\frac{\frac{2y+1}{\sqrt{3}}+\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}=\tan^{-1}c.$

বা, $\frac{\frac{2x+2y+2}{\sqrt{3}}}{3-4xy-2x-2y-1}=c.$

বা, $\dfrac{2(x+y+1)}{2(1-2xy-x-y)}=\dfrac{c}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{A}$

বা, $A(x+y+1)=1-2xy-x-y$

বা, $2xy+x+y+A(x+y+1)=1.$

উদা. 7. $f'(x)=\log x$ এবং $f(1)=-5$ হইলে $f(x)$ নির্ণয় কর।

[C. U. 1964]

মনে কর $y=f(x)$.

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=f'(x)=\log x$

বা, $dy=\log x \, dx.$

বা, $\int dy=\int \log x \, dx$

বা, $y=\int 1.\log x=\log x.x-\int dx=x(\log x-1)+c.$

এক্ষণে যখন $x=1$, তখন $f(x)=f(1)=-5$

$\therefore \quad -5=1\,(\log 1-1)+c=-1+c \quad \therefore \quad c=-4$

সুতরাং $y=f(x)=x(\log x-1)-4.$

উদা. 8. $\dfrac{ds}{dt}=-\dfrac{s^2}{30}$ এবং যখন $t=0$, তখন $s=15$ হইলে, t-র মান নির্ণয় কর যখন $s=10.$

$\dfrac{ds}{dt}=-\dfrac{s^2}{30}$

বা, $-\dfrac{ds}{s^2}=\dfrac{1}{30}dt$

বা, $\int -\dfrac{ds}{s^2}=\int \dfrac{1}{30}dt$

বা, $\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{30}t+c.$

এক্ষণে, যখন $t=0$, তখন $s=15$

$\therefore \quad \frac{1}{15}=\frac{1}{30}.0+c, \quad \therefore \quad c=\frac{1}{15}$

$\therefore \quad \dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{30}t+\dfrac{1}{15}.$

এক্ষণে, যখন $s=10$,

তখন $\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{30}t+\dfrac{1}{15}$

বা, $\frac{1}{30}t=\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{1}{30}$

$\therefore \quad t=1.$

উদা. 9. $\frac{dt}{dQ}=-\frac{CR}{Q}$ এবং $C=0.006$ ও $R=75$;

যখন $t=0$, তখন $Q=10$ হইলে Q দ্বারা t-কে প্রকাশ কর।

$$\frac{dt}{dQ}=-\frac{CR}{Q}$$

বা, $dt=-CR\frac{dQ}{Q}$

বা, $\int dt=\int -CR\frac{dQ}{Q}$

বা, $t=-CR\log Q+A.$

$$=CR\log\frac{1}{Q}+A$$

এক্ষণে, যখন $t=0$, তখন $Q=10$ হওয়ায় $0=CR\log\frac{1}{10}+A$

$\therefore \quad A=-CR\log\frac{1}{10}$

$\therefore \quad t=CR\log\frac{1}{Q}-CR\log\frac{1}{10}$

$$=CR\log\frac{10}{Q}$$

$$=\cdot 006\times 75\log\frac{10}{Q}=0\cdot 45\log\frac{10}{Q}$$

[C ও R-এর মান বসাইয়া].

উদা. 10. প্রমাণ কর যে, কোন বক্রের প্রত্যেক বিন্দুতে অভিলম্ব একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হইলে বক্রটি একটি বৃত্ত।

মনে কর নির্দিষ্ট বিন্দুটি মূলবিন্দু এবং আয়তঅক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে বক্রটির সমীকরণ $y=f(x)$. এক্ষণে, যে কোন বিন্দু (x, y)-এ বক্রটির অভিলম্বের প্রবণতা $-\frac{dx}{dy}$. আবার যেহেতু অভিলম্ব নির্দিষ্ট বিন্দু $(0, 0)$ দিয়া যায়, সুতরাং অভিলম্বের প্রবণতা $\frac{y}{x}$.

$$\therefore \quad -\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x}$$

বা, $-x\,dx=y\,dy$ বা, $x\,dx+y\,dy=0$ বা, $x^2+y^2=c$ এবং ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ।

অনুশীলনী V B

নিম্নের অন্তরকল সমীকরণসমূহের সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর।

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+1}{y+1}$　　2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+x+1}{y^2+y+1}$

3. $x\,dx-y\,dy=0$　　4. $y\,dx-x\,dy=xy\,dx$

5. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}$　　6. $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$

7. $\dfrac{dx}{x}-\dfrac{y\,dy}{1+y^2}=0$　　8. $dr+r\tan\theta\,d\theta=0$

9. একটি বক্র $y=f(x)$ এইরূপ যে $\dfrac{dy}{dx}=5e^x$ এবং যখন $x=0$, তখন $y=6$ হইলে $f(x)$ নির্ণয় কর।

10. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$ সমীকরণটির একটি বিশেষ সমাধান $y^2=4x$. সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর।

11. প্রমাণ কর যে, যে বক্রের অন্তরকল সমীকরণ $(1+y^2)dx-xy\,dy=0$ এবং যাহা $(2, \sqrt{3})$ বিন্দুগামী তাহার নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm\sqrt{2}, 0)$

12. যদি $x=0$ হইলে $y=\dfrac{\pi}{4}$ হয়, তবে

$$\cos y\,dx+(1+2e^{-x})\sin y\,dy=0$$

সমীকরণটির বিশেষ সমাধান নির্ণয় কর।

§ 57. প্রতিস্থাপন দ্বারা অন্তরকল সমীকরণের সমাধান (Solution of differential equation by substitution).

প্রথম ক্রম ও প্রথম ঘাতের সমীকরণের চল দুইটির বিচ্ছেদ পর্যবেক্ষণের দ্বারা সম্ভব না হইলেও অনেক সময় অধীন চলের প্রতিস্থাপন করিয়া নূতন চল ও স্বাধীন চলের বিচ্ছেদ করিয়া সমীকরণটির সমাধান করা যায়।

$\dfrac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ আকারবিশিষ্ট সমীকরণে $ax+by+c=z$ ধরিলে x ও z চলের একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে, যাহার চলদ্বয় পর্যবেক্ষণ দ্বারা সহজেই বিচ্ছিন্ন হইবে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর :

$$\log\left(\frac{dy}{dx}\right)=ax+by$$

মনে কর, $ax+by=z$

উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$a+b\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}, \quad \therefore \quad \frac{dv}{dx}=\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right)$$

এক্ষণে প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{dy}{dx}=e^{ax+by}, \text{ বা, } \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right)=e^{z}$$

বা, $\frac{dz}{dx}-a=be^{z}$, বা, $\frac{dz}{dx}=a+be^{z}$, বা, $\frac{dz}{a+be^{z}}=dx.$

বা, $\int\frac{dz}{a+be^{z}}=\int dx\cdots \quad \cdots(1)$

এক্ষণে, $\int\frac{dz}{a+be^{z}}=\int\frac{e^{-z}dz}{ae^{-z}+b}$

এখন মনে কর $ae^{-z}+b=u$

$\therefore \quad -ae^{-z}dz=du,$ বা, $e^{-z}dz=-\frac{1}{a}du$

$$\therefore \int\frac{dz}{a+be^{z}}=-\frac{1}{a}\int\frac{du}{u}=-\frac{1}{a}\log u$$

$$=-\frac{1}{a}\log(ae^{-z}+b).$$

সুতরাং (1) হইতে পাই,

$$-\frac{1}{a}\log(ae^{-z}+b)=x+\log c'$$

বা, $\log\left(\frac{a}{e^{z}}+b\right)+\log c=-ax.$ [$\log c=a\log c'$]

বা, $\log\left\{\left(\frac{a+be^{z}}{e^{z}}\right).c\right\}=-ax,$ বা, $\frac{a+be^{z}}{e^{z}}c=e^{-ax},$

বা, $\frac{a}{e^{z}}+b=Ae^{-ax}$ $\left[c=\frac{1}{A}\right]$

বা, $\frac{a}{e^{ax+by}}+b=Ae^{-ax}$ [$z=ax+by$ বসাইয়া]

বা, $ae^{-a-by}+b=Ae^{-ax}$

বা, $ae^{-by}+be^{ax}=A.$

দ্রষ্টব্য। $\dfrac{dy}{dx}=e^{ax+by}=e^{ax}.e^{by}$ লিখিয়া সহজেই চল দুইটি বিচ্ছিন্ন করা যায়। এখানে প্রতিস্থাপন পদ্ধতির প্রয়োগ দেখান হইল।

উদা. 2. সমাধান কর : $(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=a^2$

মনে কর, $x+y=z.$

$\therefore\quad 1+\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}$, বা, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}-1$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণ, $z^2\left(\dfrac{dz}{dx}-1\right)=a^2,$

বা, $z^2\dfrac{dz}{dx}-z^2=a^2,$ বা, $z^2\dfrac{dz}{dx}=z^2+a^2,$

বা, $\dfrac{z^2dz}{z^2+a^2}=dx,$ বা, $\displaystyle\int\frac{z^2dz}{z^2+a^2}=\int dx$

বা, $\displaystyle\int\frac{z^2+a^2-a^2}{z^2+a^2}\,dz=\int dx,$

বা, $\displaystyle\int dz-a^2\int\frac{dz}{z^2+a^2}=\int dx,$ বা, $z-a\tan^{-1}\dfrac{z}{a}=x-c$

বা, $(x+y)-a\tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{a}\right)=x-c$

বা, $y=a\tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{a}\right)-c$

বা, $\dfrac{y+c}{a}=\tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{a}\right)$ বা, $\dfrac{x+y}{a}=\tan\left(\dfrac{y+c}{a}\right).$

অনুশীলনী V (C)

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :

1. $(x-y)^2\dfrac{dy}{dx}=a^2.$ 2. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}.$ [C. U. '76]

3. $\dfrac{dy}{dx}+1=e^{x+y}.$ 4. $\cos^{-1}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=x+y.$

5. $\dfrac{dy}{dx}=f(ax+by+c).$

§ 5·8. প্রথম ক্রম ও প্রথম ঘাতের সমমাত্রিক সমীকরণের সমাধান (Solution of homogeneous equations of the first order and first degree).

পূর্ব অনুচ্ছেদে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে অন্তরকল সমীকরণের যে সমাধান পদ্ধতি দেখান হইল, তাহাতে অধীনচল প্রতিস্থাপনের কোন ধরা-বাঁধা নিয়ম নাই। বর্তমান ও পরবর্তী অনুচ্ছেদে কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে। এই অনুচ্ছেদে সমমাত্রিক সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ের প্রতিস্থাপন পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

সমমাত্রিক সমীকরণ : $f_1(x, y)dx+f_2(x, y)dy=0.$ ....(i)

আকারের কোন সমীকরণে যদি $f_1(x, y)$ এবং $f_2(x, y)$-এর উভয়ের প্রত্যেকটি পদে একই ঘাত হয়, তবে (1) আকারের সমীকরণকে প্রথম ক্রম ও প্রথম ঘাতের সমমাত্রিক অন্তরকল সমীকরণ বলা হয়।

$(x^2+y^2)dy-xy\,dx=0$ সমীকরণে x^2, y^2, xy প্রত্যেকটি পদের ঘাত 2. সুতরাং সমীকরণটি সমমাত্রিক।

$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}$ সমীকরণটিকে $x^2dy=(y^2-xy)dx$ আকারে লেখা যায়।

এক্ষণে এই আকারে x^2, y^2, xy, প্রত্যেকটির ঘাত 2 সুতরাং সমীকরণটি সমমাত্রিক। $(x^3+y^3)dy=x^2y\,dx$ সমীকরণটি তৃতীয় মাত্রার সমমাত্রিক সমীকরণ।

সমমাত্রিক সমীকরণ সমাধানের জন্য $y=vx$ বসাইয়া, পরিবর্তিত x ও v-র সমীকরণে x ও v-র সহজেই বিচ্ছেদ করা যায়। পরে, x ও v দ্বারা প্রকাশিত সাধারণ সমাধানে $v=\frac{y}{x}$ বসাইয়া, সাধারণ সমাধানটিকে x ও y দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $2\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}$.

সমীকরণটি সমমাত্রিক ; সুতরাং সমাধান নির্ণয়ের জন্য মনে কর,

$$y=vx, \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}. \text{ এবং } \frac{y}{x}=v, \frac{y^2}{x^2}=v^2.$$

সুতরাং সমীকরণটির পরিবর্তিত আকার হইল,

$$2\left(v+x\frac{dv}{dx}\right)=v+v^2. \quad \text{বা,} \quad 2v+2x\frac{dv}{dx}=v+v^2$$

বা, $2x\dfrac{dv}{dx}=v^2-v$

বা, $\dfrac{2dv}{v^2-v}=\dfrac{dx}{x}$; বা, $\displaystyle\int\frac{2dv}{v^2-v}=\int\frac{dx}{x}$ ...(1)

এক্ষণে, $\displaystyle\int\frac{2dv}{v^2-v}=\int\frac{2dv}{v(v-1)}=2\int\left(\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v}\right)dv$

$=2\log(v-1)-2\log v=2\log\dfrac{v-1}{v}.$

∴ (1) হইতে পাই, নির্ণেয় সমাধান

$2\log\dfrac{v-1}{v}=\log x+\log c$

বা, $\log\left(\dfrac{v-1}{v}\right)^2=\log cx$, বা, $\left(\dfrac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}}\right)^2=cx$

বা, $\dfrac{(y-x)^2}{y^2}=cx$ বা, $(y-x)^2=cxy^2$.

উদা. 2. $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0.$ [C. U.]

মনে কর $y=vx$. ∴ $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}.$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণ হইতে,

$(x^2+v^2x^2)-2x.vx\left(v+x\dfrac{dv}{dx}\right)=0,$

বা, $x^2(1+v^2)-2x^2v\left(v+x\dfrac{dv}{dx}\right)=0,$

বা, $1+v^2-2v\left(v+x\dfrac{dv}{dx}\right)=0,$ বা, $1+v^2-2v^2-2vx\dfrac{dv}{dx}=0$

বা, $1-v^2-2vx\dfrac{dv}{dx}=0$, বা, $1-v^2=2vx\dfrac{dv}{dx}$

বা, $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{2v\,dv}{1-v^2}$, বা, $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2v\,dv}{1-v^2},$

বা, $\log x=-\log(1-v^2)+\log c$

বা, $\log x+\log(1-v^2)=\log c$, বা, $\log\{x(1-v^2)\}=\log c$.

বা, $x.\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)=c$, বা, $x.\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right)=c$

বা, $\frac{x^2-y^2}{x}=c$, বা, $x^2-y^2=cx$.

উদা. 3. সমাধান কর :

$$x^2y\,dx-(x^3+y^3)\,dy=0$$

বা, $x^2y\,dx=(x^3+y^3)\,dy$, বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y}{x^3+y^3}$

এক্ষণে, মনে কর $y=vx$

$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের পরিবর্তিত আকার হইল

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{x^2vx}{x^3+v^3x^3}=\frac{v}{1+v^3},$$

বা, $x\frac{dv}{dx}=\frac{v}{1+v^3}-v=\frac{-v^4}{1+v^3}$, বা, $\frac{(1+v^3)}{v^4}\,dv+\frac{dx}{x}=0$

বা, $\int\frac{1+v^3}{v^4}dv+\int\frac{dx}{x}=\log c$,

বা, $\int\frac{1}{v^4}\,dv+\int\frac{1}{v}dv+\int\frac{dx}{x}=\log c$,

বা, $-\frac{1}{3v^3}+\log v+\log x=\log c$,

বা, $-\frac{x^3}{3y^3}+\log\frac{y}{x}.x=\log c$,

বা, $\log y-\log c=\frac{x^3}{3y^3}$, বা, $\log\frac{y}{c}=\frac{x^3}{3y^3}$

বা, $\frac{y}{c}=e^{\frac{x^3}{3y^3}}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ সমাধান $y=ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$.

অনুশীলনী V (D)

নিম্নলিখিত অন্তরকল সমীকরণগুলির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}$.   2. $(x^2+y^2)\,dy=xy\,dx$.

3. $x\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{x}=y$ 4. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x}{2x-y}$

5. $xy^2dy=(x^3+y^3)\,dx$

6. $\left(x+y\cos\frac{y}{x}\right)dx=x\cos\frac{y}{x}\,dy$.   [C. U. 1964]

§ 5·9. $\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ $\left(\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\right)$ আকারের সমীকরণের সমাধান :—

উপরের আকারের সমীকরণকে সমমাত্রিক সমীকরণে পরিণত করিয়া সহজেই সমাধান করা যায়। সমীকরণটিকে সমমাত্রিক করার জন্য $x=x'+h$ ও $y=y'+k$ ধরিতে হয়, যেখানে h ও k এমন ভাবে নির্বাচন করা হইবে যাহাতে পরিবর্তিত সমীকরণে কোন x বা y বিহীন পদ না থাকে।

$x=x'+h$ এবং $y=y'+k$ হইলে

$a_1x+b_1y+c_1$ এবং $a_2x+b_2y+c_2$ যথাক্রমে

$a_1x'+b_1y'+a_1h+b_1k+c_1$ এবং $a_2x'+b_2y'+a_2h+b_2k+c_2$ আকারে পরিণত হয়। যেহেতু পরিবর্তিত আকার দুইটিতে কোন x, y বিহীন পদ থাকিবে না,

$\therefore\quad a_1h+b_1k+c_1=0\cdots(1)$

এবং $a_2h+b_2k+c_2=0\cdots(2)$ হইবে।

যেহেতু $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, বা, $a_1b_2-a_2b_1\neq0$,

সুতরাং সমীকরণ (1) ও (2)-কে h ও k-র জন্য যুগপৎ সমাধান করা যাইবে এবং যুগপৎ সমাধান করিয়া পাই

$$\frac{h}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{k}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

বা, $h=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ এবং $k=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$

h এবং k-র এই দুইটি মানের জন্য $a_1x+b_1y+c_1$ এবং $a_2x+b_2y+c_2$-র আকার হইবে যথাক্রমে $a_1x'+b_1y'$ এবং $a_2x'+b_2y'$.

আবার, যেহেতু $x=x'+h$ ও $y=y'+k$

অতএব, $dx=dx'$ এবং $dy=dy'$.

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের পরিবর্তিত আকার হইল

$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{a_1x'+b_1y'}{a_2x'+b_2y'}$$

এই সমীকরণটি x' ও y'-এর একটি সমমাত্রিক সমীকরণ এবং § 5·8-এ প্রদর্শিত পদ্ধতিতে $y'=vx'$, ধরিয়া সমীকরণটি সমাধান করা যাইবে। কিন্তু নির্ণীত সাধারণ সমাধান x' ও y'-দ্বারা প্রকাশিত হইবে। যেহেতু প্রদত্ত সমীকরণের চল x ও y, সুতরাং $x'=x-h$ ও $y'=y-k$ লিখিয়া সাধারণ সমাধানকে x ও y-এর দ্বারা প্রকাশ করিবে।

উদাহরণ 1. সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :—

$$(2x+3y-5)\frac{dy}{dx}+(3x+2y-5)=0.$$ [C. U. 1962]

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x+2y-5}{2x+3y-5}.$$

এক্ষণে মনে কর, $x=x'+h$ ও $y=y'+k$

$\therefore\ dx=dx'$ ও $dy=dy'$ এবং প্রদত্ত সমীকরণের পরিবর্তিত আকার

$$\frac{dy'}{dx'}=-\frac{3x'+2y'+3h+2k-5}{2x'+3y'+2h+3k-5}$$

এক্ষণে h ও k এরূপে নির্বাচন কর যাহাতে

$3h+2k-5=0\cdots(1)$

এবং $2h+3k-5=0\cdots(2)$ হয়।

সমীকরণ (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই,

$$\frac{h}{-10+15}=\frac{k}{-10+15}=\frac{1}{9-4}$$

বা, $h=\frac{5}{5}=1$ এবং $k=\frac{5}{5}=1$

সুতরাং $x=x'+1$ ও $y=y'+1$ ধরা হইল এবং পরিবর্তিত সমীকরণ হইল

$$\frac{dy'}{dx'}=-\frac{3x'+2y'}{2x'+3y'}$$

এবং ইহা একটি সমমাত্রিক সমীকরণ। একণে, এই সমীকরণ সমাধানের জন্ত

মনে কর, $y'=vx'$; $\therefore \frac{dy'}{dx'}=v+x'\frac{dv}{dx'}$,

$$\therefore \quad v+x'\frac{dv}{dx'}=-\frac{3x'+2vx'}{2x'+3vx'}=-\frac{3+2v}{2+3v}$$

বা, $x'\frac{dv}{dx'}=-\frac{3+2v}{2+3v}-v=-\frac{3+4v+3v^2}{2+3v}$

বা, $\frac{3v+2}{3v^2+4v+3}dv=-\frac{dx'}{x'}$

একণে উভয়পক্ষের সমাকলন করিয়া পাই,

$$\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=-\int\frac{dx'}{x'} \quad \left[u=3v^2+4v+3, \text{ মনে করিয়া}\right]$$

বা, $\log u^{\frac{1}{2}}=-\log x'+\log c$

বা, $\log(3v^2+4v+3)^{\frac{1}{2}}+\log x'=\log c.$

বা, $\log(3v^2+4v+3)^{\frac{1}{2}}x'=\log c$

বা, $(3v^2+4v+3)\times x'^2=c^2=A$

বা, $\left(3\frac{y'^2}{x'^2}+4\frac{y'}{x'}+3\right)x'^2=A \quad \left[\because \ y'=vx', \ \therefore \ v=\frac{y'}{x'}\right]$

বা, $3y'^2+4x'y'+3x'^2=A$

বা, $3(y-1)^2+4(x-1)(y-1)+3(x-1)^2=A$

$[\because x=x'+1, \quad \therefore \quad x'=x-1$;

এবং $y=y'+1, \quad \therefore \quad y=y-1]$

এবং ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

উদা. 2. সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :—

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5x-7y}{x-3y+4}.$$

মনে কর $x=x'+h$ ও $y=y'+k$,

$\therefore \quad dx=dx'$ ও $dy=dy'$

এবং $5x-7y=5(x'+h)-7(y'+k)=5x'-7y'+5h-7k.$

ও $x-3y+4=(x'+h)-3(y'+k)+4=x'-3y'+h-3k+4.$

এক্ষণে, h ও k-র মান এরূপে লইতে হইবে যাহাতে,

$5h-7k=0\cdots(1)$ এবং $h-3k+4=0\cdots(2)$ হয়,

(1) হইতে পাই, $k=\frac{5}{7}h.$

$\therefore$ (2) হইতে পাই, $h-\frac{15}{7}h+4=0$

বা, $-\frac{8h}{7}=-4$ বা, $h=\frac{7}{2}.$ $\therefore$ $k=\frac{5}{7}h=\frac{5}{7}\times\frac{7}{2}=\frac{5}{2}.$

এক্ষণে, h ও k-র এই মানের জন্য প্রদত্ত সমীকরণের আকার হইল

$$v+x'\frac{dv}{dx'}=\frac{5x'-7vx'}{x'-3vx'} \qquad [\ y'=vx' \text{ ধরিয়া}\ ]$$

বা, $x'\frac{dv}{dx'}=\frac{5-7v}{1-3v}-v=\frac{3v^2-8v+5}{1-3v}$

বা, $\frac{(1-3v)\,dv}{3v^2-8v+5}=\frac{dx'}{x'}$, বা, $\int\frac{(1-3v)\,dv}{3v^2-8v+5}=\int\frac{dx'}{x'}$

এক্ষণে, $\int\frac{(1-3v)\,dv}{3v^2-8v+5}=\int\left\{\frac{1}{v-1}-\frac{6}{3v-5}\right\}dv.$

$$=\log(v-1)-2\log(3v-5)=\log\frac{v-1}{(3v-5)^2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ সমাধান,

$\log\frac{v-1}{(3v-5)^2}=\log x'-\log c$

বা, $\log\frac{\frac{y'}{x'}-1}{\left(\frac{3y'}{x'}-5\right)^2}=\log\frac{x'}{c}$, বা, $\frac{(y'-x')}{(3y'-5x')^2}=\frac{1}{c}$

বা, $\frac{(y-\frac{5}{2}-x+\frac{7}{2})}{(3y-\frac{15}{2}-5x+\frac{35}{2})^2}=\frac{1}{c}$ $\left[\begin{matrix}x'=y-\frac{5}{2}\\ y'=x-\frac{7}{2}\end{matrix}\right]$

বা, $\frac{(y-x+1)}{(3y-5x+10)^2}=\frac{1}{c}$

বা, $(3y-5x+10)^2=c(y-x+1)$

[দ্রষ্টব্য : $\frac{1-3v}{3v^2-8v+5}=\frac{1-3v}{(3v-5)(v-1)}=\frac{A}{3v-5}+\frac{B}{v-1}$ মনে করিলে $A+3B=-3$ এবং $-A-5B=1$; সুতরাং $B=1$ এবং $A=-6.$

$$\therefore \quad \frac{1-3v}{3v^2-8v+5}=-\frac{6}{3v-5}+\frac{1}{v-1}$$ (পরিশিষ্ট দেখ)]

§ 5·10. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ হইলে,

$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ আকারের সমীকরণের সমাধান :—

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ হইলে পূর্ব অনুচ্ছেদের প্রণালীতে $\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ ...(1)

আকারের সমীকরণের সমাধান করা যাইবে না। কারণ, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ বা, $a_1b_2-a_2b_1=0$ হওয়ায় পূর্ব অনুচ্ছেদের ন্যায় h ও k-র মান নির্ণয় করা যাইবে না। এইজন্য এইক্ষেত্রে নিম্নপ্রদর্শিত পদ্ধতি অনুসরণ করিবে।

পদ্ধতি :— মনে কর $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{1}{m}$.

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের আকার হইবে,

$$\frac{dv}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{m(a_1x+b_1y)+c_2} \quad \cdots(2)$$

এক্ষণে মনে কর $a_1x+b_1y=z$.

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx}=a_1+b_1\frac{dy}{dx}, \quad \text{বা,} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_1}\left(\frac{dz}{dx}-a_1\right)$$

সুতরাং এখন সমীকরণ (1) অথবা (2)-এর আকার হইবে

$$\frac{1}{b_1}\left(\frac{dz}{dx}-a_1\right)=\frac{z+c_1}{mz+c_2}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{dz}{dx}=a_1+\frac{b_1(z+c_1)}{mz+c_2}=\frac{z(a_1m+b_1)+c_2a_1+b_1c_1}{mz+c_2}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{(mz+c_2)dz}{z(a_1m+b_1)+c_2a_1+b_1c_1}=dx.$$

এক্ষণে, চল দুইটি বিচ্ছিন্ন হইল এবং উভয়পক্ষের সমাকলন করিয়া সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করা যাইবে।

উদাহরণ 1. সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :—

$$(2x+4y+3)\frac{dy}{dx}=2y+x+1$$

প্রদত্ত সমীকরণ :

$$(2x+4y+3)\frac{dy}{dx}=2y+x+1,$$

বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$

বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+1}{2(x+2y)+3}$ ···(1)

এক্ষণে, মনে কর, $x+2y=v$ $\therefore$ $1+2\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$

বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}-1\right),$

সুতরাং (1) হইতে পাই,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}-1\right)=\frac{v+1}{2v+3}$$

বা, $\frac{dv}{dx}-1=\frac{2v+2}{2v+3}$; বা, $\frac{dv}{dx}=\frac{2v+2}{2v+3}+1=\frac{4v+5}{2v+3}$

বা, $\frac{(2v+3)dv}{4v+5}=dx,$

বা, $\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{4v+5+1}{4v+5}\right\}dv=dx,$ বা, $\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4v+5}\right\}dv=dx.$

বা, $\int\frac{1}{2}dv+\frac{1}{2}\int\frac{dv}{4v+5}=\int dx.$

বা, $\frac{1}{2}v+\frac{1}{8}\log(4v+5)=x+c'$

বা, $\frac{1}{2}(x+2y)+\frac{1}{8}\log(4x+8y+5)=x+c'$

বা, $\frac{1}{8}\log(4x+8y+5)=-y+\frac{x}{2}+\frac{c}{2}=\frac{x-2y+c}{2}$

বা, $\log(4x+8y+5)=4x-8y+4c=4x-8y+A.$

উদা. 2. সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :—

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{2x+2y+1}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{2(x+y)+1}$$

ধরে কর, $x+y=z$ $\therefore$ $1+\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$, বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$.

একণে, প্রদত্ত সমীকরণের আকার হইল,

$$\frac{dz}{dx}-1=\frac{z+1}{2z+1}$$

বা, $\frac{dz}{dx}=\frac{z+1}{2z+1}+1=\frac{3z+2}{2z+1}$

বা, $\frac{(2z+1)dz}{3z+2}=dx$

বা, $\int\frac{(2z+1)dz}{3z+2}=\int dx.$ $\cdots$ $\cdots(1)$

একণে, $\int\frac{(2z+1)dz}{3z+2}=\int\left(\frac{2}{3}\frac{3z+2}{3z+2}-\frac{1}{3}\frac{1}{3z+2}\right)dz.$

$$=\frac{2}{3}z-\frac{1}{9}\log(3z+2).$$

সুতরাং (1) হইতে পাই,

$$\frac{2}{3}z-\frac{1}{9}\log(3z+2)=x+c.$$

বা, $\frac{2}{3}(x+y)-\frac{1}{9}\log(3x+3y+2)=x+c.$

বা, $\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}x=\frac{1}{9}\log(3x+3y+2)+c.$

বা, $6y-3x=\log(3x+3y+2)+9c$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান :—

$$6y-3x=\log(3x+3y+2)+A.$$

অনুশীলনী V (E)

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :—

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$; 2. $\frac{dy}{dx}=\frac{4x-5y+3}{5x-6y-2}$.

3. $(6x-5y+4)dy+(y-2x-1)dx=0$

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{6x-2y-7}{3x-y+4}$

5. $(x+y+1)dx-(2x+2y+1)dy=0$

6. $(2x+4y+3)dy=(2y+x+1)dx$ [C. U. 1963]

উদাহরণমালা 5

1. সমাধান কর : (i) $\frac{dy}{dx}+\frac{y(y-1)}{x(x-1)}=0.$

(ii) $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0.$

(i) $\frac{dy}{dx}+\frac{y(y-1)}{x(x-1)}=0$, বা, $\frac{dy}{y(y-1)}+\frac{dx}{x(x-1)}=0.$

বা, $\int\frac{dy}{y(y-1)}+\int\frac{dx}{x(x-1)}=\log c.\cdots(1)$

এক্ষণে, $\int\frac{dx}{x(x-1)}=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=\log\frac{x-1}{x}$

অনুরূপে, $\int\frac{dy}{y(y-1)}=\log\frac{y-1}{y}$

সুতরাং (1) হইতে পাই

$\log\frac{y-1}{y}+\log\frac{x-1}{x}=\log c$, বা, $\log\left\{\frac{(y-1)}{y}\cdot\frac{(x-1)}{x}\right\}=\log c.$

বা, $(x-1)(y-1)=cxy$ এবং ইহাই নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

(ii) $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$, বা, $\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0$

বা, $\int\frac{dx}{1+x^2}+\int\frac{dy}{1+y^2}=c'$, বা, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=c'$

বা, $\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}=\tan^{-1}c$, বা, $\frac{x+y}{1-xy}=c$

বা, $x+y=c(1-xy)$ এবং ইহাই নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

2. সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর : $x^2\frac{dy}{dx}+y=1$

$x^2\frac{dy}{dx}+y=1.$ বা, $x^2\frac{dy}{dx}=1-y$, বা, $\frac{dy}{1-y}=\frac{dx}{x^2}$

বা, $\int\frac{dy}{1-y}=\int\frac{dx}{x^2}$, বা, $-\log(1-y)=-\frac{1}{x}-\log c$

বা, $\log(1-y)=\frac{1}{x}+\log c$

বা, $\log\frac{1-y}{c}=\frac{1}{x}$, বা, $\frac{1-y}{c}=e^{\frac{1}{x}}$

বা, $1-y=ce^{\frac{1}{x}}$, বা, $y=1-ce^{\frac{1}{x}}$.

3. সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর : $\dfrac{dy}{dx}=e^{x-y}$.

$$\frac{dy}{dx}=e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}, \quad \therefore \quad e^y dy=e^x dx$$

$\therefore \quad \int e^y dy=\int e^x dx$, বা, $e^y=e^x+c$

4. সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :—

$y\,dx+(1+x^2)\tan^{-1}x\,dy=0$

বা, $$\frac{dx}{(1+x^2)\tan^{-1}x}+\frac{dy}{y}=0.$$

বা, $$\int\frac{dx}{(1+x^2)\tan^{-1}x}+\int\frac{dy}{y}=c' \cdots(1)$$

এক্ষণে $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$ নির্ণয়ের জন্য মনে কর,

$\tan^{-1}x=z$, $\therefore \quad \dfrac{dx}{1+x^2}=dz$.

$$\therefore \quad \int\frac{dx}{(1+x^2)\tan^{-1}x}=\int\frac{dz}{z}=\log z=\log(\tan^{-1}x)$$

$\therefore$ (1) হইতে পাই,

$\log(\tan^{-1}x)+\log y=\log c$ [$c'=\log c$ মনে করিয়া]

বা, $\log(y\tan^{-1}x)=\log c$ বা, $y\tan^{-1}x=c$.

5. সমাধান কর :—

$$\frac{\log(\sec x+\tan x)}{\cos x}dx=\frac{\log(\sec y+\tan y)}{\cos y}dy.$$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$\int\{\log(\sec x+\tan x)\}\sec x\,dx$

$=\int\{\log(\sec y+\tan y)\}\sec y\,dy \cdots(1)$

এক্ষণে $\int\{\log(\sec x+\tan x)\}\sec x\,dx$ নির্ণয়ের জন্য

মনে কর $z=\log(\sec x+\tan x)$

$$\therefore \quad dz=\frac{1}{\sec x+\tan x}(\sec x\tan x+\sec^2 x)dx$$

$$=\frac{1}{\sec x+\tan x}\sec x(\tan x+\sec x)dx=\sec x\,dx.$$

$$\therefore \quad \int \{\log(\sec x+\tan x)\}\sec x\, dx = \int z\, dz = \frac{z^2}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{\log(\sec x+\tan x)\}^2$$

অনুরূপে, $\int \{\log(\sec y+\tan y)\}\sec y\, dy$

$= \frac{1}{2}\{\log(\sec y+\tan y)\}^2$

সুতরাং (1) হইতে পাই,

$\frac{1}{2}\{\log(\sec x+\tan x)\}^2 = \frac{1}{2}\{\log(\sec y+\tan y)\}^2 + \frac{1}{2}c.$

বা, $\{\log(\sec x+\tan x)\}^2 - \{\log(\sec y+\tan y)\}^2 = c.$

6. সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :

(i) $(x+y)(dx-dy) = dx+dy$

(ii) $x\, dx + y\, dy + \dfrac{x\, dy - y\, dx}{x^2+y^2} = 0$

(i) $(x+y)(dx-dy) = dx+dy = d(x+y)$

$\therefore \quad dx - dy = \dfrac{d(x+y)}{x+y}$, বা, $x-y = \log(x+y) - \log c$

বা, $x - y = \log\dfrac{x+y}{c}$

বা, $\dfrac{x+y}{c} = e^{x-y}$, বা, $x+y = ce^{x-y}$.

(ii) $$\frac{x\, dy - y\, dx}{x^2+y^2} = \frac{\dfrac{x\, dy - y\, dx}{x^2}}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{d\left(\dfrac{y}{x}\right)}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$x\, dx + y\, dy + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0.$$

বা, $\int x\, dx + \int y\, dy + \int \dfrac{\quad}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = c'$

বা, $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \tan^{-1}\dfrac{y}{x} = c'$

বা, $x^2+y^2+2\tan^{-1}\frac{y}{x}=2c'=c$ এবং ইহাই নির্ণেয় সাধারণ সমাধান।

7. সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :—

$\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\cos(x+y)$.

মনে কর, $x+y=v$ $\therefore$ $1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই

$\frac{dv}{dx}-1=\sin v+\cos v$, বা, $\frac{dv}{dx}=1+\sin v+\cos v$.

বা, $\frac{dv}{1+\sin v+\cos v}=dx$, বা, $\frac{dv}{2\cos^2\frac{v}{2}+2\sin\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2}}=dx$,

বা, $\frac{\sec^2\frac{v}{2}\,dv}{2\left(1+\tan\frac{v}{2}\right)}=dx$

বা, $\frac{dz}{1+z}=dx$ [$z=\tan\frac{v}{2}$ মনে করিয়া ; $\therefore$ $dz=\sec^2\frac{v}{2}\cdot\frac{1}{2}dv.$]

বা, $\log(1+z)=x+\log c$. [সমাকলন করিয়া]

বা, $\log\frac{1+z}{c}=x$ বা, $\frac{1+z}{c}=e^x$ বা, $1+z=ce^x$

বা, $1+\tan\frac{v}{2}=ce^x$ বা, $1+\tan\frac{1}{2}(x+y)=ce^x$

এবং ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

8. সমাধান কর :—

(i) $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$. (ii) $\frac{dy}{dx}=(4x+y+1)^2$.

(i) মনে কর $x+y=v$, $\therefore$ $1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$, বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}-1$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই, $\frac{dv}{dx}-1=v^2$

বা, $\frac{dv}{dx}=v^2+1$, $\therefore$ $\frac{dv}{v^2+1}=dx$

বা, $\int\frac{dv}{1+v^2}=\int dx$ বা, $\tan^{-1}v=x+c$

বা, $\tan^{-1}(x+y)=x+c$ বা, $x+y=\tan(x+c)$

(ii) মনে কর, $4x+y+1=u$.

$\therefore\ 4+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$ বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-4$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$\frac{du}{dx}-4=u^2$ বা, $\frac{du}{dx}=u^2+4$

বা, $\frac{du}{u^2+4}=dx$ বা, $\int\frac{du}{u^2+4}=\int dx$

বা, $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2}=x+c'$ বা, $\tan^{-1}\frac{u}{2}=2x+2c'=2x+c$

বা, $\frac{u}{2}=\tan(2x+c)$ বা, $u=2\tan(2x+c)$

বা, $4x+y+1=2\tan(2x+c)$

এবং ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

9. সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :—

(i) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$ (ii) $x+y\frac{dy}{dx}=2y$.

(i) সমীকরণটি সমমাত্রিক ; সুতরাং মনে কর $y=vx$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ এবং $\frac{x^2+y^2}{2x^2}=\frac{x^2+v^2x^2}{2x^2}=\frac{1+v^2}{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}$ বা, $x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}-v=\frac{1-2v+v^2}{2}=\frac{(v-1)^2}{2}$

বা, $\frac{2dv}{(v-1)^2}=\frac{dx}{x}$ বা, $\int\frac{2dv}{(v-1)^2}=\int\frac{dx}{x}$

বা, $-\frac{2}{v-1}=\log x-\log c$ বা, $-\frac{2}{\frac{y}{x}-1}=\log\frac{x}{c}$

বা, $\frac{2x}{x-y}=\log\frac{x}{c}$ বা, $\frac{x}{c}=e^{\frac{2x}{x-y}}$ বা, $x=ce^{\frac{2x}{x-y}}$.

এবং ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

(ii) $y=vx$ বসাইয়া পাই,

$$x+vx\left(v+x\frac{dv}{dx}\right)=2vx \text{ বা, } v^2+1-2v+vx\frac{dv}{dx}=0$$

$$\text{বা, } (v-1)^2+vx\frac{dv}{dx}=0 \text{ বা, } \frac{dx}{x}+\frac{v\,dv}{(v-1)^2}=0$$

$$\text{বা, } \int\frac{dx}{x}+\int\frac{v-1}{(v-1)^2}dv+\int\frac{dv}{(v-1)^2}=0$$

$$\text{বা, } \log x+\log(v-1)-\frac{1}{v-1}-\log c=0$$

$$\text{বা, } \log\left\{\frac{x}{c}\left(\frac{y}{x}-1\right)\right\}=\frac{1}{\frac{v}{x}-1} \text{ বা, } \log\frac{y-x}{c}=\frac{x}{y-x}$$

$$\text{বা, } y-x=ce^{\frac{x}{y-x}}$$ এবং ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

10. প্রমাণ কর যে,

$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$

আকারের সমীকরণে $xy=v$ বসাইয়া চলের বিচ্ছেদ করা যায়।

মনে কর $xy=v$ $\therefore$ $y=\frac{v}{x}$ সুতরাং $dy=\frac{x\,dv-v\,dx}{x^2}$.

$$\therefore \quad x\,dy=dv-\frac{v}{x}dx.$$

সুতরাং এই প্রতিস্থাপনের ফলে প্রদত্ত সমীকরণের আকার হইবে

$$f(v)\frac{v}{x}dx+g(v)(dv-\frac{v}{x}dx)=0$$

$$\text{বা, } g(v)dv+\frac{v}{x}dx\{f(v)-g(v)\}=0$$

$$\text{বা, } \frac{g(v)dv}{v\{g(v)-f(v)\}}=\frac{dx}{x}$$

এক্ষণে, v ও x চলদ্বয় বিচ্ছিন্ন হইল।

11. সমাধান কর :—

$y(2xy+1)dx+x(1+2xy+x^2y^2)dy=0$

মনে কর $xy=v$ $\therefore$ $y=\frac{v}{x}$. সুতরাং $dy=\frac{x\,dv-v\,dx}{x^2}$

$$\therefore \quad x\,dy=dv-\frac{v}{x}dx.$$

এক্ষণে, প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{v}{x}(2v+1)dx+(1+2v+v^2)\left(dv-\frac{v}{x}dx\right)=0$$

বা, $v(2v+1)dx+(1+v)^2(x\,dv-v\,dx)=0$

বা, $dx\{v(2v+1)-v(1+v)^2\}+(1+v)^2x\,dv=0$

বা, $\dfrac{(1+v)^2dv}{v(2v+1)-v(1+v)^2}+\dfrac{dx}{x}=0$

বা, $\dfrac{(1+v)^2dv}{2v^2+v-v-2v^2-v^3}+\dfrac{dx}{x}=0$

বা, $-\dfrac{(1+v)^2dv}{v^3}+\dfrac{dx}{x}=0$

বা, $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{1+2v+v^2}{v^3}dv$ বা, $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dv}{v^3}+2\int\frac{dv}{v^2}+\int\frac{dv}{v}$

বা, $\log x=-\dfrac{1}{2v^2}-\dfrac{2}{v}+\log v+\log c$

বা, $\log x-\log v-\log c=-\dfrac{1}{2v^2}-\dfrac{2}{v}$

বা, $\log\dfrac{x}{cv}=-\dfrac{1}{2x^2y^2}-\dfrac{2}{xy}=-\dfrac{1+4xy}{2x^2y^2}$

বা, $\log\dfrac{x}{cxy}=-\dfrac{1+4xy}{2x^2y^2}$ বা, $\log\dfrac{1}{cy}=-\dfrac{1+4xy}{2x^2y^2}$

বা, $-\log(cy)=-\dfrac{1+4xy}{2x^2y^2}$ বা, $\log(cy)=\dfrac{1+4xy}{2x^2y^2}$

বা, $cy=e^{\frac{1+4xy}{2x^2y^2}}$

এবং ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

12. সমাধান কর : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+9y-20}{6x+2y-10}$

মনে কর $x=x'+h$, $y=y'+k$ $\therefore$ $dx=dx'$, $dy=dy'$.

$$\therefore \frac{dy'}{dx'}=\frac{2(x'+h)+9(y'+k)-20}{6(x'+h)+2(y'+k)-10}$$

$$=\frac{2x'+9y'+(2h+9k-20)}{6x'+2y'+(6h+2k-10)}$$

এক্ষণে, $2h+9k-20=0$ এবং $6h+2k-10=0$ হইলে,

$h=1, k=2$. h ও k-এর এই মানের জন্য সমীকরণটির আকার হইল

$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{2x'+9y'}{6x'+2y'}.$$

এখন, মনে কর $y'=vx'$ $\therefore$ $\frac{dy'}{dx'}=v+x'\frac{dv}{dx'}$

$$\therefore \quad v+x'\frac{dv}{dx'}=\frac{2x'+9vx'}{6x'+2vx'}=\frac{2+9v}{6+2v}$$

বা, $x'\frac{dv}{dx'}=\frac{2+9v}{6+2v}-v=\frac{2+3v-2v^2}{6+2v}$

বা, $\frac{2v+6}{2+3v-2v^2}dv=\frac{dx'}{x'}$ বা, $\frac{(2v+6)}{(2v+1)(v-2)}dv+\frac{dx'}{x'}=0$

বা, $\frac{2}{v-2}dv-\frac{2}{2v+1}dv+\frac{dx'}{x'}=0$ (পরিশিষ্ট দেখ)

বা, $2\log(v-2)-\log(2v+1)+\log x'=\log c$ (উভয়পক্ষের সমাকলন করিয়া)

বা, $\log\frac{x'(v-2)^2}{2v+1}=\log c$ বা, $x'(v-2)^2=c(2v+1)$

বা, $x'\left(\frac{y'}{x'}-2\right)^2=c\left(2\frac{y'}{x'}+1\right)$ বা, $(y'-2x')^2=c(x'+2y')$

বা, $[(y-2)-2(x-1)]^2=c[(x-1)+2(y-2)]$

বা, $(y-2x)^2=c(x+2y-5)$.

13. সমাধান কর : $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x+y-2}$

মনে কর, $x+y=u$; $\therefore$ $1+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$\frac{du}{dx}-1=\frac{u}{u-2}$ বা, $\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-2}+1=\frac{2u-2}{u-2}$

বা, $\frac{(u-2)du}{2(u-1)}=dx$ বা, $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{u-1}\right)du=dx$

বা, $\frac{1}{2}\{u-\log(u-1)\}=x+\frac{\log c}{2}$ (উভয়পক্ষের সমাকলন করিয়া)

বা, $u-\log(u-1)=2x+\log c$

বা, $x+y-2x=\log(x+y-1)+\log c$

বা, $y-x=\log c(x+y-1)$ বা, $c(x+y-1)=e^{y-x}$

এবং ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

প্রশ্নমালা 5

সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :—

1. $x^2(y-1)dx+y^2(x-1)dy=0.$
2. $x\cos^2 y\, dx-y\cos^2 x\, dy=0.$
3. $(x^2-yx^2)dy+(y^2+xy^2)dx=0.$
4. $x^2(x\,dx+y\,dy)+2y(x\,dy-y\,dx)=0.$
5. $(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=a^2.$ 6. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x+y}.$
7. $\dfrac{dy}{dx}=\sin(x+y).$ 8. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x+2y}{2x-3y}.$
9. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(x-2y)}{x(x-3y)}.$ 10. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(y+x)}{x(y-x)}.$
11. $y^2dx+(x^2+xy)dy=0.$ 12. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}.$
13. $(x-3y+4)dy+(7y-5x)dx=0.$
14. $(x+y+1)dx-(3x+3y+1)dy=0.$
15. $RI+L\dfrac{dI}{dt}=0$ এবং $t=0$ হইলে $I=I_0$. [R এবং L ধ্রুবক]
16. $r\dfrac{dp}{dr}+2p=2A.$

পরিশিষ্ট

বৈজিক মূলদ ভগ্নাংশ রাশিমালার সমাকলন

(Integration of Algebraic Rational Fractions)

§ A·1. **বৈজিক মূলদ ভগ্নাংশ রাশিমালা :—**

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}\cdots\cdots\cdots+b_{m-1}\,x+b_m}$ (যেখানে a_0, $a_1\cdots$ $\cdots a_n$, b_0, $b_1\cdots\cdots$, b_m সহগগুলি বাস্তব সংখ্যা এবং n ও m ধনাত্মক অখণ্ডসংখ্যা) আকারের রাশিমালাকে **বৈজিক মূলদ ভগ্নাংশ রাশিমালা** বলা হয়। সুতরাং

$\dfrac{1}{x^2-5x+6}$, $\dfrac{1}{x^2-9}$, $\dfrac{1}{x^2+4}$, $\dfrac{ax^2+bx+c}{x^4}$, $\dfrac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}$, $\dfrac{x}{(x-1)(x^2-4)}$, $\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$ ইত্যাদি রাশিমালা বৈজিক মূলদ ভগ্নাংশ রাশিমালা।

ইতিপূর্বেই বিভিন্ন বৈজিক মূলদ ভগ্নাংশ রাশিমালার সমাকলন পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। বর্তমান অধ্যায়ে এই সকল রাশিমালার সমাকলন সম্বন্ধে ব্যাপকতর আলোচনা করা হইতেছে। এই আলোচনার পূর্বে বৈজিক মূলদ ভগ্নাংশ রাশিমালাকে কয়েকটি আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করিবার পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা করা প্রয়োজন।

§ A·2. **আংশিক ভগ্নাংশ** (Partial Fractions)

বর্তমান অনুচ্ছেদে বৈজিক মূলদ ভগ্নাংশ রাশিমালার লবের ঘাত, হরের ঘাত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে রাশিমালাটিকে একাধিক আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করিবার প্রণালী নিম্নলিখিত কয়েকটি ক্ষেত্রে বর্ণনা করা হইতেছে।

1. হরকে কয়েকটি বিভিন্ন বাস্তব সহগযুক্ত একঘাত রাশিমালার গুণফল রূপে প্রকাশ করা গেলে, রাশিমালাকে কয়েকটি আংশিক ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশের পদ্ধতি :—

উদাহরণ 1. $\dfrac{x}{x^2-5x+6}$-কে কয়েকটি আংশিক ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশ করিবার জন্য, মনে কর

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{x}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

একণে, $\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-3)}=\frac{x(A+B)-(3A+2B)}{(x-2)(x-3)}$

$\therefore \quad \frac{x}{(x-2)(x-3)}=\frac{x(A+B)-(3A+2B)}{(x-2)(x-3)}$

একণে, উভয়পক্ষের x-এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমান হইবে।

$\therefore \quad A+B=1$ এবং $3A+2B=0$.

সমাধান করিয়া পাই, $A=-2$ এবং $B=3$.

সুতরাং $\frac{x}{x^2-5x+6}=-\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}$

উপরের উদাহরণ হইতে নিম্নের নিয়মটি পাওয়া যায় :—

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ পরস্পর ভিন্ন হইলে, এবং $f(x)$-এর ঘাত n-অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে,

$\frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)}$ কে $\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-\alpha_n}$

আকারের n-সংখ্যক আংশিক ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশ করা যায়। $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$-এর মান উভয়পক্ষের $x^{n-1}, x^{n-2}, \cdots\cdots$ ও x^0 (বা ধ্রুবক পদ)-এর সহগগুলির সমতার সমীকরণসমূহ হইতে নির্ণয় করিতে হয়।

উদা. 2. $\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$কে কয়েকটি আংশিক ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ কর এবং $\int\frac{x^2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ নির্ণয় কর।

মনে কর, $\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$

একণে, $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$

$=\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-3)(x-1)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$=\frac{x^2(A+B+C)-x(5A+4B+3C)+6A+3B+2C}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$\therefore \quad \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$=\frac{x^2(A+B+C)-x(5A+4B+3C)+6A+3B+2C}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$\therefore \quad x^2=x^2(A+B+C)-x(5A+4B+3C)+6A+3B+2C.$

এখন উভয়পক্ষের x^2 ও x-এর সহগ এবং ধ্রুবকপদ সমান।

$\therefore$ A+B+C=1···(1) 5A+4B+3C=0···(2) এবং

6A+3B+2C=0···(3)

সমীকরণ (1), (2) ও (3) সমাধান করিয়া পাই $A=\frac{1}{2}$, $B=-4$ ও $C=\frac{9}{2}$.

$$\therefore \quad \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{4}{x-2}+\frac{9}{2(x-3)}$$

সুতরাং $\int\frac{x^2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\int\left\{\frac{1}{2(x-1)}-\frac{4}{x-2}+\frac{9}{2(x-3)}\right\}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)}-4\int\frac{dx}{x-2}+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-3}$$

$$=\frac{1}{2}\log(x-1)-4\log(x-2)+\frac{9}{2}\log(x-3)+c.$$

2. সবকয়টি বিভিন্ন নয়, এরূপ কয়েকটি বাস্তব সহগযুক্ত একঘাত রাশিমালার গুণফলরূপে কোন বৈজিক মূলদ ভগ্নাংশ রাশিমালার হরকে প্রকাশ করা গেলে, রাশিমালাটিকে কয়েকটি আংশিক ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশ করিবার পদ্ধতি :—

নিয়ম : হরের আকার $(x-a)(x-b)^m(x-c)^n$ হইলে, ভগ্নাংশটিকে

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_m}{(x-b)^m}+\frac{C_1}{(x-c)}$$

$$+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\cdots+\frac{C_n}{(x-c)^n}$$ আকারের $(1+m+n)$

সংখ্যক আংশিক ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশ করা যাইবে। উভয়পক্ষে x-এর সমান ঘাতের সহগগুলির সমতার সম্পর্ক হইতে $A, B_1, B_2, \cdots B_m$, $C_1, C_2, \cdots C_n$ ইত্যাদি নির্ণয় করা যাইবে।

উদাহরণ 1. $\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$কে কয়েকটি আংশিক ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ কর।

মনে কর, $\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$

এখন, $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$

$$=\frac{A(x+2)^2+B(x+1)(x+2)+C(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$=\frac{x^2(A+B)+x(4A+3B+C)+4A+2B+C}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{x^2(A+B)+x(4A+3B+C)+4A+2B+C}{(x+1)(x+2)^2}$$

$\therefore \quad x^2=x^2(A+B)+x(4A+3B+C)+4A+2B+C.$

এখন, উভয়পক্ষের x^2 ও x-এর সহগ এবং ধ্রুবকপদ সমান।

সুতরাং $A+B=1 \cdots (1)$, $4A+3B+C=0 \cdots (2)$,

$4A+2B+C=0 \cdots (3)$

সমীকরণ (1), (2) ও (3)-এর সমাধান করিয়া পাই,

$A=1$, $B=0$ ও $C=-4$.

$$\therefore \quad \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{1}{(x+1)}-\frac{4}{(x+2)^2}$$

সুতরাং $\displaystyle \int\frac{x^2\,dx}{(x+1)(x+2)^2}=\int\left\{\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}\right\}dx$

$$=\int\frac{1}{x+1}dx-4\int\frac{dx}{(x+2)^2}=\log(x+1)-4\left(-\frac{1}{x+2}\right)+c$$

$$=\log(x+1)+\frac{4}{x+2}+c.$$

উদা. 2. সমাকলন কর : $\displaystyle \int\frac{dx}{x(x+1)^2}$

মনে কর, $\displaystyle \frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$

একণে, $\displaystyle \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+C.x}{x(x+1)^2}$

$$=\frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}$$

বা, $1=x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A$

এখন, উভয়পক্ষের x^2 ও x-এর সহগ এবং ধ্রুবকপদ সমান।

$\therefore \quad A+B=0 \cdots (1)$, $2A+B+C=0 \cdots (2)$, $A=1 \cdots (3)$

সমীকরণ (1), (2) ও (3) সমাধান করিয়া পাই,

$A=1$, $B=-1$, $C=-1$.

$$\therefore \quad \frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

এবং $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}$

$$=\log x-\log(x+1)-\left(-\frac{1}{x+1}\right)+c$$

$$=\log\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}+c.$$

উদা. 3. সমাকলন কর : $\int\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}dx$ [P.P. 1931]

$x^3+x^2-6x=x(x^2+x-6)=x(x+3)(x-2)$

মনে কর $\frac{x^2+x-1}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}$

একণে, $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}$

$$=\frac{A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+3)}{x(x+3)(x-2)}$$

$\therefore\ \frac{x^2+x-1}{x(x+3)(x-2)}$

$$=\frac{A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+3)}{x(x+3)(x-2)}$$

$\therefore\quad x^2+x-1=A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+3)$

একণে, এই সমতার সম্পর্ক x-এর সকল মানের জন্য সত্য। সুতরাং উভয়পক্ষে ক্রমান্বয়ে $x=0$, -3 এবং 2 বসাইয়া পাই, $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{2}$.

$\therefore\quad \int\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}dx=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2}$

$=\frac{1}{6}\log x+\frac{1}{3}\log(x+3)+\frac{1}{2}\log(x-2)+c.$

দ্রষ্টব্য : প্রথম কয়েকটি উদাহরণে উভয়পক্ষের লবের x-এর বিভিন্ন ঘাতের সমতা হইতে প্রাপ্ত সমীকরণসমূহ সমাধান করিয়া A, B, C ইত্যাদি ধ্রুবকের মান নির্ণয় করা হইয়াছে। উদাহরণ 3-এ একটি বিকল্প পদ্ধতির সাহায্য লওয়া হইয়াছে। নিম্নের উদাহরণ 4-এ এই দুইটি পদ্ধতিরই সাহায্য লওয়া হইল। সুবিধামত বিভিন্ন পদ্ধতির সাহায্য লইতে হয়। তবে, প্রথম দুইটি উদাহরণে প্রদর্শিত পদ্ধতিটি সাধারণ পদ্ধতি ; কিন্তু অনেক সময়ই এই পদ্ধতিতে প্রাপ্ত সমীকরণসমূহের সমাধান সহজ হয় না।

উদা. 4. সমাকলন কর : $\int\frac{dx}{(x-a)^2(x-b)}$

মনে কর, $\dfrac{1}{(x-a)^2(x-b)}=\dfrac{A}{(x-a)^2}+\dfrac{B}{x-a}+\dfrac{C}{x-b}$

$$=\frac{A(x-b)+B(x-a)(x-b)+C(x-a)^2}{(x-a)^2(x-b)}$$

$\therefore\quad 1=A(x-b)+B(x-a)(x-b)+C(x-a)^2$

উভয়পক্ষে $x=a$ বসাইয়া পাই, $1=A(a-b)$; $\therefore\quad A=\dfrac{1}{a-b}$

আবার, উভয়পক্ষে $x=b$ বসাইয়া পাই, $1=C(b-a)^2$ $\therefore$ $C=\dfrac{1}{(b-a)^2}$

এক্ষণে, উভয়পক্ষের x^2-এর সহগ সমান বলিয়া,

$B+C=0\quad\therefore\quad B=-C=-\dfrac{1}{(b-a)^2}$

$\therefore\quad \dfrac{1}{(x-a)^2(x-b)}$

$$=\frac{1}{(a-b)}\cdot\frac{1}{(x-a)^2}-\frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{1}{x-a}+\frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{1}{x-b}$$

$\therefore\quad \displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^2(x-b)}$

$$=\frac{1}{a-b}\int\frac{dx}{(x-a)^2}-\frac{1}{(b-a)^2}\int\frac{dx}{x-a}+\frac{1}{(b-a)^2}\int\frac{dx}{x-b}$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(-\frac{1}{x-a}\right)-\frac{1}{(b-a)^2}\log(x-a)+\frac{1}{(b-a)^2}\log(x-b)+k$$

$$=\frac{1}{(b-a)(x-a)}+\frac{1}{(b-a)^2}\log\frac{x-b}{x-a}+k.$$

3. হরে বাস্তব সহগযুক্ত এক বা একাধিক পৃথক দ্বিঘাত উৎপাদক থাকিলে, বৈজিক মূলদ ভগ্নাংশ রাশিমালাকে আংশিক ভগ্নাংশের যোগফলে পরিণত করিলে হরের x^2+bx+c (বা x^2+c, $c\neq 0$) আকারের প্রত্যেক দ্বিঘাত উৎপাদকের জন্য একটি করিয়া $\dfrac{Ax+B}{x^2+bx+c}$ $\left(\text{বা } \dfrac{Ax+b}{x^2+c}\right)$ আকারের আংশিক ভগ্নাংশ পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. সমাকলন কর : $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^3-1}$

মনে কর, $\dfrac{x}{x^3-1}=\dfrac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$

$\therefore \quad x = A(x^2+x+1) + \; x-1 \; (Bx+c)$

উভয়পক্ষে $x=1$ বসাইয়া পাই, $1=3A \quad \therefore \quad A=\frac{1}{3}$.

আবার উভয়পক্ষের x^2-এর সহগদ্বয় সমান বলিয়া $A+B=0$

$\therefore \quad B=-A=-\frac{1}{3}$

পুনরায় উভয়পক্ষের ধ্রুবক পদ সমান বলিয়া $A-C=0 \;\; \therefore \;\; C=A=\frac{1}{3}$.

$$\therefore \quad \int \frac{x\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx \quad = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{3}\log(x-1) - \frac{1}{6}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

[উদাহরণ 2, § 2·8 দেখ]

উদা. 2. সমাকলন কর : $\int \frac{x\,dx}{(1+x)(1+x^2)}$

মনে কর, $\frac{x}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$

$\therefore \quad x = A(1+x^2) + (Bx+C)(1+x)$

উভয়পক্ষে $x=-1$ বসাইয়া পাই, $-1=2A \quad \therefore \quad A=-\frac{1}{2}$

উভয়পক্ষের x^2-এর সহগ সমান হওয়ায় $0=A+B \quad \therefore \quad B=-A=\frac{1}{2}$

আবার উভয়পক্ষের ধ্রুবকপদ সমান হওয়ায় $0=A+C \quad \therefore \quad C=-A=\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \frac{x}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}\right)$$

$$\therefore \quad \int\frac{x\,dx}{(1+x)(1+x^2)} = \int\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}\right)dx.$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}$$

$$= \frac{1}{4}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x) + c.$$

§ A·3. **বৈজিক মূলদ রাশিমালায় লবের ঘাত হরের ঘাতের সমান বা বৃহত্তর হইলে, রাশিমালার সমাকলন** (Integration of a rational fraction when the degree of the numerator is greater than equal to the degree of the denominator) :—

মনে কর, $\frac{f(x)}{g(x)}$ একটি ভগ্নাংশবিশিষ্ট বৈজিক রাশিমালা। $\frac{f(x)}{g(x)}$-কে x-এর সাপেক্ষে সমাকলন করিতে হইলে $f(x)$-কে $g(x)$ দ্বারা ততক্ষণ পর্যন্ত ভাগ করিবে, যতক্ষণ না ভাগশেষের ঘাত হরের ঘাত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়। মনে কর এইরূপ ভাগের ফলে ভাগফল হইল $q(x)$ এবং ভাগশেষ হইল $r(x)$ যেখানে $q(x)$, $r(x)$ দুইটি বহুপদরাশি।

$$\therefore \quad \frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}$$

এবং $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int\left\{q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}\right\}dx=\int q(x)dx+\int\frac{r(x)}{g(x)}dx$

এক্ষণে, $q(x)$ একটি বহুপদরাশি হওয়ায়, $\int q(x)dx$ সহজেই নির্ণয় করা যাইবে। $\int\frac{r(x)}{g(x)}dx$, § A·2-এ বর্ণিত পদ্ধতিতে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া নির্ণয় করা যাইবে।

উদাহরণ 1. সমাকলন কর : $\int\frac{x^3dx}{x^2+7x+12}$

$$\begin{array}{r|l} x^2+7x+12 & x^3 \quad (x-7 \\ & \underline{x^3+7x^2+12x} \\ & -7x^2-12x \\ & \underline{-7x^2-49x-84} \\ & 37x+84 \end{array}$$

$$\therefore \quad \frac{x^3}{x^2+7x+12}=x-7+\frac{37x+84}{x^2+7x+12}=x-7+\frac{37x+84}{(x+3)(x+4)}$$

এক্ষণে, মনে কর, $\frac{37x+84}{(x+3)(x+4)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+4}$

$$\therefore \quad 37x+84=A(x+4)+B(x+3)=x(A+B)+4A+3B$$

$$\therefore \quad A+B=37 \text{ ও } 4A+3B=84$$

সমাধান করিয়া পাই, $A=-27$, $B=64$.

$$\therefore \quad \frac{37x+84}{(x+3)(x+4)}=-\frac{27}{x+3}+\frac{64}{x+4}$$

$$\int\frac{x^3dx}{x^2+7x+12}=\int\left(x-7-\frac{27}{x+3}+\frac{64}{x+4}\right)dx$$

$$=\int x\,dx-7\int dx-27\int\frac{dx}{x+3}+64\int\frac{dx}{x+4}$$

$$=\frac{x^2}{2}-7x-27\log(x+3)+64\log(x+4)+c.$$

1. 2. সমাকলন কর : $\int \frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)(x+1)} dx.$

$(x^2+1)(x+1)=x^3+x^2+x+1$

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2+x+1 \,)\; x^4+x^2+1 & (x-1 \\ x^4+x^3+x^2+x & \\ \hline -x^3-x+1 & \\ -x^3-x^2-x-1 & \\ \hline x^2+2 & \end{array}$$

$$\therefore \quad \frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)(x+1)}=x-1+\frac{x^2+2}{(x^2+1)(x+1)}$$

এক্ষণে, মনে কর $\quad \frac{x^2+2}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}$

$$\therefore \quad x^2+2=(Ax+B)(x+1)+C(x^2+1)$$

উভয়পক্ষে $x=-1$ বসাইয়া পাই, $2C=3 \quad \therefore \quad C=\frac{3}{2}$

আবার উভয়পক্ষে ধ্রুবক পদ সমান বলিয়া $2=B+C$

$$\therefore \quad B=2-C=2-\tfrac{3}{2}=\tfrac{1}{2}.$$

উভয়পক্ষে x^2-এর সহগ সমান বলিয়া $1=A+C$

$$\therefore \quad A=1-C=1-\tfrac{3}{2}=-\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2+2}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{3}{2(x+1)}-\frac{x-1}{2(x^2+1)}$$

সুতরাং $\int \frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)(x+1)} dx=\int\left\{x-1+\frac{3}{2(x+1)}-\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right\}dx$

$$=\int x\, dx-\int dx+\tfrac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\tfrac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2}{2}-x+\tfrac{3}{2}\log(x+1)-\tfrac{1}{4}\log(x^2+1)+\tfrac{1}{2}\tan^{-1}x+c.$$

§ A·4. একটি বিশেষক্ষেত্রে আংশিক ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশের কৌশল :

যদি কোন বৈজিক ভগ্নাংশ রাশিমালায় লব ও হর উভয়েই কেবলমাত্র x-এর যুগ্মঘাত থাকে, তবে $x^2=t$ ধরিয়া ভগ্নাংশটিকে কয়েকটি আংশিক ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশ করা সুবিধাজনক হয়। লক্ষ্য কর যে এখানে কিন্তু t চল দ্বারা x চল প্রতিস্থাপিত হইতেছে না। সমাকলনের পূর্বেই t স্থলে প্রত্যেক আংশিক ভগ্নাংশে x^2 লিখিবে।

উদাহরণ 1. সমাকলন কর : $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

$$\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{t}{(t+a^2)(t+b^2)} \quad [\, x^2=t \text{ মনে করিয়া} \,]$$

$$= \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{a^2}{t+a^2} - \frac{b^2}{t+b^2}\right) = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{a^2}{x^2+a^2} - \frac{b^2}{x^2+b^2}\right)$$

$$\therefore \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \int \frac{1}{a^2-b^2}\left\{\frac{a^2 dx}{x^2+a^2} - \frac{b^2 dx}{x^2+b^2}\right\}$$

$$= \frac{a^2}{a^2-b^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{b^2}{a^2-b^2}\int \frac{dx}{x^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2}{a^2-b^2}\,\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{b^2}{a^2-b^2}\,\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b} + c$$

$$= \frac{1}{a^2-b^2}\left(a\tan^{-1}\frac{x}{a} - b\tan^{-1}\frac{x}{b}\right) + c.$$

উদা. 2 সমাকলন কর : $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4-3x^2+2}$

মনে কর, $x^2=t$.

$$\therefore \frac{x^2+1}{x^4-3x^2+2} = \frac{t+1}{t^2-3t+2} = \frac{t+1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}$$

$$\therefore t+1 = A(t-2) + B(t-1)$$

উভয়পক্ষে ক্রমান্বয়ে $t=1$ ও 2 বসাইয়া যথাক্রমে পাওয়া যায় $A=-2$, $B=3$.

$$\therefore \frac{x^2+1}{x^4-3x^2+2} = \frac{3}{t-2} - \frac{2}{t-1} = \frac{3}{x^2-2} - \frac{2}{x^2-1}$$

$$\therefore \int \frac{x^2+1}{x^4-3x^2+2}dx = 3\int \frac{dx}{x^2-2} - 2\int \frac{dx}{x^2-1}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.$$

§ A·5. একটি বিশেষ প্রতিস্থাপন :—

যদি কোন বৈজিক ভগ্নাংশ রাশিমালার লব ও হরে যথাক্রমে x-এর অযুগ্ম ও যুগ্মঘাত উপস্থিত থাকে, তবে প্রথমে $x^2=t$ বসাইয়া চলের প্রতিস্থাপন প্রায়শঃই সুবিধাজনক হয়। এই ক্ষেত্রে নূতন চল t দ্বারা সমাকল্য প্রকাশিত হইবার পর প্রয়োজনে নূতন সমাকল্যকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করিতে হয়।

উদাহরণ 1. সমাকলন কর : $\int \frac{x^3 dx}{x^4+x^2+1}$

মনে কর $x^2=t$ $\therefore$ $2x\,dx=dt$ এবং $x^3dx=x^2.xdx=\frac{1}{2}tdt$ ও $x^4+x^2+1=t^2+t+1$

$$\therefore \int\frac{x^3dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{t\,dt}{t^2+t+1}=\frac{1}{4}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+t+1}$$

$$=\frac{1}{4}\log(t^2+t+1)-\frac{1}{4}.\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+c$$

$$=\frac{1}{4}\log(x^4+x^2+1)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}+c.$$

উদা. 2. সমাকলন কর: $\int\frac{x^5dx}{1+x^4}$

$$\frac{x^5}{1+x^4}=x-\frac{x}{1+x^4}$$

$$\therefore \int\frac{x^5dx}{1+x^4}=\int\left(x-\frac{x}{1+x^4}\right)dx$$

$$=\int x\,dx-\int\frac{x\,dx}{1+x^4}$$

এক্ষণে, $\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c_1$

$\int\frac{x\,dx}{1+x^4}$ নির্ণয়ের জন্য মনে কর, $x^2=t$ $\therefore$ $2x\,dx=dt.$

$$\therefore \int\frac{x\,dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}t+c_2=\frac{1}{2}\tan^{-1}x^2+c_2.$$

$$\therefore \int\frac{x^5dx}{1+x^4}=\frac{x^2}{2}+c_1-\frac{1}{2}\tan^{-1}x^2-c_2=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\tan^{-1}x^2+c.$$

উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. সমাকলন কর: $\int\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}dx$

[C.U. 1954]

মনে কর, $\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}=1+\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}.$

$$\therefore x^3=(x-a)(x-b)(x-c)+A(x-b)(x-c)+B(x-c)(x-a)+C(x-a)(x-b).$$

উভয়পক্ষে ক্রমান্বয়ে $x=a, b, c$ বসাইয়া যথাক্রমে পাওয়া যায়,

$$A=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)},\ B=\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}\ \text{ও}\ C=\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}dx = \int \left\{1 + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}\right\}dx$$

$$= \int dx + A\int \frac{dx}{x-a} + B\int \frac{dx}{x-b} + C\int \frac{dx}{x-c}$$

$$= x + A \log (x-a) + B \log (x-b) + C \log (x-c) + k$$

$$= x + \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} \log (x-a) + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} \log(x-b)$$

$$+ \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} \log(x-c) + k. \qquad [\text{ A, B, C-র মান বসাইয়া }]$$

দ্রষ্টব্য : লক্ষ্য কর, এখানে লব ও হর উভয়ের মাত্রা 1, সুতরাং লবকে হর দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল $q(x) = 1$ হয় এবং ভাগশেষকে

$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$ আকারে লেখা হইল।

উদা. 2. সমাকলন কর : $\int \frac{(x-1)dx}{(x+2)(x-3)}$ [C.U. 1924]

মনে কর, $\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$.

$\therefore \quad x-1 = A(x-3) + B(x+2)$

উভয়পক্ষে, $x = -2$ বসাইয়া পাই, $-3 = -5A \quad \therefore \quad A = \frac{3}{5}$.

$x = 3$ বসাইয়া পাই, $2 = 5B \; \therefore \; B = \frac{2}{5}$,

$$\therefore \quad \frac{x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{2}{5(x-3)}$$

$$\therefore \quad \int \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}dx = \int \frac{3dx}{5(x+2)} + \int \frac{2dx}{5(x-3)}$$

$$= \tfrac{3}{5} \log (x+2) + \tfrac{2}{5} \log (x-3) + c.$$

উদা. 3. সমাকলন কর : $\int \frac{x\,dx}{(x+a)^2(x+b)}$

মনে কর, $\frac{x}{(x+a)^2(x+b)} = \frac{A}{(x+a)^2} + \frac{B}{(x+a)} + \frac{C}{(x+b)}$

$\therefore \quad x = A(x+b) + B(x+a)(x+b) + C(x+a)^2$

উভয়পক্ষে $x = -a$ বসাইয়া পাই, $-a = A(b-a) \quad \therefore \; A = \frac{a}{a-b}$.

উভয়পক্ষে $x = -b$ বসাইয়া পাই,

$\therefore\quad -b=C(a-b)^2$ বা, $C=-\dfrac{b}{(a-b)^2}$.

আবার উভয়পক্ষে x^2-এর সহগ সমান বলিয়া,

$0=B+C\quad\therefore\quad B=-C=\dfrac{b}{(a-b)^2}$.

এক্ষণে, $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x+a)^2(x+b)}=\int\left\{\frac{A}{(x+a)^2}+\frac{B}{x+a}+\frac{C}{x+b}\right\}dx$

$$=A\int\frac{dx}{(x+a)^2}+B\int\frac{dx}{x+a}+C\int\frac{dx}{x+b}$$

$$=-\frac{A}{x+a}+B\log(x+a)+C\log(x+b)$$

$$=-\frac{a}{(a-b)(x+a)}+\frac{b}{(a-b)^2}\log(x+a)-\frac{b}{(a-b)^2}\log(x+b)+k$$

$$=\frac{a}{(b-a)(x+a)}+\frac{b}{(a-b)^2}\log\frac{x+a}{x+b}+k.$$

উদা. 4. সমাকলন কর : $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

[C. U.' 28.' 31,' 37]

$$\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{1}{x^2+b^2}-\frac{1}{x^2+a^2}\right]$$

$$\therefore\quad\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\int\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{1}{x^2+b^2}-\frac{1}{x^2+a^2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\int\frac{dx}{x^2+b^2}-\frac{1}{a^2-b^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}-\frac{1}{a^2-b^2}\,\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c.$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]+c.$$

উদা. 5. সমাকলন কর : $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+1}$

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$ [মনে কর।]

$\therefore\quad 1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$.

উভয়পক্ষে $x=-1$ বসাইয়া পাই, $A=\frac{1}{3}$.

এখানে উভয়পক্ষে x^2 এবং x-এর সহগ সমান বলিয়া যথাক্রমে $0=A+B$ এবং $0=-A+B+C$

$\therefore\quad B=-A$ এবং $C=2A.\quad\therefore\quad B=-\frac{1}{3}$ এবং $C=\frac{2}{3}$

$$\therefore\quad \frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right]$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\left\{\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

উদা. 6. সমাকলন কর : $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$

মনে কর, $\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

$$=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{(Cx+D)}{x^2-x+1}$$

$$\therefore\quad 1=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$$

উভয়পক্ষে x^3, x^2, x-এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমান বলিয়া, যথাক্রমে পাওয়া যায়,

$A+C=0$, $B-A+C+D=0$;

$-B+A+C+D=0$ এবং $B+D=1$

সমাধান করিয়া পাই $A=B=D=\frac{1}{2}$ এবং $C=-\frac{1}{2}$.

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\int\left\{\frac{x+1}{2(x^2+x+1)}+\frac{-x+1}{2(x^2-x+1)}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx-\int\frac{x-1}{x^2-x+1}dx\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}-\tfrac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\tfrac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\tfrac{1}{2}\log(x^2-x+1)\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right\}+c$$

$$=\tfrac{1}{4}\left\{\log\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right\}+c.$$

উদা. 7. সমাকলন কর : $\int\frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-5)}dx.$

$$\frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-5)}=\frac{x^2-6x+8}{x^2-6x+5}=1+\frac{3}{x^2-6x+5}$$

$$=1+\frac{A}{(x-5)}+\frac{B}{(x-1)} \text{ (মনে কর)}$$

$\therefore\quad x^2-6x+8=(x-1)(x-5)+A(x-1)+B(x-5)$

উভয়পক্ষে ক্রমান্বয়ে $x=1$ ও 5 বসাইয়া পাই

যথাক্রমে $3=-4B \quad \therefore \quad B=-\frac{3}{4}.$

এবং $3=4A \quad \therefore \quad A=\frac{3}{4}.$

$$\therefore\quad\int\frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-5)}dx=\int\left\{1-\frac{3}{4(x-1)}+\frac{3}{4(x-5)}\right\}dx$$

$$=x-\tfrac{3}{4}\log(x-1)+\tfrac{3}{4}\log(x-5)=x+\tfrac{3}{4}\log\frac{x-5}{x-1}$$

উদা. 8. সমাকলন কর : $\int\frac{x^2}{1-x^4}dx.$

মনে কর $x=t, \quad \therefore \quad \frac{x^2}{1-x^4}=\frac{t}{1-t^2}=\frac{A}{1+t}+\frac{B}{1-t}$ (মনে কর)

$\therefore\quad t=A(1-t)+B(1+t)$

উভয়পক্ষে ক্রমান্বয়ে $t=1$ ও -1 বসাইয়া পাই, যথাক্রমে

$1=2B$ বা $B=\frac{1}{2}$ এবং $-1=2A \quad \therefore \quad A=-\frac{1}{2}.$

$$\therefore\quad\frac{t}{1-t^2}=-\frac{1}{2(1+t)}+\frac{1}{2(1-t)}$$

$$\therefore\quad\frac{x^2}{1-x^4}=-\frac{1}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2(1-x^2)}$$

$$\therefore\quad\int\frac{x^2dx}{1-x^4}=\tfrac{1}{2}\left\{\int\frac{dx}{1-x^2}-\int\frac{dx}{1+x^2}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}-\tan^{-1}x\right\}+c.$$

উদা. 9. সমাকলন কর : $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

মনে কর $x^2=t \quad \therefore \quad 2x\,dx=dt.$

এখন, $x^3\,dx=x^2.\,x\,dx=\frac{1}{2}t.\,dt$;

$(x^2+a^2)(x^2+b^2)=(t+a^2)(t+b^2)$

$$\therefore \quad \int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{(t+a^2)(t+b^2)}$$

এক্ষণে, মনে কর $\frac{t}{(t+a^2)(t+b^2)}=\frac{A}{t+a^2}+\frac{B}{t+b^2}$

$\therefore \quad t=t(A+B)+Ab^2+Ba^2.$

উভয়পক্ষের t-এর সহগ ও ধ্রুবকপদ সমান।

$\therefore \quad A+B=1$ ....(i)

এবং $Ab^2+Ba^2=0$ বা, $\frac{A}{a^2}=-\frac{B}{b^2}=k$ (মনে কর)

$\therefore \quad A=a^2k$ এবং $B=-b^2k$

সুতরাং (1) হইতে পাই $k(a^2-b^2)=1 \quad \therefore \quad k=\frac{1}{a^2-b^2}$

$$A=\frac{a^2}{a^2-b^2} \text{ এবং } B=\frac{b^2}{b^2-a^2}$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{1}{2}\int \frac{a^2}{a^2-b^2}\,\frac{dt}{t+a^2}+\frac{1}{2}\int \frac{b^2}{b^2-a^2}\,\frac{dt}{t+b^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{a^2}{a^2-b^2}\log(t+a^2)+\frac{1}{2}\frac{b^2}{b^2-a^2}\log(t+b^2)+C$$

$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\,\{a^2\log(x^2+a^2)-b^2\log(x^2+b^2)\}+C.$$

উদা. 10 সমাকলন কর : $\int \frac{x^2dx}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

মনে কর, $\frac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}.$

$\therefore \quad x^2=A(x-b)(x-c)+B(x-c)(x-a)+C(x-a)(x-b)$

উভয়পক্ষে ক্রমান্বয়ে $x=a,\ b$ ও c বসাইয়া যথাক্রমে পাই

$$A=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)},\ B=\frac{b^2}{(b-c)(b-a)},\ C=\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

এক্ষণে, $\int \frac{x^2dx}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\int \left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)dx$

$$=A\int \frac{dx}{x-a}+B\int \frac{dx}{x-b}+C\int \frac{dx}{x-c}$$

$$=A\log(x-a)+B\log(x-b)+C\log(x-c)+k$$

$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}\log(x-a)+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}\log(x+b)$$

$$+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\log(x-c)+k$$

[A, B ও C-র মান বসাইয়া]

প্রশ্নমালা

সমাকলন কর :—

1. $\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$ 2. $\int\frac{dx}{(3x+2)(4x+3)}$

3. $\int\frac{(x-1)dx}{(x-2)(x-3)}$ [C. U. '37] 4. $\int\frac{3x\,dx}{x^2-x-2}$ [C. U. '38]

5. $\int\frac{x\,dx}{(x-a)(x-b)}$ [C. U. '23] 6. $\int\frac{x\,dx}{(x+1)^2(x+2)}$

7. $\int\frac{x^2\,dx}{(x+1)^2(x+2)}$ 8. $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-3)}$

9. $\int\frac{(x+2)dx}{(1-x)(4+x^2)}$ 10. $\int\frac{dx}{1-x^3}$ 11. $\int\frac{x\,dx}{1+x^3}$.

12. $\int\frac{x^3+2}{(x-1)(x-2)}dx$ 13. $\int\frac{x^3dx}{(x+a)(x^2+a^2)}$

14. $\int\frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)(x-1)}dx$. 15. $\int\frac{(x^2-3)dx}{(x-1)(x-2)(x+3)}$

16. $\int\frac{x^2dx}{x^4+x^2-12}$ 17. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$

18. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ 19. $\int\frac{x^2dx}{x^4+x^2+12}$

20. $\int\frac{2x^4+3}{x^4+5x^2+6}dx$. 21. $\int\frac{x^3}{1-x^2}dx$ 22. $\int\frac{x\,dx}{x^4-1}$

23. $\int\frac{t^3dt}{t^4+5t^2+6}$ 24. $\int\frac{x\,dx}{x^4-x^2-2}$

উত্তরমালা

[প্রথম তিন অধ্যায়ে প্রত্যেক সমাকলের সহিত একটি করিয়া স্বেচ্ছ-সমাকল ধ্রুবক যোগ করিবে।]

অনুশীলনী IA

1. $\frac{x^{101}}{101}$ 2. $\frac{x^8}{8}$ 3. $-\frac{1}{x}$ 4. $-\frac{1}{2x^2}$

5. $-\frac{4}{\sqrt[4]{x}}$ 6. $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}$.

অনুশীলনী IB

1. $\frac{e^{2x}}{2}$ 2. $\frac{e^{17x}}{17}$ 3. $\frac{e^{cx}}{c}$ 4. $\frac{5}{4}.e^{\frac{4}{5}x}$

5. $2e^{\frac{x}{2}}$ 6. $-\frac{e^{-70x}}{70}$ 7. $-\frac{5}{\sqrt[5]{e^x}}$ 8. $\frac{x^2}{2}$.

অনুশীলনী IC

1. $\frac{3^x}{\log^3_e}$; 2. $\frac{-2^{-x}}{\log^2_e}$; 3. $\frac{a^x}{\log^a_e}$;

4. $\frac{1}{2}\frac{6^{2x}}{\log^6_e}$; 5. $\frac{10^x}{\log^{10}_e}$; 6. $\frac{1}{10}\frac{6^{10x}}{\log^6_e}$

অনুশীলনী ID

1. $-\frac{\cos 7x}{7}$ 2. $\frac{\cos 2x}{2}$ 3. $\frac{\sin 6x}{6}$

4. $\frac{\sin 4x}{4}$ 5. $\frac{-\cot(3x)}{3}$ 6. $\frac{\operatorname{cosec} 2x}{2}$

অনুশীলনী IE

1. $\frac{x^3}{3}+\frac{3^x}{\log^3_e}$ 2. $8x+18x^2+18x^3+\frac{27}{4}x^4$

3. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x$ 4. $x+\frac{e^{2x}}{2}$ 5. $\frac{x^8}{8}+e^x+\frac{a^x}{\log^a_e}$

6. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}-\frac{e^{2x}}{2}$ 7. $-\cot x-x$

8. $2\sin x+\tan x-x$.

অনুশীলনী IF

1. $\frac{1}{2}\left(\sin x-\frac{\sin 3x}{3}\right)$ 2. $\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 16x}{16}-\frac{\cos 4x}{4}\right)$

3. $\dfrac{\sin 10x}{10}+\dfrac{\sin 2x}{2}$ 4. $\frac{1}{2}\left(x-\dfrac{\sin 2x}{2}\right)$

5. $\frac{1}{2}\left(x+\dfrac{\sin 4x}{4}\right)$ 6 $\frac{1}{2}(x+\sin x)$

7. $\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x$ 8. $-\dfrac{\cos 3x}{4}+\dfrac{\cos 9x}{36}$

9. $\frac{1}{4}\left(x+\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 4x}{4}+\dfrac{\sin 6x}{6}\right)$

10. $\frac{1}{4}\left(\cos x-\dfrac{\cos 3x}{3}+\dfrac{\cos 7x}{7}-\dfrac{\cos 5x}{5}\right)$.

প্রশ্নমালা 1

1. (i) $2\sqrt{x}$ (ii) $-\dfrac{1}{x}$ (iii) $n\sqrt[n]{x}$

2. (i) $\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+2x$ (ii) $\frac{3}{22}x^{\frac{22}{3}}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$

(iii) $\frac{2}{3}x^3+5x-\dfrac{2}{x}$ (iv) $-\left(\dfrac{1}{4x^4}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{2x^2}+\dfrac{1}{x}\right)$

3. (i) $\dfrac{x^2}{2}-3x$ (ii) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-6x$

4. (i) $x-2e^{-x}-\dfrac{e^{-2x}}{2}$ (ii) $e^x+4e^{-x}-\dfrac{e^{-2x}}{2}$

5. $\dfrac{e^{4x}}{4}+\dfrac{e^{2x}}{2}+x$ 6. $\dfrac{180}{\pi}\sin x$ 7, $\frac{1}{2}x-\dfrac{\sin 2ax}{4a}$

8. $\frac{1}{2}x+\dfrac{\sin 12x}{24}$ 9. $\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\sin\dfrac{2x}{3}$ 10. $-\dfrac{\cot 2x}{2}-x$

11. $\dfrac{\sin 2x}{2}$ 12. $-\operatorname{cosec}\theta$ 13. $\sin x-\dfrac{\sin 7x}{7}$

14. $\dfrac{\sin 9x}{18}+\dfrac{\sin x}{2}$ 15. $-\left\{\dfrac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}+\dfrac{\cos(m-n)}{2(m-n)}\right\}$

16. $-\frac{3}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{6}\cos\dfrac{3x}{2}$

17. $\tan x-x$ 18. $\sec x+\operatorname{cosec} x$

19. (i) $\tan x+x$ (ii) $3x-\cot x+2\tan x$

20. $\sin x-\cos x$.

21. (i) $\dfrac{a^x}{\log^a_e}+2x-\dfrac{a^{-x}}{\log^a_e}$ (ii) $\dfrac{a^x}{\log^a_e}-\dfrac{a^{-x}}{\log^a_e}$

22. (i) $\frac{1}{2}\tan x$ (ii) $-\cot\dfrac{x}{2}$ (iii) $\tan x-\sec x$.

23. $2(\tan x+\sec x+\cos x-\frac{3}{2}x)$,

24. (i) $-\cos x+\sin x$ (ii) $\sqrt{2}\sin x$

25. $2\sin x+2\cos\theta.x$ 26. $\dfrac{20x+3\sin 4x}{32}$

27. (i) $\frac{3}{8}x+\dfrac{\sin 2x}{4}+\dfrac{\sin 4x}{32}$ (ii) $\frac{1}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x$

28. $\frac{1}{4}\left\{\dfrac{\sin(a-b-c)-x}{a-b-c}-\dfrac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c},\right.$

$$\left.+\dfrac{\sin(a-b+c)x}{a-b+c}-\dfrac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c}\right\}.$$

29. $-\dfrac{\cos 2x}{2}-\dfrac{\cos 4x}{8}$. 30. $\dfrac{\sin 3x}{3}+2\cos x+\dfrac{x^3}{3}$.

অনুশীলনী II A

1. (i) $\dfrac{1}{12a}(ax+b)^{12}$ (ii) $\dfrac{1}{28}(4x-5)^7$ (iii) $\dfrac{1}{a-x}$

 (iv) $\dfrac{1}{b}\log\dfrac{1}{a-bx}$.

2. (i) $\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$ (ii) $\frac{1}{2}\tan(2x+3)$.

 (iii) $\frac{1}{2}t-\dfrac{\sin(4t+6)}{8}$ (iv) $\frac{1}{3}\cot(2-3t)-t$.

3. $\dfrac{\frac{1}{q}a^{p+qt}}{\log^a_e}$

4. (i) $\frac{1}{6}\log\dfrac{x-3}{x+3}$ (ii) $\frac{1}{4}\log\dfrac{2+x}{2-x}$ (iii) $\frac{1}{20}\log\dfrac{2x-5}{2x+5}$.

5. $\dfrac{2}{3(a-b)}\left\{(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right\}$.

6. $\dfrac{1}{b}x-\dfrac{a}{b^2}\log(a+bx)$.

7. (i) $\frac{1}{2}\log\dfrac{x-6}{x-4}$ (ii) $\log\dfrac{x-4}{x-3}$.

অনুশীলনী II B

1. (i) $\log(ax^2+bx+c)$ (ii) $\dfrac{(x^3+6x^2+5x+2)^2}{2}$

2. $\log(e^x+e^{-x})$ 3. $\log(1+x^2)$

4. (i) $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ (ii) $\log(\tan^{-1}x)$

5. (i) $\frac{1}{6}(x^4+a^4)^{\frac{3}{2}}$ প্রশ্নে $x^3\sqrt{1+x^4}$ পড় (ii) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}$

6. $\frac{1}{2}\log(1+\sin^2 x)$ 7. $\dfrac{(\tan x+\sin x)^3}{3}$

8. (i) $-\dfrac{1}{1+\tan x}$ (ii) $\log\dfrac{1}{1+\cot x}$ (iii) $2\sqrt{\tan x-1}$

9. (i) $(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$. (ii) $\log(1+x^4)$ (iii) $\dfrac{a}{n}\log(x^n+b)$

10. (i) $\log(1+\log x)$ (ii) $\log\{\log(\log x)\}$

11. (i) $\log\{\log(\sin x)\}$ (ii) $\log\{\log(\sec x)\}$.

12. $\log(x\sin x)$ 13. $\log(\log\tan x)$

অনুশীলনী II C

1. $\tan(e^x)$ 2 $\dfrac{a^{\sin^{-1}x}}{\log_e^a}$

3. $\log\sin(e^x)$ 4. $2\sin\sqrt{x}$

5. $e^{\sin^{-1}x}$ 6. $\sin(\log x)$ 7. $e^{\sin x}$

8. $\frac{1}{3}\sin x^3$ 9. $\dfrac{1}{n}\sin x^n$

10. (i) $\dfrac{1}{4b}(a+bx^2)^2$ (ii) $-\dfrac{1}{bn}\cos(a+bx^n)$

11. $\dfrac{(\tan x-x)^2}{2}$ 12. $\dfrac{1}{202m}(2x^m+11)^{101}$

অনুশীলনী II D

1. $\dfrac{1}{3}\tan^{-1}\dfrac{x}{3}$ 2. $\dfrac{1}{ab}\tan^{-1}\dfrac{bx}{a}$ 3. $\frac{1}{4}\tan^{-1}\dfrac{x^2}{4}$

4. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{\tan x}{2}$ 5. $\frac{1}{4}\tan^{-1}\dfrac{e^{2x}}{4}$.

6. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sin x}{2}$ 7. $\tan^{-1}(\tan^{-1}x)$

8 $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{\log x}{\sqrt{3}}$ 9. $\tan^{-1}(e^x)$

অনুশীলনী II E

1. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$ 2 $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$

3. $\frac{1}{2a}\log\frac{x-2a}{x}$ 4 $\frac{1}{2a}\log\frac{x}{2a-x}$

5. $\frac{1}{2}\log\frac{1+\log x}{1-\log x}$ যদি $\log x<1$ হয়,

$\frac{1}{2}\log\frac{\log x+1}{\log x-1}$ যদি $\log x>1$ হয়। 6. $\frac{1}{4}\log\frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}$

7. $\frac{1}{2}\log\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}$. যখন $\tan\theta>1$

$\frac{1}{2}\log\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ যখন $\tan\theta<1$ 8. $\log\tan\frac{\theta}{2}$

অনুশীলনী II F

1. $\log(x+\sqrt{x^2+9})$ 2. $\frac{1}{b}\log(bx+\sqrt{b^2x^2+a^2})$

3. $\log(x^2+\sqrt{1+x^4})$ 4. $\frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{bx}{a}$

5. $\sin^{-1}(\tan^{-1}x)$ 6. $\sin^{-1}(\tan x)$

অনুশীলনী II G

1. $\frac{1}{7}\log\frac{x-3}{x+4}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{2x+\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1-2x}$

3. $\tan^{-1}(x+2)$ 4. $\frac{1}{7}\log\frac{x-3}{x+4}$

5. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sin x+1}{2}$ 6. $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2\log x+1}{\sqrt{3}}$

7. $\frac{1}{4}\log\frac{x^2+1}{x^2+3}$ 8. $\frac{1}{6}\log\frac{1+2e^x}{2-e^x}$

9. $\frac{1}{8}\log\frac{\sin x-2}{5\sin x-2}$

অনুশীলনী II H

1. $\frac{1}{2}\log(x^2+4x+5)-\tan^{-1}(x+2)$

2. $x+\log\frac{x-2}{x+2}$

3. $\log(x^2+2x+3)-\frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$

4. $-\frac{4}{\sqrt{5}}\log\frac{\sqrt{5}+1+2x}{\sqrt{5}-1-2x}-\log(1-x-x^2)$

5. $-\frac{1}{8}\log(4x^2-4x-3)+\frac{1}{16}\log\frac{2x-3}{2x+1}$

অনুশীলনী II I

1. $2\log(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1})$

2. $2\log(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3})$ 3. $2\sin^{-1}\sqrt{x-2}$

4. $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{3x-4}{\sqrt{22}}$

অনুশীলনী II J

1. $\log\{(x+1)+\sqrt{x^2+2x+6}\}$

2. (i) $\sin^{-1}(2x-5)$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\{4x+3+4\sqrt{x^2+\frac{3x}{2}+2}\}$ (iii) $\sin^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$

3. $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{6x-1}{5}$ 4. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log(x-\frac{1}{6}+\sqrt{x^2-\frac{x}{3}-1})$

5. $\log\{(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\}$

6. $\frac{2}{\sqrt{5}}\log(\sqrt{\tan x-\frac{2}{3}}+\sqrt{\tan x-2})$

7. $\log\{(\log x+1)+\sqrt{(\log x)^2+2\log x+5}\}$

অনুশীলনী II K

1. $2\{\sqrt{x^2+x+1}+\log(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})\}$

2. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-8x+5}$

3. $2\sqrt{x^2+3x+1}+2\log(2x+3+2\sqrt{x^2+3x+1})$

4. $\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\log\{(2x+1)+2\sqrt{x^2+x+1}\}$

5. $\sqrt{x^2+2x+2}+\log(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$

6. $2\sqrt{1+2x-3x^2}+2\sqrt{3}\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{3x+1}{4}}$

7. $-2\sqrt{3x-x^2-2}+16\sin^{-1}\sqrt{x-1}$

অনুশীলনী II L

1. $2\tan^{-1}\sqrt{1+x}$ 2. (i) $2\tan^{-1}\sqrt{1+x}$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}\log\dfrac{\sqrt{2(3x+4)}-\sqrt{5}}{\sqrt{2(3x+4)}+\sqrt{5}}$

(iii) $\log\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}$ 3. (i) $\sin^{-1}\dfrac{1+3x}{\sqrt{5}(1+x)}$

(ii) $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\log\left\{\dfrac{2-x+\sqrt{5(1+x^2)}}{(1+2x)}\right\}$

4. $\log\dfrac{2x}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}$

5. $-\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}$ 6. $-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ 7. $\log\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}}$

অনুশীলনী II M

1. $\frac{1}{3}\log\dfrac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}$ 2. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{3}\left(5\tan\frac{1}{2}x+4\right)$

3. $\frac{1}{3}\log\left|\dfrac{\tan\frac{x}{2}-2}{2\tan\frac{x}{2}-1}\right|$ 4. $\frac{1}{5}\log\dfrac{1+2\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}$

5. $\sqrt{2}\tan^{-1}\dfrac{\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}$

প্রশ্নমালা 2

1. $\dfrac{(1+x)^6}{6}$ 2. $\dfrac{\tan^4 x}{4}$ 3. $\frac{1}{8}\log(3+4\sin 2x)$

4. $\dfrac{a^{x^2}}{2\log_e a}$ 5. $\dfrac{e^{x^3}}{3}$

6. (i) $\frac{1}{4}\log(3+4e^{x})$. (ii) $\frac{1}{2}e^{x^2+6x+9}$

7. $\frac{\{\log(\log x)\}^2}{2}$ 8. $\frac{1}{12}(\log x)^2$ 9. $\frac{1}{2}\sec^{-1}(x^2)$

10. $\log\frac{(x+2)^2}{x+1}$ 11. $\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x$

12. $\frac{1}{2}\log(x^2-3x+4)+\frac{3-2x}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{2x-3}{\sqrt{7}}$

13. (i) $x+\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

(ii) $\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{3}\log\{(x+2)(x-1)^2\}$

14. $\frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sqrt{1+x^3}+1}$ 15. $\log\{(x-\frac{7}{2})+\sqrt{x^2-7x+12}\}$

16. $2\log(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})$

17. (i) $-\sqrt{ax-x^2}+a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}$

(ii) $a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{ax-x^2}$ 18. (i) $\frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}$

(ii) $4\sqrt{1+\sqrt{x}}$ [প্রশ্নে 11 স্থলে 1 পড়]

19. (i) $\frac{1}{2ab}\log\frac{ax-b}{ax+b}$ (ii) $\frac{1}{a}\left[\log\left(ax+\sqrt{a^2x^2+b^2}\right)\right]$

20. $\log[(e^{x}-1)+\sqrt{e^{2x}-2e^{x}+2}]$

21. (i) $\frac{\sin^7 x}{7}-\frac{\sin^9 x}{9}$

(ii) $\frac{1}{32}[2x-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 4x}{2}+\frac{\sin 6x}{6}]$

(iii) $\frac{\tan^3 x}{3}-2\tan x+\frac{5}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$

22. $(x+a)\cos a-\sin a\log\{\sin(x+a)\}$

23. $\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{2}}-\frac{\sqrt{2x-x^2}}{2}(1-x)$

24. $\sqrt{x^2+2x}+2\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})$

25. $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}$ 26. $\log\{(x+2)+\sqrt{x^2+4x}\}-2\sqrt{\frac{x+4}{x}}$

27. $\frac{1}{2}(\tan 2x - \sec 2x)$

28. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{a}{b}\right)$

29. (i) $\dfrac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \left(\dfrac{3 \tan \frac{x}{2} + 2}{\sqrt{5}}\right)$

(ii) $\dfrac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}} \tan \dfrac{x}{2}\right)$

30. (i) $\frac{1}{4} \log \dfrac{2+\tan x}{2-\tan x}$ (ii) $\frac{1}{4} \log \dfrac{2 \tan x - 1}{2 \tan x + 1}$

31. (i) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{3} \tan x}{2}$ (ii) $-\dfrac{1}{3(4+3 \tan x)}$

32. (i) $\frac{1}{2}\{x + \log(\sin x + \cos x)\}$

(ii) $\frac{11}{25}x - \frac{2}{25} \log(3 \cos x + 4 \sin x)$

33. $2x + \log(3 + 4 \sin x + 5 \cos x)$

34. (i) $\frac{1}{3} \log(\sec 3x + \tan 3x)$

(ii) $\frac{1}{4}[\operatorname{cosec} x - \log(\sec x + \tan x)]$

35. (i) $\sin 2x - x$. (ii) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \log \dfrac{1+\sqrt{3} \tan x}{1-\sqrt{3} \tan x}$

36. (i) $x + \sin 2x$ (ii) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \log \dfrac{\sqrt{3}+\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}$

38. (i) $-\cos(\log x)$ (ii) $-\cos e^x$ (iii) $\cos(xe^x)$

(iv) $-\cos(\tan x)$ **39.** (i) $e^{\sin x}$

(ii) $\dfrac{\sin^6 x}{6}$ (iii) $-\dfrac{1}{2 \sin^2 x}$

(iv) $\tan^{-1}(\sin x)$ (v) $-\cos(\sin x)$

40. (i) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left\{\dfrac{3-\sin x}{4(1+\sin x)} + \dfrac{\sqrt{2+\sin x+\sin^2 x}}{\sqrt{2}(1+\sin x)}\right\}\right]$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{6}} \log \dfrac{\sqrt{e^x+2} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{e^x+2} + \sqrt{\frac{3}{2}}}$

অনুশীলনী IIIA

1. $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x$

2. $-\frac{x^2}{2}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{\cos 2x}{4}$

3. $(x+5)\tan x+\log\cos x$

4. $\frac{1}{4}\left[\cos 3x\left(\frac{2x}{9}+\frac{1}{3}\right)+\sin 3x\left(\frac{x^2}{3}+x-\frac{2}{27}\right)\right.$

$\left.+\cos x\,(6x+9)+\sin x\,(3x^2+9x-6)\right]$

5. $e^x(x-1)$ 6. $\frac{e^{2x}}{2}(x^2-x-\frac{3}{2})$

অনুশীলনী III B

1. $x\log ax-x$

2. $x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6x\log x-6x$

3. $\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}$ 4. $-\left(\frac{1+\log x}{x}\right)$

5. $\log x\left(x+\frac{x^3}{3}\right)-\left(x+\frac{x^3}{9}\right)$

6. $\frac{2}{3}x^3\log x-\frac{2}{9}x^3-\frac{5}{2}x^2\log x+\frac{5}{4}x^2+2(x\log x-x)$

7. $\sin x\,(\log\sin x-1)$

অনুশীলনী III C

1. $x\tan^{-1}(ax)-\frac{1}{2a}\log(1+a^2x^2)$

2. $2(x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2})$ 3. $2\{x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\}$

4. $2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2)$

5. $(x-\frac{1}{2})\sin^{-1}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}$

6. $x(\sin^{-1}x)^3+3\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1}x)^2-6(x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2})$

7. $x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$ 8. $x\cot^{-1}x+\frac{1}{2}\log(1+x^2)$

9. $x\,\mathrm{cosec}^{-1}x+\log(x+\sqrt{x^2-1})$

10. $x\cos^{-1}\frac{1}{x}-\log(x+\sqrt{x^2-1})$

অনুশীলনী III D

1. $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$ 2. $\frac{e^x(\cos ax+a\sin ax)}{1+a^2}$

3. $\{1-\frac{1}{5}(\cos 2x+2\sin 2x)\}\frac{1}{2}e^x$

4. $\frac{e^x}{2}[\frac{1}{17}(\sin 4x-4\cos 4x)+\frac{1}{5}(\sin 2x-2\cos 2x)]$

5. $\frac{e^{2x}}{4}\left(\frac{2\cos 3x+3\sin 3x}{13}+\frac{6\cos x+3\sin x}{5}\right)$

6. $\frac{e^{2x}}{4}\left(\frac{6\sin x-3\cos x}{5}-\frac{2\sin 3x-3\cos 3x}{13}\right)$

অনুশীলনী III E

1. $e^x\cos x$ 2. $e^x\tan x$ 3. $e^x\sec x$ 4. $e^x.x^2$

5. $e^x\tan^{-1}x$ 6. $e^x\log\sin x$ 7. $e^x\frac{x-1}{x+1}$

অনুশীলনী III F

1. $\frac{x\sqrt{x^2+9}}{2}+\frac{9}{2}\log(x+\sqrt{x^2+9})$

2. $\frac{x\sqrt{16-9x^2}}{2}+\frac{8}{3}\sin^{-1}\frac{3x}{4}$

3. $\frac{x\sqrt{1-a^2x^2}}{2}+\frac{1}{2a}\sin^{-1}(ax)$

4. $\frac{x^2}{2}+\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}+\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1})$

5. $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x-x\sqrt{1-x^2})$

6. $\frac{1}{2}\{\log(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}\}$

7. $\frac{1}{8}(4x+3)\sqrt{4-3x-2x^2}+\frac{41}{32}\sqrt{2}\sin^{-1}\frac{4x+3}{\sqrt{41}}$

8. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{5-2x+x^2}+2\log(x-1+\sqrt{5-2x+x^2})$

প্রশ্নমালা 3

1. (i) $\log(x+\cos x)$ (ii) $x(\sec x+\tan x)$

2. (i) $\log(x-\sin x)$ (ii) $-x\cot\frac{x}{2}$

3. (i) $x\tan\frac{x}{2}+2\log\cos\frac{x}{2}$

(ii) $x(\tan x-\sec x)+\log\cos x+\log(\sec x+\tan x)$

(iii) $-x \cot \frac{1}{2}x + 2 \log \sin \frac{1}{2}x$

(iv) $x(\sec x + \tan x) - \log(\sec x + \tan x) - \log \sec x.$

(v) same as (iv)

4 (i) $\dfrac{(2e^x - 3)\sqrt{e^{2x} - 3e^x + 1}}{4} - \frac{5}{8} \log\left(e^x - \frac{3}{2} + \sqrt{e^{2x} - 3e^x + 1}\right)$

(ii) $\frac{1}{2}[e^{-2x}(e^x - 1)\sqrt{2e^{2x} - 2e^x + 1}$
$\qquad - \log(1 - e^x + \sqrt{2e^{2x} - 2e^x + 1}) + x]$

(iii) $\frac{1}{3}\left[\dfrac{(2x^3+1)\sqrt{x^6+x^3+1}}{4}\right.$
$\qquad \left. + \frac{3}{8}\log\left(\dfrac{2x^3+1}{2} + \sqrt{x^6+x^3+1}\right)\right]$

(iv) $\dfrac{x^4}{4} + a\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{b^2x^2}{2} + ab^2x$

(v) $-\frac{1}{2}\left[\dfrac{x+2}{2x^2}\sqrt{1+x+x^2} + \frac{3}{4}\log\left(\dfrac{x+2+2\sqrt{1+x+x^2}}{2x}\right)\right]$

5. (i) $\dfrac{3^x}{(\log 3)^2 + 16}\{\log 3 \cos 4x + 4 \sin 4x\}$

(ii) $\dfrac{e^{2x}(2 \sin 2x - 2 \cos 2x)}{16}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} e^x \sin x$

(iv) $\dfrac{3\, e^{mx}}{4(1+m^2)}(m \sin x - \cos x)$
$\qquad - \dfrac{e^{mx}}{9(1+m^2)}(m \sin 3x - 3 \cos 3x)$

(v) $-\dfrac{4e^{-2x}}{17}(2 \cos \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}x)$

6. (i) $\dfrac{(\tan^{-1}x)^2}{2}(x^2+1) - x \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

(ii) $\frac{1}{3}x^3 \tan^{-1}x + \frac{1}{6}[\log(x^2+1) - x^2]$

7. (i) $\dfrac{e^{m \tan^{-1}x}}{\sqrt{m^2+1}} \cos(\tan^{-1}x - \cot^{-1}m)$

(ii) $\frac{1}{4}\, e^{2\theta}\left[\dfrac{2 \cos 3\theta + 3 \sin 3\theta}{13} + \frac{3}{5}(2 \cos \theta + \sin \theta)\right]$

যেখানে, $\tan^{-1}x = \theta$

(iii) $\dfrac{e^\theta}{\sqrt{2}} \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ যেখানে $\sin^{-1}x = \theta$

(iv) e^{θ} $[3(\sin\theta-\cos\theta)-\frac{1}{5}(\sin 3\theta-3\cos 3\theta)]$

যেখানে $\sin^{-1}x=0$

8. (i) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin^{-1}x+\log\sqrt{1-x^2}$

(ii) $\frac{1}{3}\left[\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^3\sin^{-1}x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{1}{2}\log(1-x^2)\right]$

9. (i) $\frac{x}{(\log x)^2}$ (ii) $\frac{x}{(\log x)^n}$ (iii) $x\{\log'(\log x)-\frac{1}{\log x}\}$

10. (i) $3(x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2})$

(ii) $3\{x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\}$

(iii) $x\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{1+x}}$

$$-\frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$$

(iv) $-\frac{1}{2}[-x\cos^{-1}x+\sqrt{(1-x^2)}]$

11. (i) $\sqrt{x(x+a)}-a\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})$

(ii) $\sqrt{x^2+ax}+a\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+a}$

(iii) $(a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{ax-x^2})$

(iv) $-\sqrt{ax-x^2}+a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}})$

12. (i) $-\frac{1}{x}\tan^{-1}x+\log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(ii) $\frac{x^7}{7}\sin^{-1}x+\frac{1}{7}[\sqrt{1-x^2}-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$

$$+\frac{3}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{7}(1-x^2)^{\frac{7}{2}}$$

13. $\frac{\sin x\cos^5x}{6}+\frac{5}{24}\sin x\cos^3x+\frac{5}{16}(x+\sin x\cos x)$

15. $e^x\log\sec x$

16. $\frac{1}{3}\{(\log\sqrt{x})^2\}=\frac{1}{12}(\log x)^2$

17. $xe^x[\log(xe^x)-1)]$

18. $e^x\tan x$

19. $x \log(x+\sqrt{x^2+a^2})-\sqrt{x^2+a^2}$

20. $\frac{1}{2}x^2 \log[x+\sqrt{a^2+x^2}]$
$-\frac{1}{4}[x\sqrt{x^2+a^2}-a^2\log(x+\sqrt{x^2+a})]$

21. $\frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right]$

22. (i) $(x+1)\log(x+1)-x$; (ii) $\frac{x^3}{3}\log x-\frac{x^3}{9}$

23. $(x+1)\tan^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x}$

অনুশীলনী IV A

1. (i) $\frac{1}{9}(10^9-1)=111111111$.
(ii) $\frac{26}{3}$ (iii) $b-a$ (iv) 25·5 (v) $\frac{p}{2}+q$ (vi) 1
(vii) 64 (প্রশ্নে $\int_{-2}^{2}(x+2)^3\,dx$ পড়)

2. 24. 3. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4n}$ (iii) $\frac{3\pi^2}{8}-1$
(iv) $\frac{1}{m}[1-\cos m\pi]$. 4. 0 5. $\frac{\pi}{4}$ 6. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$.

7. $\frac{1}{4}$. 8. $\frac{26}{3}$ 9. $-\frac{7}{288}$. 10, 1.

11. $2-\sqrt{2}$ [প্রশ্নে $\int_0^{\frac{\pi}{4}}$ পড়]

12. 0.

13. $-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)x}{m-n}-\frac{\cos(m-n)x}{(m-n)}\right]$

14. 0. 15. $\frac{\pi}{2}$. 16. $\frac{1}{m}\left[e^{mb}-e^{ma}\right]$.

17. 8 log 2−3. 18. $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$. 19. π. 20. $\frac{1}{16}(\pi^2+4)$.

21. $\frac{1}{2}\log 4+\frac{5}{4}-\frac{9}{2}\log\frac{4}{3}$. 22. $\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\log 2$.

23. $\frac{\pi}{2}$. 24. $\frac{3}{8}\pi^2-\frac{3}{2}$.

অনুশীলনী IV B

1. $\frac{14}{9}$. 2. $\frac{\pi}{4}$. 3. $\frac{\pi}{6}$. 4. $\frac{7}{18}$ 5. $\frac{\pi^2}{8}$. 6. $(\beta-\alpha)^2\frac{\pi}{8}$.

7. $e^{e}(\sqrt{e}-1)$ 8. π. 9. $\frac{\pi}{6}$ [প্রশ্নে $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(5-x)}}$ পড়]

প্রদত্ত প্রশ্নানুসারে উত্তর $2 \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$

10 $\frac{2}{35}$. 11 $\frac{1}{2} \log (2+\sqrt{3})$ 12. $\log \frac{4}{3}$.

13. $\frac{\pi}{4}+\log \frac{8}{5}$. 14. $2 \tan^{-1} 2-\frac{\pi}{2}$. 15. $1-\frac{1}{e}$. 16. $\frac{\pi^2}{32}$.

17. $\log 2$ 18. $\frac{2}{a^2-b^2} \log \frac{a}{b}$. 19. $\frac{2}{3}$. 20. $\frac{14}{15}$.

অনুশীলনী IV C

1. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{a}{3}+b+c$ (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) 4 (v) $\frac{14}{3}$

2. (i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} \log 2$ (iv) $\frac{1}{m+1}$.

অনুশীলনী IV D

1. $\frac{9}{2}$ বর্গ একক 2. $\frac{3}{2}$ বর্গ একক 3. 80 বর্গ একক

4. 1 বর্গ একক 5. (*a*) $\frac{1}{2}$ বর্গ একক (*b*) 8 বর্গ একক

6. $\frac{1}{4}$ বর্গ একক 7. 1 বর্গ একক 8. $\frac{1}{6}$ বর্গ একক

9. (*a*) $\frac{8}{3} \sqrt{a}\, h^{\frac{3}{2}}$ বর্গ একক (*b*) $\frac{1}{3}a^2$ বর্গ একক 10. $\frac{1}{6}$ বর্গ একক

12. $(\frac{1}{2}\pi+\frac{4}{3})$ বর্গ একক। 13. $\frac{2}{\sqrt{ab}} \tan^{-1} \frac{2\sqrt{ab}}{b-a}$ বর্গ একক

14. $\frac{14}{3}$ বর্গ একক 15. (*a*) 12 বর্গ একক 16. 2 বর্গ একক

17. (i) 1 (ii) 1 (iii) 2 বর্গ একক

18. (i) 2 বর্গ একক (ii) 2 বর্গ একক (iii) 4 বর্গ একক।

প্রশ্নমালা 4

1. $\frac{1}{2} \log (2+\sqrt{3})$ 2. $\frac{\pi}{8}$ 3. $\frac{2}{35}$ 4. $\frac{\pi}{6}$ 5. $\frac{\pi}{1-a^2}$

6 $\frac{\pi}{4}$ 7. $\frac{\pi}{4}$ 8. $\frac{\pi^2}{4}$ 9. 0 10. $\frac{1}{5}$

11. $\frac{\pi}{2}$ 12. $\frac{4}{e}$ 13 $\frac{9}{4}$ বর্গ একক 14. 32 বর্গ একক

অনুশীলনী V A

1. (i) প্রথম ঘাত ও প্রথম ক্রম (ii) দ্বিতীয় ঘাত ও প্রথম ক্রম,
(iii) দ্বিতীয় ক্রম ও প্রথম ঘাত (iv) প্রথম ঘাত ও দ্বিতীয় ক্রম
(v) দ্বিতীয় ঘাত ও প্রথম ক্রম।

2. (i) $x\frac{dy}{dx}+y=0$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}-m^2y=0$

(iii) $x\left\{y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}=y\frac{dy}{dx}$

(iv) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dv}{dx}+2y=0$ (v) $\frac{d^2r}{d\theta^2}-\frac{dr}{d\theta}\cot\theta=0$

3. $8a\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=27y$

অনুশীলনী V B

1. $\frac{1}{2}(y^2-x^2)+(y-x)=c$

2. $\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+c$

3. $x^2-y^2=a^2$ 4. $ye^x=cx$

5. $1+x^2=c(1+y^2)$ 6. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=c$

7. $x=c\sqrt{1+y^2}$ 8. $r=c\cos\theta$ 9. $y=5e^x+1$

10. $y^2=4x+c$ 12. $(e^x+2)\sec y=3\sqrt{2}$

অনুশীলনী V C

1. $y=\frac{a}{2}\log\frac{c(x-y-a)}{x-y+a}$

2. $\sqrt{y-x}+\log(\sqrt{y-x}-1)=\frac{1}{2}x+c$

3. $-e^{-(x+y)}=x+c$ 4. $\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)=x+c$

5. $x=\int\frac{dz}{a+bf(z)}+c$ যেখানে $z=ax+by+c$

অনুশীলনী V D

1. $y=x+cxy$ 2. $\log y=\frac{x^2}{2y^2}+c$

3. $cx=e^{\frac{x}{y}}$ 4. $(x+y)^3=c(y-x)$

5. $y^3=x^3\log cx^3$ 6. $\log x=\sin\left(\frac{y}{x}\right)+c$

অনুশীলনী V E

1. $x^2+y^2-xy+x-y=c$
2. $5xy-3y^2-2x^2-2y-3x=c$
3. $(5y-2x-3)^4=c(4y-4x-3)$

4. $2x-y-15\log(3x-y+19)=c$
5. $6y-3x=\log(3x+3y+2)+c$
6. $\log(4x+8y+5)=4x-8y+c$

প্রশ্নমালা 5

1. $(x+1)^2+(y+1)^2+2\log(x-1)(y-1)=c.$
2. $x\tan x-\log\sec x=y\tan y-\log\sec y+c.$
3. $\log\frac{x}{y}-\frac{x+y}{xy}=c.$ 4. $(x^2+y^2)(x+2)^2=cx^2.$
5. $y=a\tan^{-1}\frac{x+y}{a}+c$
6. $2\{\sqrt{x+y}-\log(1+\sqrt{x+y})\}=x+c.$
7. $\tan(x+y)-\sec(x+y)=c+x.$
8. $3\log(x^2+y^2)=4\tan^{-1}\frac{y}{x}+c$ 9. $y^3e^{\frac{x}{y}}=cx^2.$
10. $xy=ce^{\frac{x}{y}}$ 11. $xy^2=c(x+2y)$
12. $x=c\sin\frac{y}{x}$ 13. $(3y-5x+10)^2c=(y-x+1).$
14. $\log(4x+4y+2)=6y+6x+c.$
15. $\frac{I}{I_0}=e^{\frac{R}{L}t}$ 16. $p=A+cr^{-2}.$

পরিশিষ্ট

1. $\log\frac{x-2}{x-1}.$ 2. $\log\frac{3x+2}{4x+3}.$ 3. $2\log(x-3)-\log(x-2).$
4. $\log\{(x-2)^2(x+1)\}.$ 5. $\frac{1}{a-b}\{a\log(x-a)-b\log(x-b)\}$
6. $\frac{1}{x+1}+\log\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2.$ 7. $4\log(x+2)-3\log(x+1)-\frac{1}{x+1}$
8. $\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\log\frac{x-3}{x-1}.$
9. $\frac{3}{10}\{\log(x^2+4)-2\log(1-x)\}-\frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2}$
10. $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\log\frac{1-x}{\sqrt{1+x+x^2}}$

11. $\frac{1}{6}\log\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

12. $\frac{x^2}{2}+3x+10\log(x-2)-3\log(x-1)$

13 $x-\frac{1}{2}\log(x+a)-\frac{1}{4}\log(x^2+a^2)-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{a}$.

14. $\frac{x^2}{2}+2x+\frac{21}{5}\log(x-2)-\frac{1}{10}\log(x^2+1)-\frac{2}{5}\tan^{-1}x$.

15. $\log\frac{(x-3)^3}{(x-1)(x-2)}$ 16. $\frac{3}{7}\log\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}+\frac{2}{7}\tan^{-1}\frac{x}{2}$

17. $\tan^{-1}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}$

18. $\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]$

19. $\frac{1}{7}\log\frac{x-2}{x+2}+\frac{\sqrt{3}}{7}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}$.

20. $2x+\frac{11}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}-7\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}$.

21. $x^2+\log(1-x^2)=c$

22. $\frac{1}{4}\log\frac{x^2-1}{x^2+1}$ 23. $2\log\frac{x^2-2}{x^2+1}$

24. $\frac{1}{6}\{\log(x^2-2)-\log(x^2+1)\}$.

গতিবিদ্যা
(Dynamics)

চিহ্ন সম্বন্ধে বক্তব্য

1. A ও B বিন্দুদ্বয়-সংযোজক রেখাংশকে সাধারণতঃ AB দ্বারা প্রকাশ করা হইবে। AB রেখাংশের দৈর্ঘ্যকেও AB দ্বারা প্রকাশ করা হইবে। কখন রেখাংশ আর কখন দৈর্ঘ্য বুঝান হইতেছে তাহা প্রসঙ্গ হইতে বুঝিতে হইবে। তবে সাধারণতঃ AB রেখাংশের ক্ষেত্রে রেখাংশ উল্লেখ করা হইবে।

2. $\overline{AB}$ দ্বারা নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ বোঝান হইবে। $\overline{AB}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশের প্রারম্ভিক বিন্দু A ও অন্তিম বিন্দু B। $\overline{AB}$ দ্বারা ভেক্টর $\overline{AB}$কেও বোঝান হইবে।

3. $\overleftrightarrow{AB}$ দ্বারা A ও B বিন্দু সংযোজক সরলরেখাকে বোঝান হইবে।

4. $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার সেই অংশকে বুঝান হইবে যাহার প্রারম্ভবিন্দু A ও অভিমুখিতা B-র দিকে।

প্রথম অধ্যায়

সূচনা

§ 1·1. **দেশ, কাল ও জড় : ধারণা ও সংজ্ঞা** (Space, time and matter—ideas and definitions).

বলবিদ্যা এবং ইহার আলোচ্য বিষয় সম্বন্ধে কিছু ধারণা করিতে হইলে প্রথমে দেশ, কাল, জড়, গতি, স্থিতি, বল ইত্যাদির সংজ্ঞা জানা অথবা ইহাদের সম্বন্ধে কিছু ধারণা থাকা প্রয়োজন। দেশ, কাল ও জড় বলবিদ্যার তিনটি মৌল ধারণা। এই তিনটি মৌল ধারণা হইতেই অন্যান্য ধারণার উৎপত্তি। দেশ, কাল বা জড় সম্বন্ধে আমাদের স্বজ্ঞাত ধারণা (Intuitive idea) আছে, কিন্তু ইহাদের সংজ্ঞা নির্ধারণ করা অত্যন্ত কঠিন।

বলবিদ্যায় **দেশ** (space) বলিতে দৈর্ঘ্য বা দুইটি বিন্দুর দূরত্ব বুঝায়। দৈর্ঘ্যের ধারণা হইতে ক্ষেত্রফল (area) ও আয়তন (volume)-এর ধারণার উৎপত্তি। প্রাত্যহিক জীবনে ঘড়ি দ্বারা সময়ের পরিমাপ করা হয়। যাহা স্থান অধিকার করে এবং ইন্দ্রিয়-গ্রাহ্য তাহাই **জড়** (matter)। সীমাবদ্ধ এবং নির্দিষ্ট আকার ও আয়তনবিশিষ্ট জড়কে **বস্তু** (body) বলে। কোন বস্তুর জড়ের পরিমাণকে উহার **ভর** (mass) বলা হয়। ভরযুক্ত বিন্দুকে **কণা** (particle) বলা হয়, অর্থাৎ দৈর্ঘ্য, প্রস্থ বা উচ্চতাহীন যে বস্তু বিন্দুতে অবস্থান করে তাহাই কণা।

কোনও বস্তু অবস্থান পরিবর্তন করিলে উহাকে **গতিশীল** (in motion) বলা হয়। কোন বস্তু স্থান পরিবর্তন না করিলে উহা **স্থিরাবস্থায়** (at rest) থাকে। সুতরাং বস্তু বা কণার দুইটি অবস্থা (i) গতি (motion) এবং (ii) স্থিতি বা স্থিরাবস্থা (rest).

কোনও বস্তুর একই দিকে স্থান পরিবর্তনের হারকে উহার **বেগ** (velocity) বলে। কোনও বস্তুর বেগের পরিবর্তন না হইলে উহা **সমবেগে** (in uniform velocity) আছে বলা হয়। বেগ ও সমবেগ সম্বন্ধে ব্যাপকতর আলোচনা দ্বিতীয় অধ্যায়ে করা হইবে।

বল (Force)-এর সংজ্ঞা নিউটনের প্রথম গতি সূত্র হইতে পাওয়া যায়। যাহা বস্তুর স্থিরাবস্থা বা সরলরেখায় সমবেগে গতিশীল অবস্থার পরিবর্তন করে অথবা পরিবর্তন করিতে চেষ্টা করে, তাহাকে **বল** বলা হয়।

§ 1·2. **বলবিদ্যা** (Mechanics).

গণিতের যে শাখায় বস্তু বা কণার গতি বা স্থিতি এবং উহাদের উপর প্রযুক্ত বলের সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়, তাহাকে **বলবিদ্যা** বলে। বলবিদ্যার দুইটি মূল শাখা (1) গতিবিদ্যা (Dynamics) এবং (2) স্থিতিবিদ্যা (Statics).

গতিবিদ্যায় বস্তুর গতি এবং গতির কারণ সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়। গতিবিদ্যা আবার দুইটি শাখায় বিভক্ত; (i) **স্থৃতিবিদ্যা** বা **কাইনেম্যাটিক্স** (Kin ematics) এবং (ii) **গতিবিজ্ঞান** বা **কাইনেটিক্স** (Kinetics). স্থৃতিবিদ্যায় গতির কারণ সম্বন্ধে আলোচনা ব্যতিরেকেই বস্তু বা কণার গতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়। গতিবিজ্ঞান বা কাইনেটিক্সে গতির কারণ বা বল, বলের নিয়ম বা সূত্র এবং বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলসমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়। স্থিতিবিদ্যায় কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ায় উহার **স্থিরাবস্থা** বা **সাম্যাবস্থা** (Equilibrium) সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়।

§ 1·3. **ঐতিহাসিক আলোচনা** (Historical Notes).

বলবিদ্যা বিজ্ঞানের একটি প্রাচীনতম শাখা। প্রাচীনকালে যে সকল গণিতজ্ঞ এই নিখিল বিশ্বে ক্রিয়াশীল বলসমূহের প্রকৃতি বিষয়ে অনুসন্ধান করিয়াছিলেন, তাঁহাদের মধ্যে প্রথম নাম সিসিলির সিরাকাস শহরের **আর্কিমেডিস** (287-212 B. C.)-এর। তিনি লিভারের তত্ত্ব এবং উদস্থিতি বিদ্যার প্রথম সূত্রটি (First Law of Hydrostatics) আবিষ্কার করেন এবং একাকী লিভার এবং অন্যান্য যন্ত্রের সাহায্যে একটি পরিপূর্ণ জাহাজকে সমুদ্রে ভাসাইতে সমর্থ হন। কথিত আছে আর্কিমেডিস স্নানকালে উদস্থিতি বিদ্যার প্রথম সূত্রটি আবিষ্কার করেন। এই সূত্র আবিষ্কারের আনন্দের আতিশয্যে আর্কিমেডিস এত অধীর হন যে স্নানাগার হইতে নগ্নদেহে সিরাকাসের পথে **ইউরেকা! ইউরেকা!** (আমি পাইয়াছি! আমি পাইয়াছি!) বলিতে বলিতে বাহির হইয়া পড়েন। **গ্যালিলিও** এবং **স্টিভেনাস** তাঁহাদের প্রযুক্তি (technique) এবং যুক্তি পদ্ধতির জন্য আর্কিমেডিসের নিকট ঋণী। প্রকৃতপক্ষে আর্কিমেডিসকে স্থিতিবিদ্যার স্রষ্টা বলিলে গ্যালিলিওকে গতিবিদ্যার জনক বলা যায়।

গ্যালিলিও-ই (1564—1642) প্রথম গতিসূত্রসমূহ আবিষ্কার করেন; স্যার আইজ্যাক নিউটন (1642—1727) বর্তমান সুসংবদ্ধ আকারে

গতিসূত্রসমূহকে তাঁহার বিখ্যাত গ্রন্থ 'Principia Mathematica'-য় লিপিবদ্ধ করেন। 'নিউটনের গতিসূত্র' নামে পরিচিত গতিসূত্র তিনটি 'বলবিদ্যা'র ভিত্তি। বর্তমান শতাব্দীর প্রথমার্ধে ইলেকট্রন, প্রোটন ইত্যাদি উপ-আণবিক কণাসমূহের (Sub-atomic particles) গতি সম্বন্ধে আলোচনার ফলে **কোয়াণ্টাম বলবিদ্যা** (Quantum Mechanics)-এর উদ্ভব হইয়াছে।

§ 1·4. **একক** (Units): কোনও রাশিকে পরিমাপ করিতে হইলে সেই রাশিটির ভিতর সমজাতীয় একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ রাশি কতবার আছে তাহা নির্ধারণ করিতে হয়। ঐ নির্দিষ্ট-পরিমাণ রাশিটিকে **একক** (unit) বলে এবং নির্দিষ্ট পরিমাণ রাশিটি প্রদত্ত রাশিটির মধ্যে যতবার আছে তাহাকে রাশিটির সাংখ্যমান (**Numerical measure**) বলে। যেমন মনে কর, একটি ছাত্রের উচ্চতা 156 সেন্টিমিটার; এই ক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ দৈর্ঘ্যকে সেন্টিমিটার বলা হয় এবং ছাত্রটির উচ্চতা ঐ নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের 156 গুণ। 156 হইল দৈর্ঘ্যের বা ছাত্রটির উচ্চতার সাংখ্যমান এবং সেন্টিমিটার উহার একক।

গাণিতিক আলোচনায় সাধারণত দুই প্রকার এককের ব্যবহার প্রচলিত আছে। এই দুইটি একক হইল **সি. জি. এস্.** (C. G. S.) বা সেন্টিমিটার, গ্রাম, সেকেণ্ড এবং **এফ্. পি. এস্.** (F.P.S) বা ফুট, পাউণ্ড, সেকেণ্ড একক। অধুনা আমাদের দেশে **এম্. কে. এস্.** (M.K.S.) বা মিটার, কিলোগ্রাম, সেকেণ্ড এককের প্রচলন হইয়াছে।

সি. জি. এস. একক: এই এককে দৈর্ঘ্যের একক এক সেন্টিমিটার; পৃথিবীর পরিধি 4,00,00,000 মিটার (দৈর্ঘ্যের মেট্রিক্ একক এক মিটার এবং 1960 খৃষ্টাব্দের পূর্বপর্যন্ত একটি নির্দিষ্ট প্লাটিনাম-ইরিডিয়াম দণ্ডের দৈর্ঘ্যকে এক মিটার এবং এই দণ্ডকে মিটার-দণ্ড বলা হইত)। এক মিটারের এক শতাংশকে এক সেন্টিমিটার বলে (আধুনিককালে ক্রোমিয়ামের আইসোটোপের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য বা wave length-এর দ্বারা সেন্টিমিটার প্রকাশ করা হয়)।

সি. জি. এস. পদ্ধতিতে ভরের একক এক গ্রাম। 4° সেন্টিগ্রেড তাপমাত্রায় এক ঘন সেন্টিমিটার বিশুদ্ধ জলের আয়তনের ভরকে এক গ্রাম বলা হয়।

এই পদ্ধতিতে সময়ের একক এক সেকেণ্ড। এক (গড়) সৌরদিনের 86,400 অংশের এক অংশকে এক সেকেণ্ড বলে।

এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক এক ফুট। এক ফুট, এক গজের এক-তৃতীয়াংশ। লণ্ডনের বোর্ড অব্ ট্রেডের দপ্তরে (Office of the Board

of Trade in London) 62° ফারেনহাইট তাপমাত্রায় রক্ষিত একটি ব্রোঞ্জ দণ্ডের দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর দূরত্বকে এক আদর্শ গজ (one standard yard) বলে। 12 ইঞ্চিতে 1 ফুট এবং 1760 গজে এক মাইল। এফ্. পি. এস. পদ্ধতিতে ভরের একক এক পাউণ্ড এবং লণ্ডনের বোর্ড অব্ ট্রেডের দপ্তরে রক্ষিত একটি প্লাটিনাম খণ্ডের ভরকে এক পাউণ্ড বলা হয়। এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে সময়ের একক এক (সি. জি. এস্.) সেকেণ্ড।

এম্. কে. এস্ পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক এক মিটার = 100 সি. জি. এস্. সেন্টিমিটার ; ভরের একক এক কিলোগ্রাম = 1000 গ্রাম (সি. জি. এস্.)

এফ্. পি. এস্. ও সি. জি. এস্. এককের সম্পর্ক :—

1 ফুট = 30·4 সে. মি. ; 1 পাউণ্ড = 453·6 গ্রাম।

দ্রষ্টব্য। বর্তমানে যুক্তরাজ্য সহ পৃথিবীর সকল দেশেই সি. জি. এস্. পদ্ধতির প্রচলন হইয়াছে। পূর্বে যুক্তরাজ্যে এফ্. পি. এস্. একক প্রচলিত ছিল।

§ 1·5. স্কেলার ও ভেক্টর রাশি (Scalar and vector quantities): যে রাশির কেবলমাত্র পরিমাণ আছে, তাহাকে **স্কেলার রাশি** (Scalar quantity) ; আর যে রাশির পরিমাণ, দিক ও অভিমুখিতা থাকে, তাহাকে **ভেক্টর রাশি** (vector quantity) বলে। ভর একটি স্কেলার রাশি ; কারণ, কোন বস্তুর ভরের কেবলমাত্র পরিমাপ করা যায়। কিন্তু বেগ ভেক্টর রাশি ; কোন কণার বেগ কোন্‌দিকে অর্থাৎ কোন্ সরলরেখায় এবং কোন্ অভিমুখে অর্থাৎ A হইতে B-র দিকে অথবা B হইতে A-র দিকে তাহা না জানিলে ঐ কণার বেগ সম্পূর্ণরূপে জানা যায় না।

নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশ দ্বারা ভেক্টর রাশির প্রকাশ করা হয়। যে কোন সরলরেখাংশের প্রান্তবিন্দু দুইটির একটিকে **প্রারম্ভ বিন্দু** (Initial point) ও অপরটিকে **অন্তিম বিন্দু** (Terminal point) ধরিয়া সরলরেখাংশটিকে **নিয়ন্ত্রিত** করা হয়। নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশকে প্রকাশের জন্য আমরা নিম্নলিখিত প্রথা অনুসরণ করিব। A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশকে $\overline{AB}$ দ্বারা নির্দেশ করা হইবে। $\overline{AB}$ নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশের প্রারম্ভ বিন্দু A ও অন্তিম বিন্দু B এবং $\overline{BA}$ নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশের প্রারম্ভ বিন্দু B ও অন্তিম বিন্দু A.

কোন সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যই উহার পরিমাপ এবং উহা কোন নির্দিষ্ট দিককে নির্দেশ করে। নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশের অভিমুখিতা উহার প্রারম্ভ বিন্দু হইতে অন্তিম বিন্দুর দিকে। অতএব যে সকল বৈশিষ্ট্য জানা থাকিলে

একটি ভেক্টরকে সম্পূর্ণরূপে জানা যায়, নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশেরও সেই সকল বৈশিষ্ট্য বর্তমান। সুতরাং নিয়ন্ত্রিত রেখাংশের দ্বারা ভেক্টরের প্রকাশ করা যাইতে পারে। সরলরেখাংশ দ্বারা ভেক্টরের প্রকাশ করিতে হইলে প্রথমেই স্কেল (scale) নির্দিষ্ট করিতে হয়।

স্কেল (Scale) **:** যদি একাধিক ভেক্টরকে একই চিত্রে প্রকাশ করিতে হয়, তবে ভেক্টরগুলির পরিমাপ ও যে সকল নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশ উহাদের প্রকাশ করিবে, তাহাদের দৈর্ঘ্যগুলির সমানুপাতিক হওয়া প্রয়োজন। এই সমানুপাতই ভেক্টর প্রকাশের স্কেল। মনে কর বেগ প্রকাশের স্কেল 1 সে. মি. =10 মিটার/সেকেণ্ড; সুতরাং 50 মিটার/সেকেণ্ড বেগকে 5 সে. মি. দীর্ঘ নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে। সুতরাং **সমান ও সমান্তরাল যে সকল নিয়ন্ত্রিত রেখাংশের অভিমুখিতা অভিন্ন তাহারা একই স্কেলে একই ভেক্টররাশিকে প্রকাশ করিবে।**

দ্বিতীয় অধ্যায়

বেগ ও ত্বরণ

(Velocities and Acceleration)

§ 2·1. **সরণ, দ্রুতি ও বেগ** (Displacement, speed and acceleration) :

কোনও বস্তু অবস্থান পরিবর্তন করিলে উহার **সরণ** হইতেছে বলা হয়। মনে কর একটি কণা A বিন্দু হইতে B বিন্দুতে উহার অবস্থান পরিবর্তন করিল; A বিন্দুকে কণাটির প্রারম্ভিক অবস্থান (Initial position) এবং B বিন্দুকে উহার অন্তিম অবস্থান (Final position) বলা হয়। কণাটি যে পথেই A বিন্দু হইতে B বিন্দুতে আসুক না কেন, উহার AB দৈর্ঘ্য সরণ হইয়াছে বলা হয়। AB দৈর্ঘ্যকে কণাটির **সরণ দৈর্ঘ্য** বলে। নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AB}$-র দিক্ ও অভিমুখিতাকে যথাক্রমে কণাটির সরণের দিক ও অভিমুখিতা বলে। সুতরাং সরণের পরিমাপ, দিক ও অভিমুখিতা আছে। অতএব সরণ একটি ভেক্টর রাশি। নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AB}$ এইক্ষেত্রে কণাটির সরণ-ভেক্টর (Displacement-vector)-এর প্রকাশক।

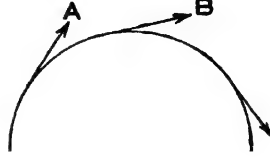
চিত্র 1

কোনও গতিশীল বস্তুর পথ অতিক্রমের হারকে উহার **দ্রুতি** (speed) বলে। একটি নির্দিষ্ট দিকে দ্রুতিকে **বেগ** (velocity) বলে। সুতরাং বেগ একটি ভেক্টর রাশি; কারণ ইহার পরিমাপ, দিক ও অভিমুখিতা আছে। যেহেতু, দ্রুতির কেবলমাত্র পরিমাপ আছে কিন্তু দিক ও অভিমুখিতা নাই, সেজন্য দ্রুতি একটি স্কেলার রাশি।

একটি বস্তু সমপরিমাণ সময়ে (যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) সমান পথ অতিক্রম করিলে, বস্তুটির দ্রুতিকে **সমদ্রুতি** (Uniform speed) বলা হয়।

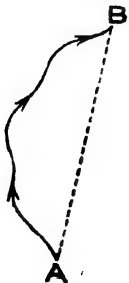
সংজ্ঞা : কোনও কণার সরণের হারকে উহার বেগ বলে। কোন কণা সমপরিমাণ সময়ে (যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) সমান পথ অতিক্রম করিলে এবং দিক ও অভিমুখিতার পরিবর্তন না করিলে (অর্থাৎ একই সরলরেখায় একই অভিমুখে গতিশীল হইলে) উহার বেগকে **সমবেগ** (Uniform velocity) বলে। সুতরাং সমবেগ হইল সরলরেখায় একই অভিমুখে

সমদ্রুতি। নিম্নের উদাহরণের সাহায্যে দেখান হইতেছে যে, কোন কণার সমদ্রুতি থাকিলেও উহার সমবেগ নাও থাকিতে পারে।

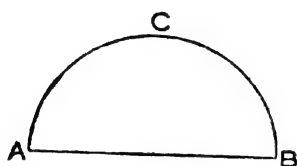
মনে কর একটি কণা একটি বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে গতিশীল। লক্ষ্য কর কণাটির গতির দিক অনবরত পরিবর্তিত হইতেছে (চিত্র 2)। সুতরাং কণাটির বেগ, সমবেগ নয়, কারণ, সমবেগে চলিতে হইলে কোন কণাকে সরলরেখায় একই অভিমুখে সমদ্রুতিতে গতিশীল হইতে হইবে। কোন কণা সমদ্রুতি অথবা সমবেগে চলিয়া t সময়ে s পথ অতিক্রম করিলে উহার সমদ্রুতি বা সমবেগ $\frac{s}{t}$. সি.জি.এস. ও এফ. পি. এস্. পদ্ধতিতে উহাদের একক যথাক্রমে সেন্টিমিটার/সেকেণ্ড এবং ফুট/সেকেণ্ড।

চিত্র 2

কোন কণার বেগ সমবেগ না হইলে উহার বেগকে পরিবর্তনশীল বেগ (variable velocity) বলা হয়। কোনও একটি t-তম সময়ে কোন কণার বেগ নির্ণয় করিতে হইলে মনে কর উহার গতিপথের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ নির্দিষ্ট t-তম সময়ে কণাটির দূরত্ব s (দূরত্বটি কণাটির গতিপথ বরাবর পরিমাপ করিতে হইবে)। এইবার মনে কর এই t-তম সময়ের δt সময় পরে (δt সময়টি এত ক্ষুদ্র যে, t হইতে $t+\delta t$ সময় পর্যন্ত অর্থাৎ δt সময় ব্যাপিয়া কণাটির সমবেগে গতি মনে করা যায়) প্রথম নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কণাটির দূরত্ব হইল $s+\delta s$.

$\underset{\delta t \to 0}{Lt} \frac{\delta s}{\delta t}$-কে (যদি সীমাটি নির্ণেয় হয়) বা $\frac{ds}{dt}$-কে ঐ t-তম সময়ে কণাটির বেগ বলা হয়।

§ 2·2. **গড়দ্রুতি ও গড়বেগ** (Average speed and average velocity). কোন কণার গতিকালে কোন সসীম সময়ে কণাটি যে পথ অতিক্রম করে, সমদ্রুতিতে চলিয়া কোন কণা ঐ একই সময়ে একই পথ অতিক্রম করিলে, কণার ঐ সমদ্রুতিকে ঐ সময়ের মধ্যে কণাটির **গড়দ্রুতি** (average speed) বলে। কোনও কণার গতিকালে কোন সসীম সময়ে বস্তুটির যে সরণ হয়, সমবেগে চলিয়া কোন কণার ঐ একই সময়ে একই সরণ হইলে, কণার ঐ সমবেগকে কণাটির **গড়বেগ** (average velocity) বলে।

চিত্র 3

মনে কর একটি গতিশীল কণা t সময়ে A অবস্থান হইতে B অবস্থানে আসে এবং অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্য s. সুতরাং এই t সময়ের মধ্যে বস্তুটির গড়দ্রুতি $\frac{s}{t}$. যদি অতিক্রান্ত পথ একটি সরলরেখা না হয় (চিত্র 3), তবে সরলরেখা দ্বারা A ও B যোগ কর। মনে কর AB রেখাংশের দৈর্ঘ্য d. সুতরাং এই t সময়ে কণাটির গড়বেগ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AB}$-র দিক ও অভিমুখিতায় $\frac{d}{t}$.

দ্রষ্টব্য : অতিক্রান্ত পথে কোন একটি সময়ের মধ্যে গড়বেগ এবং গড়দ্রুতি ভিন্ন হইতে পারে। মনে কর একটি কণার অতিক্রান্ত পথ একটি অর্ধবৃত্তের পরিধি ACB এবং এই পথ কণাটি 11 সেকেণ্ডে অতিক্রম করে। অর্ধবৃত্তটির ব্যাস 42 সে.মি. হইলে অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্য $\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times42$ ($\pi=\frac{22}{7}$ ধরিয়া) $=66$ সে.মি.। সুতরাং গড়দ্রুতি সেকেণ্ডে $\frac{66 \text{ সে. মি.}}{11}=6$ সে. মি.। কিন্তু ACB পথ অতিক্রমের ফলে কণাটির সরণ হইল AB$=42$ সে. মি. দৈর্ঘ্য। সুতরাং তাহার গড়বেগ $\frac{42}{11}$ সে. মি./সেকেণ্ড, $\overline{AB}$-র দিক ও অভিমুখিতায়। সুতরাং এইক্ষেত্রে গড়দ্রুতি ও গড়বেগ বিভিন্ন।

চিত্র 4

§ 2·3. সমবেগকে নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ :—

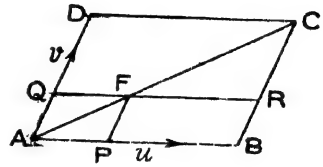
যেহেতু বেগ ভেক্টর রাশি সুতরাং কোন কণার সমবেগকে নিয়ন্ত্রিত সরল-রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। সমবেগকে নিয়ন্ত্রিত সরলরেখা দ্বারা প্রকাশ করিতে হইলে যে প্রথমেই স্কেল ঠিক করিতে হয়, তাহা § 1·5-এ বলা হইয়াছে।

§ 2·4. বেগের সংযুক্তি ও লব্ধিবেগ (Composition and Resultant of velocities) :—

কোন বিশেষ মুহূর্তে একটি গতিশীল বস্তুর বিভিন্ন দিক ও অভিমুখিতায় যুগপৎ একাধিক বেগ থাকিতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, কোন নদীতে যখন নৌকা চলে তখন নৌকার যুগপৎ দুইটি বেগ থাকে ; একটি দাঁড়ের বেগ এবং অপরটি নদীর স্রোতের বেগ। কিন্তু এই দুইটি যুগপৎ বেগের ফলে নৌকাটির একটি নির্দিষ্ট দিকে একটি নির্দিষ্ট বেগ থাকে। এই নির্দিষ্ট বেগকে ঐ যুগপৎ

বেগ দুইটির লব্ধিবেগ (Resultant velocity) এবং ঐ যুগপৎ বেগ দুইটির প্রত্যেকটিকে লব্ধিবেগের উপাংশ (component) বলা হয়।

§ 2·4(*a*). **বেগের সামান্তরিক সূত্র (Parallelogram of velocities) :** যদি কোন কণার দুইটি যুগপৎ সমবেগ ABCD সামান্তরিকের $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ সন্নিহিত বাহুদ্বয় দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তবে ঐ যুগপৎ সমবেগ দুইটির লব্ধিবেগ ABCD সামান্তরিকের A বিন্দু হইতে অঙ্কিত $\overline{AC}$ কর্ণদ্বারা প্রকাশিত হইবে। লব্ধিবেগটিও একটি সমবেগ হইবে।

মনে কর যে মুহূর্তে কণার গতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে, তাহার প্রারম্ভে কণাটির অবস্থান A বিন্দুতে। মনে কর এই সময় কণাটির যুগপৎ দুইটি সমবেগ u ও v যথাক্রমে ABCD সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ দ্বারা প্রকাশিত হয়। একক সময় পরে কণাটি $\overline{AB}$ রেখায় u বেগে B বিন্দুতে পৌঁছায়। এই সময়ে v বেগের জন্য AB রেখাংশের প্রত্যেকটি বিন্দু $\overline{AD}$-র দিকে DC রেখাংশে গতিশীল হইবে এবং ফলে $\overline{AB}$-র নূতন অবস্থান হইবে সমান্তরাল সরলরেখাংশ $\overline{DC}$. সুতরাং একক সময় পরে কণাটির অবস্থান হইবে C বিন্দুতে এবং এই গতিকালে A বিন্দু সর্বদা $\overline{AD}$-র উপরে থাকিবে।

চিত্র 5

এই পর্যন্ত উপরের যুক্তি অসমবেগ u ও v-এর জন্যও সত্য; কিন্তু অসমবেগের ক্ষেত্রে কণাটির অতিক্রান্ত পথ সম্বন্ধে কিছু জানা যায় না।

এক্ষণে, মনে কর একক সময়ের কোন একটি অংশের পরে $\overline{AB}$-র অবস্থান হইল $\overline{QR}$. যদি এই সময়ে $\overline{AB}$ রেখায় u বেগের জন্য কণাটি $\overline{AB}$-র P বিন্দুতে অবস্থিত হয়, তবে তখন কণাটির প্রকৃত অবস্থান হইবে F বিন্দুতে যেখানে $\overline{PF}$ ও $\overline{AQ}$ সমান ও সমান্তরাল।

এক্ষণে, সমবেগের জন্য $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{AQ}{AD}$

সুতরাং APFQ সামান্তরিক সম্পূর্ণ করা হইলে, $\triangle AFP$ ও $\triangle ACB$ পরস্পর সদৃশ হইবে এবং F, AC রেখাংশের উপর অবস্থিত হইবে।

$$\therefore \quad \frac{AF}{AC}=\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AD}.$$

সুতরাং কণাটি সর্বদা $\overrightarrow{AC}$-রেখায় গতিশীল থাকিবে এবং P ও Q কর্তৃক

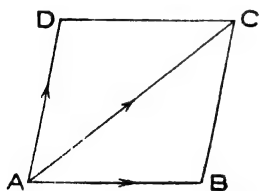
অতিক্রান্ত পথের সহিত কণাটির অতিক্রান্ত পথ সর্বদা সমানুপাতিক হইবে। সুতরাং লব্ধিবেগ একটি সমবেগ হইবে এবং নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AC}$ দ্বারা প্রকাশিত হইবে।

দ্রষ্টব্য : ভেক্টর-চিহ্নে $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$।

§ 2·5. **ত্বরণ** (Acceleration).

সংজ্ঞা। বেগের পরিবর্তনের হারকে **ত্বরণ** (acceleration) বলে। এখানে পরিবর্তন বলিতে দিক অথবা পরিমাপের অথবা উভয়েরই পরিবর্তন হইতে পারে। বক্রপথে গতিশীল একটি কণার ত্বরণ থাকে, কারণ কণাটি অনবরত গতির দিক পরিবর্তন করিতেছে। বেগের ন্যায় ত্বরণের ক্ষেত্রেও সমত্বরণ (uniform acceleration), একাধিক ত্বরণের লব্ধিত্বরণ (resultant acceleration) এবং কোন ত্বরণের উপাংশ ত্বরণের সংজ্ঞা নির্ধারণ করা যায়। ত্বরণের ক্ষেত্রেও নিম্নলিখিত সামান্তরিক সূত্রটি পাওয়া যায়।

§ 2·5(*a*). **ত্বরণের সামান্তরিক সূত্র** (The Parallelogram law of acceleration).

যদি কোন কণার দুইটি যুগপৎ সমত্বরণ কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তবে ঐ যুগপৎ ত্বরণ দুইটির লব্ধি ত্বরণ, ঐ সামান্তরিকের A বিন্দু হইতে অঙ্কিত কর্ণ $\overline{AC}$ দ্বারা প্রকাশিত হইবে।

চিত্র 6

মনে কর নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ দ্বারা যুগপৎ ত্বরণ দুইটি প্রকাশিত হয়। ABCD সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ কর। যেহেতু $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ লব্ধি ত্বরণের উপাংশ দুইটিকে প্রকাশ করে, সেজন্য ঐ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ দুইটি একক সময়ে অর্জিত উপাংশবেগ দুইটিকেও প্রকাশ করিবে। সুতরাং বেগের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী সামান্তরিকটির $\overline{AC}$ কর্ণ অর্জিত লব্ধি বেগকে প্রকাশ করিবে। সুতরাং $\overline{AC}$ কর্ণ কণাটির লব্ধি ত্বরণকে প্রকাশ করিবে।

§ 2·6. **কোন বস্তুর দুইটি যুগপৎ সমবেগের লব্ধি-সমবেগের পরিমাপ ও দিক নির্ণয় :—**

মনে কর $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশদ্বয় একটি বস্তুর দুইটি যুগপৎ সমবেগ u এবং vকে প্রকাশ করে এবং $m\angle BAD=\alpha$.

ABCD সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ কর।

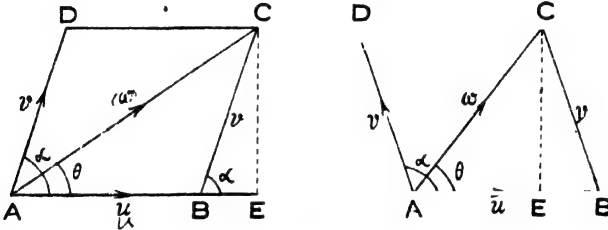
সুতরাং বেগের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে, সামান্তরিকটির $\overline{AC}$ কর্ণ এই সমবেগ দুইটির লব্ধি সমবেগকে প্রকাশ করিবে। মনে কর এই লব্ধি সমবেগের পরিমাপ w. আবার যেহেতু $\overline{AD}$ ও $\overline{BC}$ পরস্পর সমান ও সমান্তরাল,

$\therefore$ $\overline{BC}$, v সমবেগকে প্রকাশ করিবে।

মনে কর $m\angle CAB=\theta$.

C বিন্দু হইতে $\overline{CE}$, AB বা AB-র বর্ধিতাংশের উপর (যখন α সূক্ষ্মকোণ) লম্ব অঙ্কন কর।

এক্ষণে CAE ত্রিভুজে,

$BE=BC \cos CBE=BC \cos DAB=v \cos \alpha$ [যদি α সূক্ষ্মকোণ হয়, (প্রথম চিত্র)]

চিত্র 7

অথবা $BE=BC \cos CBE=BC \cos (180^\circ-\angle DAB)$

$$=-BC \cos \angle DAB=-v \cos \alpha$$

[যখন α স্থূলকোণ ; (দ্বিতীয় চিত্র)]

প্রথম ক্ষেত্রে, $AE=AB+BE=u+v \cos \alpha$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $AE=AB-BE=u-(-v \cos \alpha)=u+v \cos \alpha$

আবার উভয় ক্ষেত্রেই $CE=BC \sin \alpha=v \sin \alpha$

[$\because$ $\sin (180^\circ-\alpha)=\sin \alpha$]

এক্ষণে, $AC^2=AE^2+CE^2$.

সুতরাং উভয় ক্ষেত্রেই,

$$w^2=(u+v \cos \alpha)^2+(v \sin \alpha)^2$$
$$=u^2+2uv \cos \alpha+v^2 \cos^2 \alpha+v^2 \sin^2 \alpha$$
$$=u^2+v^2 (\cos^2 \alpha+\sin^2 \alpha)+2uv \cos \alpha$$
$$=u^2+v^2+2uv \cos \alpha.$$

$$\therefore \quad w=\sqrt{u^2+v^2+2uv \cos \alpha}.$$

আবার, $\tan\theta = \frac{CE}{AE} = \frac{v \sin\alpha}{u+v\cos\alpha}$ [উভয় ক্ষেত্রেই]

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha}$

দ্রষ্টব্য : 1. বেগ দুইটির পরিমাপ u ও v প্রদত্ত হইলে, যেহেতু $w = \sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\alpha}$, $\therefore$ লব্ধি সমবেগ w-এর মান বৃহত্তম অথবা ক্ষুদ্রতম হইবে যখন $\cos\alpha$-র মান যথাক্রমে বৃহত্তম অথবা ক্ষুদ্রতম হইবে। এক্ষণে $\cos\alpha$-র বৃহত্তম মান 1 যখন $\alpha = 0°$ এবং $\cos\alpha$-র ক্ষুদ্রতম মান -1 যখন $\alpha = 180°$.

অতএব এই দুই ক্ষেত্রে w-এর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান যথাক্রমে

$\sqrt{u^2+v^2+2uv.1} = \sqrt{(u+v)^2} = u+v$

এবং $\sqrt{u^2+v^2-2uv.1} = \sqrt{(u-v)^2} = u-v.$

সুতরাং (i) একই সরলরেখায় কোন কণার দুইটি যুগপৎ সমবেগ থাকিলে এই সমবেগ দুইটির লব্ধিবেগ ঐ যুগপৎ বেগ দুইটির বৈজিক যোগফল। এবং (ii) একই সরলরেখায় কোন কণার দুইটি যুগপৎ বেগ থাকিলে, ঐ বেগ দুইটির ফলে কণাটি স্থির থাকিবে যদি সমবেগ দুইটির বিপরীত অভিমুখিতা হয়।

2. $\alpha = 90°$ হইলে $w = \sqrt{u^2+v^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{v}{u}$.

3. $u = v$ হইলে, $w = \sqrt{u^2+u^2+2u^2\cos\alpha}$.

বা, $\quad w = \sqrt{2u^2(1+\cos\alpha)} = \sqrt{2u^2 . 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

$= 2u\cos\frac{\alpha}{2}$.

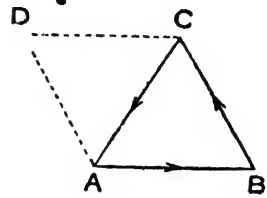
§ 2·6(a). কোন কণার দুইটি যুগপৎ সমত্বরণের লব্ধির পরিমাপ ও দিক :—সমবেগের ন্যায় সমত্বরণের ক্ষেত্রেও যদি কোন কণার দুইটি যুগপৎ সমত্বরণ f_1 ও f_2-র লব্ধি সমত্বরণ f হয়, তবে $f^2 = f_1^2 + f_2^2 + 2f_1f_2\cos\alpha$ [যেখানে f_1 ও f_2-র অভিমুখিতার অন্তর্গত কোণ α] এবং লব্ধি ত্বরণের অভিমুখিতা, f_1 ত্বরণের অভিমুখিতার সহিত θ কোণে নত হইলে,

$$\tan\theta = \frac{f_2\sin\alpha}{f_1+f_2\cos\alpha}.$$

§ 2·7. বেগের ত্রিভুজ সূত্র (Triangle Law of velocities) :

যদি একটি কণার যুগপৎ তিনটি সমবেগকে একটি ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তবে কণাটি স্থির থাকিবে।

মনে কর একটি কণার তিনটি যুগপৎ সমবেগ ABC ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহু $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ দ্বারা প্রকাশিত হয়। ABCD সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ কর। এক্ষণে, $\overline{BC}$ দ্বারা প্রকাশিত বেগকে $\overline{AD}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। (কারণ, $\overline{BC}$ ও $\overline{AD}$ সমান ও সমান্তরাল)। সুতরাং বেগের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ দ্বারা প্রকাশিত সমবেগ দুইটির লব্ধি সমবেগ $\overline{AC}$ দ্বারা প্রকাশিত হইবে। এক্ষণে নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AC}$ ও $\overline{CA}$ সমান ও বিপরীত হওয়ায় উহাদের দ্বারা প্রকাশিত বেগ পরস্পরকে অপসারিত করিবে এবং লব্ধিবেগ শূন্য হইবে। সুতরাং যুগপৎ সমবেগ দুইটির ফলে কণাটি স্থির অবস্থায় থাকিবে; অর্থাৎ প্রদত্ত যুগপৎ বেগ তিনটির ফলে কণাটি স্থির থাকিবে। ভেক্টর চিহ্নে, $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$.

চিত্র 8

উপরের প্রতিজ্ঞাটি নিম্নলিখিত ভাবেও বলা যায় :—

যদি একটি ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত দুইটি বাহু দ্বারা কোন কণার দুইটি যুগপৎ সমবেগের মান, দিক ও অভিমুখিতা প্রকাশ করা যায়, তবে ঐ যুগপৎ সমবেগ দুইটির লব্ধিবেগের মান ও দিক ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু দ্বারা প্রকাশিত হইবে এবং উহার বিপরীত অভিমুখিতা হইবে।

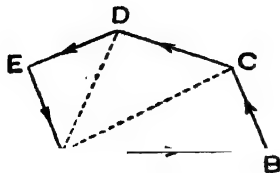
বেগের ত্রিভুজ সূত্রের ন্যায় ত্বরণেরও নিম্নলিখিত ত্রিভুজ সূত্রটি পাওয়া যায়।

§ 2·7(*a*). **ত্বরণের ত্রিভুজ সূত্র** (Triangle law of acceleration):

যদি একটি ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা একটি কণার তিনটি যুগপৎ সমত্বরণের মান, দিক ও অভিমুখিতা প্রকাশ করা যায়, তবে কণাটি হয় স্থির থাকিবে নতুবা সরলরেখায় সমবেগে চলিবে।

§ 2·8. **বেগের বহুভুজ সূত্র** (Polygon law of velocities) :

যদি কোন বস্তুর যুগপৎ কয়েকটি সমবেগ থাকে এবং এই সমবেগসমূহকে যদি কোন সম্পূর্ণ বহুভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহুগুলির দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তবে কণাটি স্থির থাকিবে।

চিত্র 9

মনে কর একটি কণার যুগপৎ কয়েকটি সমবেগ ABCDE বহুভুজের $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ ও $\overline{EA}$ বাহুসমূহ দ্বারা প্রকাশিত হয়।

এক্ষণে, $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

এবং $\overline{AC}+\overline{CD}=\overline{AD}$.

∴ $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AC}+\overline{CD}=\overline{AD}$. আবার, $\overline{AD}+\overline{DE}=\overline{AE}$.

∴ $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{AE}$.

সুতরাং যুগপৎ সমবেগ চারিটি $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$-র লব্ধিবেগ $\overline{AE}$.

এক্ষণে, $\overline{AE}$ ও বস্তুটির পঞ্চম সমবেগ $\overline{EA}$-র পরিমাপ ও দিক অভিন্ন কিন্তু অভিমুখিতা বিপরীত। সুতরাং বস্তুটি স্থির থাকিবে।

দ্রষ্টব্য : 1. উপপাদ্যটি যে কোন বহুভুজের পক্ষেই সত্য।

2. উপরের বহুভুজ-সূত্রটি কোন বস্তুর যুগপৎ একাধিক সম-ত্বরণের জন্যও সত্য এবং সমত্বরণের ক্ষেত্রেও সমবেগ সম্বন্ধীয় নিম্নের অনুসিদ্ধান্তটি সত্য। যদি কোন বস্তুর কয়েকটি যুগপৎ সমবেগ থাকে এবং এই সমবেগগুলিকে ক্রমান্বয়ে গৃহীত কয়েকটি নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তবে ঐ রেখাংশগুলি দ্বারা গঠিত বহুভুজ যে রেখাংশ দ্বারা সম্পূর্ণ হয়, তাহাকে বিপরীত অভিমুখিতায় লইলে যে নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ পাওয়া যায়, তাহা ঐ সমবেগগুলির লব্ধি সমবেগকে প্রকাশ করিবে।

§ 29. একটি বেগকে দুইটি বেগে বিশ্লেষণ (Resolution of a given velocity into two components) :—কোন বেগের মান, দিক ও অভিমুখিতা জানা থাকিলে অসংখ্য প্রকারে বেগটির দুইটি উপাংশ নির্ণয় করা যায়। কারণ, যে নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AC}$ এই লব্ধিবেগকে প্রকাশ করিবে তাহাকে কর্ণ করিয়া অসংখ্য সামান্তরিক ABCD অঙ্কন করা যায়। এক্ষণে, প্রত্যেক সামান্তরিকের A বিন্দুগামী সন্নিহিত বাহুদ্বয় $\overline{AD}$ ও $\overline{AB}$ নির্ণেয় উপাংশ দুইটিকে প্রকাশ করিবে।

কিন্তু দুইটি নির্দিষ্ট দিক ও অভিমুখিতায় দুইটি এবং দুইটি মাত্র উপাংশ নির্ণয় করা যাইবে। কারণ, প্রদত্ত দিক ও অভিমুখিতায় দুইটি সন্নিহিত বাহু থাকিবে এবং $\overline{AC}$ কর্ণ হইবে এইরূপ একটি এবং একটি মাত্র সামান্তরিক অঙ্কন করা যায়।

মনে কর V প্রদত্ত সমবেগের পরিমাণ এবং প্রদত্ত দুইটি দিক ও অভিমুখিতা হইল $\overrightarrow{AX}$ ও $\overrightarrow{AY}$ এবং $m\angle CAX=\alpha$ ও $m\angle CAY=\beta$. $\overline{AC}$ কর্ণ হইবে এবং $\overrightarrow{AX}$ ও $\overrightarrow{AY}$ রেখাদ্বয়ে দুইটি-সন্নিহিত বাহু থাকিবে এইরূপ সামান্তরিক ABCD সম্পূর্ণ কর। সুতরাং প্রদত্ত সমবেগের উপাংশ দুইটির মান, দিক ও অভিমুখিতা নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ দ্বারা প্রকাশিত হইবে।

এক্ষণে, $\triangle ABC$ হইতে,

$$\frac{AB}{\sin ACB}=\frac{BC}{\sin CAB}=\frac{AC}{\sin ABC}$$

কিন্তু $m\angle ABC = 180° - m\angle DAB = 180° - (\alpha+\beta)$

$\therefore \quad \sin ABC = \sin(\alpha+\beta)$ এবং $m\angle ACB = m\angle DAC = \beta$.

$$\therefore \quad \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{V}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore \quad AB = \frac{V\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad BC = \frac{V\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

সুতরাং $\vec{AX}$ ও $\vec{AY}$ রেখায় নির্ণেয় উপাংশ দুইটি হইল, $\frac{V\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ এবং $\frac{V\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

চিত্র 10

এক্ষণে, $\alpha+\beta=90°$ হইলে প্রদত্ত দিক ও অভিমুখিতা দুইটি পরস্পর সমকোণে নত হয় এবং তখন,

$$AB = \frac{V\sin\beta}{\sin 90°} = V\sin(90°-\alpha) = V\cos\alpha.$$

$$\text{এবং} \quad AD = \frac{V\sin\alpha}{\sin 90°} = V\sin\alpha$$

এই ক্ষেত্রে উপাংশ দুইটিকে প্রদত্ত দিক ও অভিমুখিতায় প্রদত্ত সমবেগের প্রদত্ত দিক ও অভিমুখিতায় দুইটি **বিশ্লেষিতাংশ** বলা হয়।

সুতরাং কোন দিক ও অভিমুখিতা $\vec{OX}$ কোন প্রদত্ত বেগ V-র দিক ও অভিমুখিতার সহিত θ-কোণে নত হইলে, $\vec{OX}$-এর দিকে V-র বিশ্লেষিতাংশ $V\cos\theta$ এবং $\vec{OX}$ এর সহিত লম্ব $\vec{OY}$ অভিমুখিতায় V-র বিশ্লেষিতাংশ $V\sin\theta$.

চিত্র 11

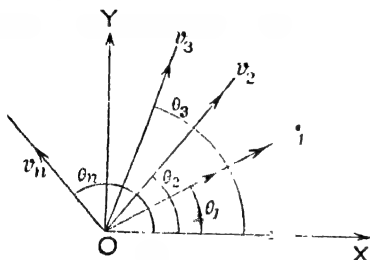
অনুসিদ্ধান্ত : নিম্নের প্রতিজ্ঞাটি সহজেই জ্যামিতিক পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যায়। এই পুস্তকের স্থিতিবিদ্যা অংশে এই প্রতিজ্ঞাটি একই পদ্ধতিতে বলের বিশ্লেষিতাংশের জন্য প্রমাণ করা হইয়াছে।

প্রতিজ্ঞা : কোন কণার যুগপৎ একাধিক সমবেগ থাকিলে, এই সমবেগ-গুলির কোন নির্দিষ্ট দিক ও অভিমুখিতায় বিশ্লেষিতাংশগুলির বৈজিক যোগফল

ঐ যুগপৎ সমবেগগুলির লব্ধি সমবেগের ঐ দিক ও অভিমুখিতায় বিশ্লেষিতাংশের সমান হয়।

[দ্রষ্টব্য : উপরের আলোচনা ও অনুসিদ্ধান্ত সম-ত্বরণের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।]

§ 2.10. কোন কণার একই সমতলে তুইয়ের অধিক যুগপৎ বেগ থাকিলে, উহাদের লব্ধি বেগ নির্ণয় :

মনে কর কোন গতিশীল কণার একই সমতলে বিভিন্ন দিক ও অভিমুখিতায় যুগপৎ n সংখ্যক সমবেগ $v_1, v_2, \cdots, v_n$ আছে। মনে কর কোন প্রদত্ত দিক ও অভিমুখিতা $\overrightarrow{OX}$-এর সহিত যুগপৎ সমবেগগুলি যথাক্রমে $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ কোণে নত। সুতরাং $\overrightarrow{OX}$-এর দিকে প্রদত্ত যুগপৎ বেগগুলির বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে $v_1 \cos \theta_1, v_2 \cos \theta_2, \cdots, v_n \cos \theta_n$.

চিত্র 12

আবার $\overrightarrow{OX}$-এর লম্ব সরলরেখা $\overrightarrow{OY}$এর দিকে যুগপৎ বেগগুলির বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে $v_1 \sin \theta_1, v_2 \sin \theta_2, \cdots, v_n \sin \theta_n$.

এক্ষণে, যুগপৎ সমবেগসমূহের লব্ধিবেগ V হইলে $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$-এর দিক ও অভিমুখিতায় উহার বিশ্লেষিতাংশ $V \cos \theta$ ও $V \sin \theta$ [θ, লব্ধিবেগ V-এর $\overrightarrow{OX}$-এর দিকে নতি]

সুতরাং পূর্ব অনুচ্ছেদের অনুসিদ্ধান্ত অনুযায়ী $V \cos \theta = \overrightarrow{OX}$ এর দিক ও অভিমুখিতায় যুগপৎ বেগগুলির বিশ্লেষিতাংশগুলির বৈজিক যোগফল $= v_1 \cos \theta_1 + v_2 \cos \theta_2 + \cdots + v_n \cos \theta_n$ এবং $V \sin \theta = \overrightarrow{OY}$-এর দিক ও অভিমুখিতায় যুগপৎ বেগগুলির বিশ্লেষিতাংশসমূহের বৈজিক যোগফল $= v_1 \sin \theta_1 + v_2 \sin \theta_2 + \cdots, + v_n \sin \theta_n$.

$$\therefore \quad V^2 = (v_1 \cos \theta_1 + v_2 \cos \theta_2 + \cdots + v_n \cos \theta_n)^2 + (v_1 \sin \theta_1 + v_2 \sin \theta_2 + \cdots + v_n \sin \theta_n)^2$$

$$= \Sigma v_1^2 + 2\Sigma v_1 v_2 \cos (\theta_1 \sim \theta_2)$$

$$\therefore \quad V = \sqrt{\Sigma v_1^2 + \Sigma v_1 v_2 \cos (\theta_1 \sim \theta_2)}$$

[Σv_1^2 এর অর্থ $v_1^2 + v_2^2 + \cdots \cdots v_n^2$]

এখানে বর্গমূলের ধনাত্মক চিহ্নটি লইতে হইবে।

আবার $\tan\theta = \frac{V\sin\theta}{V\cos\theta} = \frac{\Sigma v_1 \sin\theta_1}{\Sigma v_1 \cos\theta_1}$

বা, $\theta = \tan^{-1}\frac{\Sigma v_1 \sin\theta_1}{\Sigma v_1 \cos\theta_1}$.

§ **2·11.** কোন কণার দুইটি যুগপৎ সমবেগ u এবং v-এর অভিমুখিতা $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ এবং পরিমাপ m.OA ও n.OB. AB রেখাংশ C বিন্দুতে $n : m$ অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে। OC যোগ কর। প্রমাণ করিতে হইবে যে, u ও v সমবেগদ্বয়ের লব্ধিবেগের অভিমুখিতা ও পরিমাপ যথাক্রমে $\overrightarrow{OC}$ ও $(m+n)$.OC.

[নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AB}$ দ্বারা প্রকাশিত বেগের অভিমুখিতায় ক্রিয়মাণ উহার m গুণ বেগকে $m.\overline{AB}$ রূপে নির্দেশ করা হয়।]

O-বিন্দুর ভিতর দিয়া $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার সমান্তরাল $\overleftrightarrow{XY}$ সরলরেখা অঙ্কন কর এবং $\overrightarrow{AX}$ ও $\overrightarrow{BY}$, $\overrightarrow{OC}$-র সমান্তরাল অঙ্কন কর।

সুতরাং XOCA ও YOCB দুইটি সামান্তরিক।

এক্ষণে বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{OA}$ দ্বারা প্রকাশিত বেগকে $\overline{OC}$ ও $\overline{OX}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশদ্বয় দ্বারা প্রকাশিত দুইটি উপাংশে বিশ্লেষিত করা যায়। সুতরাং $m.\overline{OA}$ বেগকে $m.\overline{OC}$ ও $m.\overline{OX}$ দুইটি উপাংশে বিশ্লেষিত করা যায়। অনুরূপে $n.\overline{OB}$ বেগকে $n.\overline{OC}$ ও $n.\overline{OY}$ দুইটি উপাংশে বিশ্লেষিত করা যায়। সুতরাং u ও v বেগ দুইটির লব্ধি ও $m.\overline{OC}$, $m.\overline{OX}$, $n\,\overline{OC}$ ও $n.\overline{OY}$ বেগ চারিটির লব্ধি একই বেগ।

$$\text{এক্ষণে}\quad \frac{AC}{BC} = \frac{n}{m}, \quad \text{বা,}\quad m.AC = n.BC.$$

বা, $m.OX = n.OY$. সুতরাং $m.\overline{OX}$ ও $n.\overline{OY}$ বেগ দুইটি পরস্পরকে অপসারিত করিবে (কারণ উহারা একই রেখায় ক্রিয়মাণ এবং উহাদের পরস্পর বিপরীত অভিমুখিতা)। সুতরাং u ও v সমবেগ দুইটির লব্ধিবেগের পরিমাপ $(m+n)$.OC এবং অভিমুখিতা $\overrightarrow{OC}$.

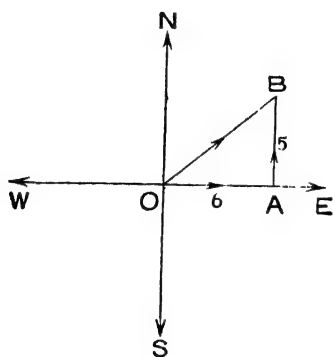
উদাহরণ 1. একটি গাড়ী দশ কিলোমিটার পথ অতিক্রমকালে প্রথম অর্ধেক পথ ঘণ্টায় 60 কি. মি. বেগে এবং দ্বিতীয়ার্ধ ঘণ্টায় 40 কি. মি. বেগে অতিক্রম করে। গাড়ীটির গড়দ্রুতি নির্ণয় কর।

প্রথম পাঁচ কিলোমিটার পথ অতিক্রম করিতে সময় লাগে $\frac{5}{60}$ ঘণ্টা $= \frac{5}{60} \times 60$ মি. $= 5$ মিনিট। শেষ পাঁচ কিলোমিটার পথ অতিক্রম করিতে

গাড়ীটির সময় লাগে $\frac{5}{40}\times 60$ মি.$=7{\cdot}5$ মিনিট। সুতরাং পথটি অতিক্রম করিতে গাড়ীটির মোট সময় লাগে $(5+7{\cdot}5)=12{\cdot}5$ মিনিট$=\frac{125}{600}$ ঘণ্টা।

সুতরাং নির্ণেয় গড়দ্রুতি$=10$ কি. মি.$\div\frac{125}{600}=48$ কিলোমিটার ঘণ্টায়।

উদা. 2. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 8 কিলোমিটার বেগে পূর্বদিকে 6 কিলোমিটার এবং অতঃপর ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার বেগে উত্তর দিকে 5 কিলোমিটার পথ যাইলেন। সম্পূর্ণ পথ অতিক্রমকালে ঐ ব্যক্তির গড়দ্রুতি (average speed) ও গড়বেগ (average velocity) নির্ণয় কর।

মনে কর ঐ ব্যক্তি O বিন্দু হইতে যাত্রা আরম্ভ করিলেন। সুতরাং তাঁহার অতিক্রান্ত পথ OA+AB.

চিত্র 13

OA (=6 কি. মি.) দূরত্ব অতিক্রম করিতে সময় লাগে $\frac{6}{8}$ ঘণ্টা$=\frac{3}{4}$ ঘণ্টা। AB (=5 কি. মি.) পথ অতিক্রম করিতে সময় লাগে $\frac{5}{10}$ ঘণ্টা$=\frac{1}{2}$ ঘণ্টা।

ঐ ব্যক্তি মোট (6+5) বা 11 কি.মি. পথ অতিক্রম করিলেন। সুতরাং তাঁহার গড়দ্রুতি$=\dfrac{11 \text{ কি.মি.}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=8{\cdot}8$ কি.মি./ঘণ্টায়

এক্ষণে $OB=\sqrt{OA^2+AB^2}$
$=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}.$

সুতরাং এই 11 কি.মি. ভ্রমণের ফলে ঐ ব্যক্তির সরণ হইল $\sqrt{61}$ কি.মি. ; এবং $\tan\angle BOA=\frac{BA}{OA}=\frac{5}{6}$। সুতরাং ঐ ব্যক্তির গড়বেগ হইল পূর্ব হইতে উত্তরদিকে $\tan^{-1}\frac{5}{6}$ কোণে নত দিক ও অভিমুখিতায় ঘণ্টায়

$$\frac{\sqrt{61}}{\frac{5}{4}} \quad \text{বা,} \quad \frac{4\sqrt{61}}{5} \text{ কিলোমিটার।}$$

উদা. 3. সেকেণ্ডে 5 সে.মি. ও সেকেণ্ডে 4 সে.মি. দুইটি যুগপৎ সমবেগের অভিমুখিতা পরস্পর 60° কোণে নত হইলে, বেগ দুইটির লব্ধি বেগ নির্ণয় কর।

লব্ধি সমবেগের পরিমাপ v হইলে, $v=\sqrt{4^2+5^2+2.4.5.\cos 60^\circ}$
$=\sqrt{16+25+2.4.5.\frac{1}{2}}=\sqrt{61}$ সে. মি./সেকেণ্ড।

লব্ধি বেগের দিক সেকেণ্ডে 5 সে. মি. বেগের অভিমুখিতার সহিত θ কোণে নত হইলে,

$$\tan\theta=\frac{4\sin 60^\circ}{5+4\cos 60^\circ}=\frac{4\frac{\sqrt{3}}{2}}{5+4.\frac{1}{2}}=\frac{2}{7}\sqrt{3}.$$

উদা. 4. একটি নদীতে স্রোতের অনুকূলে 200 মিটার পথ অতিক্রম করিতে এক ব্যক্তির 4 মিনিট এবং স্রোতের প্রতিকূলে একই দূরত্ব অতিক্রম করিতে ঐ ব্যক্তির সময় লাগে 6 মিনিট। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

মনে কর ঐ ব্যক্তির বেগ প্রতি মিনিটে u এবং স্রোতের বেগ প্রতি মিনিটে v।

সুতরাং স্রোতের অনুকূলে লব্ধিবেগ $u+v$ এবং স্রোতের প্রতিকূলে লব্ধি বেগ $u-v$.

অতএব প্রশ্নানুসারে, $(u+v).4=200$ মিটার$\cdots(1)$

এবং $(u-v).6=200$ মিটার$\cdots(2)$

(1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $v=\frac{25}{3}$.

সুতরাং নির্ণেয় স্রোতের বেগ $\frac{25}{3}$ মিটার প্রতি মিনিটে।

উদা. 5. পরস্পর সমকোণে নত $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ সরলরেখায় নিম্নের বেগগুলিকে বিশ্লেষিত কর। প্রত্যেক বেগের অভিমুখিতার $\overrightarrow{OX}$-এর সহিত নতি পাশে দেওয়া হইল।

(i) 10 সে. মি./সেকেণ্ড, 30° ; (ii) 20 কি. মি./ঘণ্টা, 45° ;
(iii) 50 মি./মিনিট, 60°.

(i) $\overrightarrow{OX}$ রেখায় বিশ্লেষিতাংশ $=10\cos 30^\circ=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=5\sqrt{3}$ সে. মি./সেকেণ্ড।

$\overrightarrow{OY}$ রেখায় বিশ্লেষিতাংশ $=10\sin 30^\circ=10\times\frac{1}{2}=5$ সে. মি./সেকেণ্ড

(ii) $\overrightarrow{OX}$ রেখায় বিশ্লেষিতাংশ $=20\cos 45^\circ=20.\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=10\sqrt{2}$ কি. মি./ঘণ্টায়

$=\frac{10\sqrt{2}\times1000\times100}{60\times60}$ সে.মি./সেকেণ্ড $=\frac{2500\sqrt{2}}{9}$ সে.মি./সেকেণ্ড।

$\overrightarrow{OY}$ রেখায় বিশ্লেষিতাংশ$=20 \sin 45° = 10\sqrt{2}$ কি. মি./ঘণ্টায়

$=\frac{2500\sqrt{2}}{9}$ সে. মি./সেকেণ্ড।

(iii) $\overrightarrow{OX}$ রেখায় বিশ্লেষিতাংশ $50 \cos 60° = 50.\frac{1}{2} = 25$ মিটার/মিনিট

$=\frac{25\times 100}{60}$ সে. মি./সেকেণ্ড$=\frac{125}{3}$ সে. মি./সেকেণ্ড;

$\overrightarrow{OY}$ রেখায় বিশ্লেষিতাংশ$=50 \sin 60° = 50\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ মি.

$=25\sqrt{3}$ মিটার/মিনিট$=\frac{25\sqrt{3}\times 100}{60}=\frac{125\sqrt{3}}{3}$ সে. মি./সেকেণ্ড।

উদা. 6. বিভিন্ন অভিমুখিতায় যুগপৎ সেকেণ্ডে 7, 8 এবং 13 ফুট বেগ থাকার ফলে একটি কণা স্থির অবস্থায় আছে। বেগসমূহের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলির পরিমাপ নির্ণয় কর।

যেহেতু প্রদত্ত যুগপৎ বেগগুলির জন্য কণাটি স্থির অবস্থায় আছে, সুতরাং বেগের ত্রিভুজ-সূত্র অনুসারে যুগপৎ বেগ তিনটিকে একটি ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহুদ্বারা প্রকাশ করা যাইবে।

সুতরাং 8 এবং 7 পরিমাপের বেগ দুইটির অন্তর্ভূক্ত কোণ θ হইলে,

$$\cos\theta=\frac{13^2-8^2-7^2}{2\times 8\times 7}=\frac{169-64-49}{112}=\frac{1}{2}, \quad \therefore \quad \theta=60°.$$

7 এবং 13 পরিমাপের বেগ দুইটির অন্তর্ভূক্ত কোণ θ_1 হইলে

$$\cos\theta_1=\frac{8^2-7^2-13^2}{2\times 7\times 13}=\frac{64-49-169}{182}=-\frac{77}{91}$$

$$\therefore \quad \theta_1=\cos^{-1}\left(-\frac{77}{91}\right).$$

এবং 13 ও 8 পরিমাপের বেগ দুইটির অন্তর্ভূক্ত কোণ θ_2 হইলে,

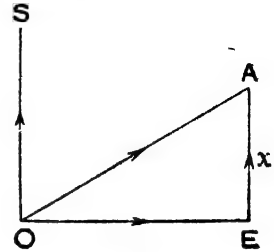
$$\cos\theta_2=\frac{7^2-8^2-13^2}{2\times 8\times 13}=-\frac{23}{26}; \quad \therefore \quad \theta_2=\cos^{-1}\left(-\frac{23}{26}\right).$$

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে $\theta, \theta_1, \theta_2$ ত্রিভুজটির কোণগুলির সম্পূরক কোণ। ত্রিভুজটির কোণগুলি A, B, C হইলে $\cos\theta=\cos(\pi-A)=-\cos A$ ইত্যাদি।]

উদা. 7. একটি যুদ্ধ জাহাজ ঘণ্টায় 15 কিলোমিটার বেগে যাইবার কালে 4 কি. মি. দূরে অবস্থিত একটি দুর্গ অভিমুখে নদীর প্রস্থ বরাবর সরাসরি দুর্গ

অভিমুখে গোলা নিক্ষেপ করিল। গোলার অনুভূমিক বেগ সেকেণ্ডে 400 মিটার হইলে দুর্গ হইতে গোলার কি পরিমাণ বিচ্যুতি হইবে ?

মনে কর $\overrightarrow{OS}$ যুদ্ধ জাহাজটির গতিপথ এবং E দুর্গের অবস্থান।

দুর্গ হইতে গোলার বিচ্যুতি হইবার কারণ, অনুভূমিক দিকে সেকেণ্ড 400 মিটার বেগ ব্যতীত গোলার জাহাজের গতির দিকে আর একটি বেগ থাকিবে। মনে কর গোলাটি A বিন্দুতে ভূমি স্পর্শ করিল এবং AE$=x$.

চিত্র 14

এক্ষণে, ঘণ্টায় 15 কি. মি বেগ$=$সেকেণ্ড $\frac{25}{6}$ মিটার বেগ।

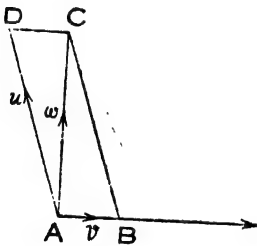
সুতরাং $\frac{x}{OE}=\tan AOE=\frac{\text{যুদ্ধ জাহাজের বেগ}}{\text{গোলার বেগ}}$

বা, $\frac{x}{4}=\frac{\frac{25}{6}}{400}=\frac{1}{96}$

$\therefore \quad x=\frac{4}{96}$ কি. মি.$=\frac{125}{3}$ মিটার।

সুতরাং গোলাটির $\frac{125}{3}$ মিটার বিচ্যুতি হইবে।

উদা. 8. একব্যক্তি একটি নদীর প্রস্থ বরাবর একটি নির্দিষ্ট দূরত্ব t_1 সময়ে এবং স্রোতের অনুকূলে একই দূরত্ব t_2 সময়ে সাঁতার দিয়া যাইতে পারে। যদি স্থির জলে ঐ ব্যক্তির বেগ u এবং স্রোতের বেগ v হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$t_1 : t_2 = \sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}.$$

প্রথমক্ষেত্রে লব্ধি বেগ স্রোতের বেগের লম্বাভিমুখে।

চিত্র 15

মনে কর $\overline{AD}$ ও $\overline{AB}$ যথাক্রমে ঐ ব্যক্তির এবং স্রোতের বেগ u ও vকে প্রকাশ করে। ABCD সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ কর। সুতরাং $\overline{AC}$ লব্ধিবেগকে প্রকাশ করে এবং প্রশ্নানুসারে, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$-র উপর লম্ব।

$$\text{সুতরাং } AC^2=BC^2-AB^2=u^2-v^2$$

$$\therefore \quad AC=\sqrt{u^2-v^2}.$$

সুতরাং যখন ঐ ব্যক্তি নদীর প্রস্থ বরাবর সাঁতার দেয়, তখন লব্ধিবেগ $\sqrt{u^2}$

সুতরাং নির্দিষ্ট দূরত্ব d হইলে, $t_1=\dfrac{d}{\sqrt{u^2-v^2}}\cdots(1)$

যখন ঐ ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে সাঁতার দেয়, তখন লব্ধিবেগ $u+v$.

$\therefore \quad t_2=\dfrac{d}{u+v}\cdots(2)$

(1) এবং (2) হইতে পাই, $\dfrac{t_1}{t_2}=\dfrac{d}{\sqrt{u^2-v^2}}\div\dfrac{d}{u+v}=\dfrac{u+v}{\sqrt{u^2-v^2}}$

$$=\frac{\sqrt{u+v}}{\sqrt{u-v}}.$$

$\therefore \quad t_1 : t_2=\sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}.$

উদা. 9. একটি বস্তুর দুইটি যুগপৎ বেগ হইল দক্ষিণাভিমুখে ঘণ্টায় 7 কিলোমিটার এবং উত্তর-পূর্ব অভিমুখে ঘণ্টায় $3\sqrt{2}$ কিলোমিটার। একটি তৃতীয় বেগ দ্বারা ঐ বস্তুটিকে স্থিরাবস্থায় আনা হইল। এই তৃতীয় বেগটি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত বেগ দুইটির অন্তর্ভূ‌‌ক্ত কোণ $90°+45°=135°$.

মনে কর এই বেগ দুইটির লব্ধিবেগ v, দক্ষিণ দিকের সহিত θ কোণে নত।

সুতরাং $v^2=7^2+(3\sqrt{2})^2+2.7\times3\sqrt{2}\times\cos 135°$

$$=49+18+42\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=49+18-42=25$$

$v=5$ কি.মি./ঘণ্টা এবং

$$\tan\theta=\frac{3\sqrt{2}\sin 135°}{7+3\sqrt{2}\cos 135°}=\frac{3\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}}{7+3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{3}{7-3}=\frac{3}{4}$$

$\therefore \quad \theta=\tan^{-1}\frac{3}{4}.$

এক্ষণে, নির্ণেয় তৃতীয় বেগটি v-এর সমান কিন্তু বিপরীত হইবে অর্থাৎ ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার এবং উহা পশ্চিম দিকের সহিত উত্তরাভিমুখে $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ কোণে নত হইবে।

উদা. 10. দুইটি নির্দিষ্ট দিকে একটি বস্তুর দুইটি যুগপৎ সমপরিমাণ বেগ আছে। যদি এই বেগ দুইটির একটির পরিমাপ অর্ধেক হয়, তবে লব্ধি বেগ অপর বেগের সহিত যে পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করে, তাহাও অর্ধেক হইয়া যায়। বেগ দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর।

মনে কর সমান বেগ দুইটি $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$-র অভিমুখে u, u এবং উহাদের

অন্তর্ভুক্ত কোণ 2θ. সুতরাং প্রদত্ত বেগ দুইটির লব্ধি বেগ $\vec{OA}$ ও $\vec{OB}$-র প্রত্যেকের সহিত θ কোণে নত। সুতরাং $\vec{OB}$ অভিমুখে বেগটির পরিমাণ $\frac{u}{2}$ হইলে প্রশ্নানুসারে লব্ধিবেগ $\vec{OA}$-র সহিত $\frac{\theta}{2}$ কোণে নত হইবে।

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{u}{2}\sin 2\theta}{u+\frac{u}{2}\cos 2\theta}=\frac{\sin 2\theta}{2+\cos 2\theta}=\frac{\sin 2\theta}{2+2\cos^2\theta-1}.$$

$$=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+2\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\sec^2\theta+2}$$

[লব ও হরকে $\cos^2\theta$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$=\frac{2\tan\theta}{3+\tan^2\theta}\cdots(1)$$

মনে কর, $\tan\frac{\theta}{2}=x$. $\therefore\quad \tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2x}{1-x^2}$

$\therefore\quad$ (1) হইতে $x=\dfrac{2.\frac{2x}{1-x^2}}{3+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}=\dfrac{4x(1-x^2)}{3(1-x^2)^2+4x^2}$

বা, $1=\dfrac{4(1-x^2)}{3(1-x^2)^2+4x^2}$ [উভয় পক্ষকে x দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $\dfrac{4(1-x^2)}{3(1-x^2)^2+4x^2}-1=0$

বা, $4(1-x^2)-3(1-x^2)^2-4x^2=0,$

বা, $3x^4+2x^2-1=0,$ বা, $(3x^2-1)(x^2+1)=0.$

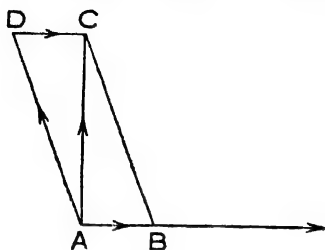
$\therefore\quad x^2=\frac{1}{3},$ বা, $-1.$ কিন্তু x^2 পূর্ণবর্গ হওয়ায় উহার ঋণাত্মক মান থাকিতে পারে না।

$\therefore\quad x^2=\frac{1}{3},\quad\therefore\quad x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\frac{\theta}{2}$ সূক্ষ্মকোণ ধরিয়া)

$\therefore\quad \tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30°,\quad\therefore\quad \frac{\theta}{2}=30°,$

$\therefore\quad 2\theta=120°$

সুতরাং প্রদত্ত অভিমুখিতা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ 120°.

উদা. 11. একব্যক্তি স্থির জলে ঘণ্টায় 4 কি.মি. বেগে সাঁতার কাটিতে পারে। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 2 কি.মি. হইলে নদীটিকে সরাসরি সাঁতরাইয়া অপর তীরে পৌঁছাইতে ঐ ব্যক্তিকে কি অভিমুখিতায় সাঁতার দিতে হইবে ?

চিত্র 16

মনে কর, $\overline{AB}$ অথবা $\overline{DC}$ স্রোতের বেগ এবং $\overline{AD}$ ঐ ব্যক্তির বেগ প্রকাশ করে। মনে কর $m\angle DAB=\alpha$.

ABCD সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ কর।

সুতরাং $\overline{AC}$ লব্ধিবেগকে প্রকাশ করিবে। প্রশ্নানুসারে $m\angle CAB=90°$.

এক্ষণে $\cos CBA=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{AD}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
$=\cos 60°$

$\therefore \quad m\angle CBA=60°$.

এক্ষণে $m\angle DAB+m\angle CBA=180°$

বা, $m\angle DAB=180°-m\angle CBA=180°-60°=120°$.

সুতরাং ঐ ব্যক্তিকে স্রোতের দিকের সহিত 120° কোণে নত দিকে সাঁতার শুরু করিতে হইবে।

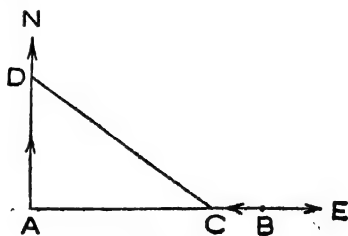
উদা. 12. একটি যুদ্ধ জাহাজ ঘণ্টায় 30 কি. মি. বেগে উত্তরদিকে যাইবার কালে তাহার সোজা পূর্বদিকে 20 কি.মি. দূরে আর একটি জাহাজ দেখিতে পাইল ; এই দ্বিতীয় জাহাজটি পশ্চিমদিকে ঘণ্টায় 40 কি. মি. বেগে যাইতেছিল। কত সময় পরে তাহারা পরস্পরের নিকটতম হয় এবং তখন তাহাদের মধ্যে দূরত্ব কত ?

মনে কর A ও B যথাক্রমে যুদ্ধ জাহাজটির ও দ্বিতীয় জাহাজটির প্রাথমিক অবস্থান।

মনে কর t ঘণ্টা পরে যুদ্ধ জাহাজটি উত্তরদিকে AD দূরত্ব যায় এবং ঐ সময়ে দ্বিতীয় জাহাজটি পশ্চিমদিকে BC দূরত্ব অতিক্রম করে।

চিত্র 17

সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $AD=30t$, $BC=40t$

$\therefore \quad AC=AB-BC=20-40t.$

এক্ষণে এই সময়ে জাহাজ দুইটির দূরত্ব CD এবং $CD^2 = AD^2 + AC^2$
$= (30t)^2 + (20-40t)^2 = 900t^2 + 400 + 1600t^2 - 1600t.$
$= 2500t^2 - 1600t + 400 = (50t-16)^2 + (400-16^2)$
$= (50t-16)^2 + 144.$

এক্ষণে, CD^2 একটি পূর্ণবর্গ রাশি এবং একটি ধনাত্মক রাশির যোগফল হওয়ায় কখনও শূন্য হইতে পারে না। CD-র মান ক্ষুদ্রতম হইবে যখন $(50t-16)^2 = 0$ বা $t = \frac{16}{50}$ ঘণ্টা $= 19\frac{1}{5}$ মিনিট এবং তখন $CD^2 = 144 = 12^2$.

$\therefore$ নিকটতম দূরত্ব $= 12$ কিলোমিটার।

উদা. 13. স্রোত না থাকিলে s মিটার প্রশস্ত একটি নদী সরাসরি পার হইতে এক ব্যক্তি সময় লয় t_1 মিনিট এবং স্রোত থাকিলে তাঁহার সময় লাগে t_2 মিনিট। প্রমাণ কর যে স্রোতের বেগ মিনিটে

$$s\sqrt{\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}} \text{ মিটার।}$$

মনে কর ঐ ব্যক্তির এবং স্রোতের গতি যথাক্রমে মিনিটে u মি. এবং v মি.। স্রোত না থাকিলে তাহার বেগই লব্ধিবেগ ;

$\therefore \quad ut_1 = s \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

স্রোত থাকিলে লব্ধিবেগ $\sqrt{u^2 - v^2}$ (উদা 8 দেখ)

$\therefore \quad \sqrt{u^2 - v^2}.t_2 = s \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

(1) এবং (2) হইতে পাই, $\left(\frac{s}{t_1}\right)^2 - \left(\frac{s}{t_2}\right)^2 = u^2 - (u^2 - v^2) = v^2$

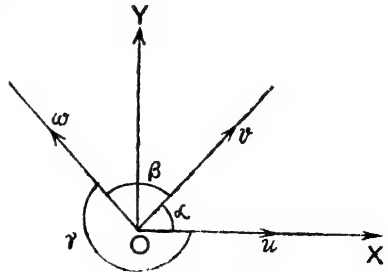
$\therefore \quad v^2 = s^2\left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}\right), \quad \therefore \quad v = s\sqrt{\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}}$ মিটার/মিনিট।

উদা. 14. একটি কণার যুগপৎ তিনটি বেগ u, v, w পরস্পরের সহিত α, β, γ কোণে নত, প্রমাণ কর যে লব্ধিবেগের পরিমাপ

$$\{u^2 + v^2 + w^2 + 2uv\cos\alpha + 2vw\cos\beta + 2wu\cos\gamma\}^{\frac{1}{2}}$$

মনে কর বেগ তিনটির লব্ধিবেগ V এবং উহা u-বেগের অভিমুখিতার সহিত θ-কোণে নত। বেগ তিনটিকে u বলের অভিমুখিতা $\overrightarrow{OX}$ এবং u-বলের লম্ব-অভিমুখিতা $\overrightarrow{OY}$ এর দিকে বিশ্লেষিত করিয়া পাই,

চিত্র 18

$V\cos\theta = u + v\cos\alpha$
$+ w\cos(\alpha+\beta) \cdots \quad \cdots(1)$

এবং $V \sin\theta = 0 + v\sin\alpha + w\sin(\alpha+\beta)$ ... ...(2)

কিন্তু, $\alpha+\beta+\gamma=360°$, $\therefore$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos(360°-\gamma)=\cos\gamma$

এবং $\sin(\alpha+\beta)=\sin(360°-\gamma)=-\sin\gamma$

$\therefore$ $V\cos\theta = u + v\cos\alpha + w\cos\gamma$ ... ...(3)

এবং $V\sin\theta = v\sin\alpha - w\sin\gamma$ ... ...(4)

(3) এবং (4) এর বর্গ করিয়া ও পরে যোগ করিয়া পাই,

$$V^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$
$$=(u+v\cos\alpha+w\cos\gamma)^2+(v\sin\alpha-w\sin\gamma)^2$$

বা, $V^2=u^2+v^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+w^2(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma)$
$+2uv\cos\alpha+2uw\cos\gamma+2wv\cos\alpha\cos\gamma-2wv\sin\alpha\sin\gamma$
$=u^2+v^2+w^2+2uv\cos\alpha+2uw\cos\gamma$
$+2vw(\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma)$

এক্ষণে, $\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma=\cos(\alpha+\gamma)$
$=\cos(360°-\beta)=\cos\beta.$

$\therefore$ $V^2=u^2+v^2+w^2+2uv\cos\alpha+2uw\cos\gamma+2vw\cos\beta$,.

$\therefore$ $V=\sqrt{u^2+v^2+w^2+2uv\cos\alpha+2uw\cos\gamma+2vw\cos\beta}$

প্রশ্নমালা 1

1. একটি বস্তু A বিন্দু হইতে যাত্রা করিয়া 84 মিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার পথ সম্পূর্ণরূপে অতিক্রম করিয়া 12 মিনিটে পুনরায় A বিন্দুতে ফিরিয়া আসিল। বস্তুটির গড় দ্রুতি ও গড় বেগ নির্ণয় কর।

2. একটি কণা সেকেণ্ডে 3 মিটার বেগে একটি সরলরেখায় গতিশীল। 3 সেকেণ্ড পরে এই বেগের সহিত পূর্ববেগের দিকের সহিত লম্বাভিমুখে একটি অতিরিক্ত সেকেণ্ডে 4 মিটার বেগ যুক্ত হইল। এই অতিরিক্ত বেগ যোগ হওয়ার 2 সেকেণ্ড পরে যাত্রাস্থল হইতে কণাটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

3. নিম্নে প্রদত্ত বেগগুলিকে $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ দুইটি পরস্পর লম্ব সরলরেখায় বিশ্লেষিত কর। $\overrightarrow{OX}$-এর সহিত প্রত্যেকটি বেগের নতি পাশে দেওয়া হইল।

(i) সেকেণ্ডে 24 মিটার, 90°,

(ii) ঘণ্টায় 100 কিলোমিটার, 120°,

(iii) সেকেণ্ডে 10 সে.মি., 45°.

4. একটি কণার পরস্পর 60° কোণে নত যুগপৎ দুইটি বেগ 5 মিটার/সেকেণ্ড এবং 10 মিটার/সেকেণ্ড; কণাটির লব্ধিবেগের পরিমাপ ও দিক নির্ণয় কর।

5. নিম্নের উদাহরণগুলিতে, u এবং v দুইটি উপাংশ-বেগ (component velocities), u এবং v-র নতি α এবং উহাদের লব্ধিবেগের পরিমাপ w.

(i) u=ঘণ্টায় 20 কি.মি., v=ঘণ্টায় 15 কি. মি. এবং $\alpha=90°$ হইলে, w নির্ণয় কর।

(ii) u=সেকেণ্ডে 24 সে. মি., w=সেকেণ্ডে 25 সে. মি., $\alpha=90°$ হইলে v নির্ণয় কর।

(iii) $u=3$ মিটার/মিনিট, $v=3$ মিটার/মিনিট, $\alpha=30°$; w নির্ণয় কর।

(iv) $u=7$ সে. মি./সেকেণ্ড, $v=8$ সে. মি./সেকেণ্ড, $w=13$ সে.মি./সেকেণ্ড; α নির্ণয় কর।

6. একটি বস্তুর তিনটি যুগপৎ বেগ সেকেণ্ডে 20, 10 এবং 7 সে. মি. থাকিলে, বস্তুটির স্থির অবস্থায় থাকা সম্ভব কিনা নির্ণয় কর।

7. একটি বস্তুর উপর যুগপৎ তিনটি বেগ প্রযুক্ত হইল। বেগ তিনটির অনুপাত $(\sqrt{3}+1) : \sqrt{6} : 2$. বস্তুটি স্থির থাকিলে বেগ তিনটির অভিমুখিতা-সমূহের অন্তর্গত কোণ তিনটি নির্ণয় কর।

8. দুইটি যুগপৎ বেগের লব্ধি 20 মিটার/সেকেণ্ড এবং ইহা 15 মিটার/সেকেণ্ড উপাংশটির সহিত সমকোণে নত। অপর উপাংশটির পরিমাপ ও দিক নির্ণয় কর।

9. এক সাঁতারুর একটি নদী সোজা পার হইয়া পুনরায় ফিরিয়া আসিতে সময় লাগিল t_1. নদীর বিস্তারের সমান দৈর্ঘ্য স্রোতের অনুকূলে যাইয়া পুনরায় ফিরিয়া আসিতে তাহার সময় লাগিল t_2.

স্থির জলে সাঁতারুর বেগ u এবং স্রোতের বেগ v হইলে প্রমাণ কর যে,

$$t_1 : t_2 = \sqrt{u^2 - v^2} : u.$$

10. দুই ব্যক্তি যথাক্রমে v_1 ও v_2 বেগে $u(<v_1)$ বেগে বহমান একটি নদী পার হইল। প্রথম ব্যক্তি অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতম হয়, এইরূপ অভিমুখিতায় এবং দ্বিতীয় ব্যক্তি ক্ষুদ্রতম সময়ে নদী পার হওয়া যায়, এইরূপ অভিমুখিতায় সাঁতার দিল। তাহারা একই সময়ে যাত্রা আরম্ভ করিয়া যদি একই সময়ে অপর তীরে পৌঁছায়, তবে প্রমাণ কর যে, $v_1^2 - v_2^2 = u^2$.

11. একটি ক্রিকেট খেলায় ওপেনিং বোলার ঘণ্টায় 90 কি. মি. বেগে বল করে। ব্যাটস্‌ম্যান ঐ বোলারের বলের উপর কি বেগ প্রয়োগ করিলে, বলটি পূর্বেকার দ্রুতিতে পীচের সহিত 90° কোণে বাউণ্ডারির দিকে চলিয়া যাইবে। (মি./সে.-এ উত্তর দাও)।

[মনে কর নির্ণেয় বেগের পরিমাণ v মি./সেকেণ্ড এবং ইহার অভিমুখিতা বলের অভিমুখিতার সহিত θ-কোণে নত। সুতরাং লব্ধি বল ও v-এর অভিমুখিতার অন্তর্গত কোণ $\theta - 90°$.

90 কি. মি./ঘণ্টা = 25 মি./সেকেণ্ড।

সুতরাং $\dfrac{v}{\sin 90°} = \dfrac{25}{\sin(\theta - 90°)} = \dfrac{25}{\sin\theta}$

$\therefore \dfrac{\sin\theta}{\sin(\theta - 90°)} = 1$, বা, $-\tan\theta = 1$, $\therefore \theta = 135°$

আবার $v = \dfrac{25}{\sin 135°} = 25\sqrt{2}$]

12. একটি কণার উপর যুগপৎ চারিটি বেগ উত্তর, দক্ষিণ, পূর্ব এবং পশ্চিম অভিমুখে যথাক্রমে, সেকেণ্ডে 8 মিটার, 5 মি., 10 মি. এবং 16 মি. প্রযুক্ত হইল। লব্ধিবেগের পরিমাপ ও দিক নির্ণয় কর।

13. দুইটি রেলপথ সমকোণে মিলিত হইয়াছে। একটি ট্রেন উহাদের সংযোগস্থল হইতে একটি রেলপথ বরাবর এবং একই সময়ে অপর রেলপথের একটি স্টেশন হইতে ঐ রেলপথ দিয়া আর একটি ট্রেন ঐ সংযোগস্থল অভিমুখে যাত্রা করিল। ট্রেন দুইটির অভিমুখিতার পরিবর্তন না হইলে এবং একই সমবেগ হইলে, প্রমাণ কর যে ট্রেন দুইটি যখন সংযোগ স্থান হইতে সমদূরবর্তী হইবে তখন তাহাদের দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হইবে।

14. এক সাঁতারু 300 মিটার প্রশস্ত একটি নদীর স্রোতের দ্বিগুণ বেগে নদীর লম্বাভিমুখে যাত্রা শুরু করিল। নদীর দৈর্ঘ্য বরাবর কত দূরে সে অপর তীরে পৌঁছিবে?

15. এক বৈমানিক c কিলোমিটার বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজাকার পথে উড্ডয়ন আরম্ভ করিল। বায়ুর বেগ একটি বাহুর সমান্তরাল দিকে u কিলোমিটার; প্রমাণ কর যে সমস্ত পথটি অতিক্রম করিতে তাহার সময় লাগিবে, $c(v + \sqrt{4v^2 - 3u^2})/(v^2 - u^2)$. বিমানের গতি ঘণ্টায় v কিলোমিটার।

16. একটি কণার পাঁচটি যুগপৎ বেগ সেকেণ্ডে 5, 10, 15, 20 ও 25 মিটার থাকিলে যাত্রার 5 সেকেণ্ড পরে তাহার অবস্থান নির্ণয় কর। প্রথম তিনটি বেগ যথাক্রমে পূর্ব, উত্তর-পূর্ব এবং দক্ষিণ-পূর্বদিকে; চতুর্থটি উত্তরদিকের পশ্চিমে 15° এবং পঞ্চম বেগটি দক্ষিণের পূর্বদিকে 30° কোণে নত।

17. সেকেণ্ডে 20 মিটার বেগে চলমান একটি ট্রেনের এক আরোহী ট্রেনের গতির দিকের সহিত 120° কোণে নত দিকে সেকেণ্ডে 40 মিটার বেগে একটি বল নিক্ষেপ করিল। প্রমাণ কর যে বলটির লব্ধিবেগ হইবে ট্রেনের গতির লম্বাভিমুখে এবং ঐ লব্ধিবেগের পরিমাণ নির্ণয় কর।

18. এক ব্যক্তি নদীতে স্রোত না থাকিলে t মিনিটে s মিটার প্রশস্ত একটি নদী অতিক্রম করে এবং স্রোত থাকিলে $t_1(>t)$ মিনিটে অতিক্রম করে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

19. একটি কণার একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহুগুলির সমান্তরাল দিকে তিনটি যুগপৎ বেগ 2, 4, 4 কিলোমিটার/ঘণ্টা থাকিলে লব্ধিবেগ নির্ণয় কর। [উত্তরটি মিটার/সেকেণ্ডে দাও]

20. স্থির বাতাসে একটি বিমানের দ্রুতি ঘণ্টায় 100 কি.মি.। বাতাসের বেগ পশ্চিমদিক হইতে ঘণ্টায় 40 কি.মি. হইলে দক্ষিণ-পশ্চিমদিকে 250 কি.মি. দূরত্বে অবস্থিত কোনস্থানে যাইতে বিমানের কত সময় লাগিবে, তাহা নির্ণয় কর। বিমানের গতির দিক নির্ণয় কর।

21. একটি ঋজুপথে একটি বাস ঘণ্টায় 12 কি.মি. বেগে চলিতেছে। ঐ পথের সহিত সমকোণে নত একটি রাস্তায় ঘণ্টায় 5 কি.মি. বেগে ধাবমান এক ব্যক্তি রাস্তা দুইটির সংযোগস্থল হইতে 100 মিটার দূরত্বে অবস্থিত একটি স্থান হইতে ঐ বাসটিকে ঐ সংযোগস্থল হইতে 200 কি.মি. দূরে দেখিল। প্রমাণ কর যে বাস হইতে ঐ ব্যক্তির দূরত্ব কখনও $15\frac{5}{13}$ মিটার অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে না।

22. একটি ক্রিকেট খেলায় বোলার এমনভাবে ফিল্ডিং সাজাইল যে ব্যাটসম্যান বলের গতির দিকে এরূপে স্লিপ কাট মারিতে বাধ্য হয় যাহার ফলে বলটি উহার প্রাথমিক অভিমুখিতার সহিত α কোণে নত অভিমুখিতায় চলিয়া যায় এবং বলের দ্রুতির পরিবর্তন হয় না। ব্যাটসম্যান বলটিকে কিভাবে আঘাত করিল; তাহা নির্ণয় কর। ব্যাটসম্যান বলের উপর বলের বেগের সমান বেগ প্রয়োগ করিলে, α-র পরিমাণ নির্ণয় কর।

তৃতীয় অধ্যায়

আপেক্ষিক বেগ

(Relative Velocity)

§ 3·1. কোন বস্তুর গতি সর্বদা অপর কোন বস্তুর সাপেক্ষে আলোচনা করা হয়, অর্থাৎ গতিবিদ্যায় কোন নির্দিষ্ট অক্ষ-সমূহের সাপেক্ষে বস্তুর গতির আলোচনা করা হয়। এই পুস্তকে কোন সমতলে অথবা কোন সরলরেখায় বস্তুর গতি বিষয়ে আলোচনা করা হইবে ; সুতরাং গতি বলিতে যথাক্রমে নির্দিষ্ট অক্ষদ্বয় অথবা নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে গতি মনে করা হইবে।

দৈনন্দিন জীবনে তোমরা নিশ্চয় আপেক্ষিক গতি বা গতির সাপেক্ষত্ব (relativity of motion) অনুভব করিয়াছ। কোন ব্যক্তি যখন কোন ট্রেন ধরিতে যায়, তখন ঐ ব্যক্তি তাহার সাপেক্ষে ট্রেনের গতি অনুভব করে। সমবেগে গতিশীল কোন ট্রেনের জানালা-দরজা বন্ধ থাকিলে ট্রেনের প্রত্যেক আরোহীর নিকট ট্রেনকে স্থির মনে হইবে। ট্রেনে বসিয়া আমরা ট্রেনের গতি অনুভব করি তাহার কারণ, ট্রেনের জানালা খোলা থাকিলে ট্রেনের বাহিরের বস্তুসমূহের সাপেক্ষে ট্রেনের গতি অনুভব করা যায়। অসম-বেগে চলমান কোন ট্রেনের গতি পরিবর্তন কালে ধাক্কা খাওয়ার ফলে ঐ ট্রেনের কোন আরোহী চক্ষু বন্ধ করিয়াও ট্রেনের গতি অনুভব করিতে পারে। ট্রেনের বাহিরে যে সকল স্থির গাছপালা, টেলিগ্রাফ পোস্ট ইত্যাদি থাকে, তাহাদের চলন্ত ট্রেন হইতে পশ্চাৎ-গতি সম্পন্ন অর্থাৎ ট্রেনের গতির বিপরীত দিকে চলমান বলিয়া মনে হয়। আবার বৃষ্টির কথা মনে কর। বৃষ্টির ফোঁটাগুলি সাধারণতঃ ভূমির উপর লম্বভাবে পড়ে ; কিন্তু তুমি দৌড়াইতে থাকিলে, অথবা চলন্ত কোন ট্রেনে থাকিলে তোমার মনে হইবে বৃষ্টির ফোঁটাগুলি যেন তোমার দিকে তির্যক ভাবে (অর্থাৎ উল্লম্বরেখার সহিত কোন কোণে নত হইয়া) আসিতেছে।

নিখিল বিশ্বে কোন বস্তুই প্রকৃত স্থির নহে। আমরা যখন কোন বস্তুকে গতিশীল বলি, তখন ঐ বস্তুর চতুষ্পার্শ্বস্থ বস্তুসমূহের সাপেক্ষে উহার অবস্থান পরিবর্তনকেই উহার গতি বলা হয়। কোন বস্তুকে স্থির বলিলে বুঝা যায় যে ঐ বস্তু উহার চতুষ্পার্শ্বস্থ বস্তুসমূহের সাপেক্ষে স্থির আছে অর্থাৎ অবস্থান পরিবর্তন করিতেছে না। অর্থাৎ পৃথিবীকে স্থির ধরিয়া পৃথিবীর সাপেক্ষে কোন বস্তুর স্থিতাবস্থা (state of rest) বা গতিশীল অবস্থা (state of

motion) সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়। কিন্তু পৃথিবীও স্থির নহে ; বস্তুতঃ পৃথিবী সূর্যের চতুর্দিকে প্রচণ্ড গতিতে ঘুরিতেছে। সূর্যের চারিদিকে পৃথিবীর এই গতি সেকেণ্ডে প্রায় 30 কিলোমিটার বা ঘণ্টায় প্রায় 1,08,000 কিলোমিটার। এই পুস্তকে (অন্য কিছু বলা না থাকিলে) পৃথিবীকে স্থির ধরিয়া পৃথিবীর সাপেক্ষে সকল গতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে। অর্থাৎ অন্যান্য সকল বস্তুর সাপেক্ষে পৃথিবীকে স্থির মনে করা হইবে।

§ 3·2. সংজ্ঞা : আপেক্ষিক বেগ (Definition : Relative Velocity).

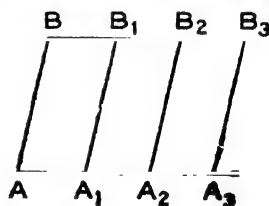
কোন স্থির অথবা গতিশীল বস্তু বা কণা A-র সাপেক্ষে অপর কোন বস্তু বা কণা B-র অবস্থান পরিবর্তনের হারকে A-র সাপেক্ষে B-র **আপেক্ষিক বেগ** (Relative velocity) বলে।

[**দ্রষ্টব্য :** আপেক্ষিক বেগের ক্ষেত্রে B-র অবস্থান $\overline{AB}$ রেখাংশ দ্বারা নির্দিষ্ট করা হয়।]

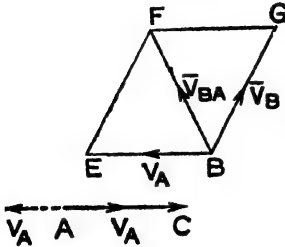
এক্ষণে প্রমাণ করা হইবে যে,

কোন বস্তু বা কণা B-র অপর কোন বস্তু বা কণা A-র সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ, B-র প্রকৃত বেগের সহিত A-র সমান কিন্তু বিপরীত বেগ যোগ করিয়া পাওয়া যায়।

প্রথমে মনে করা যাক A এবং B উভয়েই একই u-বেগে সমান্তরাল সরলরেখায় গতিশীল ; যে কোন সময় t_1 পরে A ও B-র সরণ $\overline{AA_1}$ ও $\overline{BB_1}$ (যথাক্রমে) পরস্পরের সমান ও সমান্তরাল হইবে। অনুরূপে বিভিন্ন অবকাশ (interval) t_2, t_3তে B-র সরণ $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$, ঐ সকল অবকাশে A-র সরণ $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$-র সমান ও সমান্তরাল হইবে। সুতরাং $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$ রেখাংশগুলি পরস্পরের সমান ও সমান্তরাল হইবে (চিত্র 19)। সুতরাং $\overline{AB}$ রেখাংশ A-র সাপেক্ষে B-র যে অবস্থান নির্দেশ করে, তাহা সর্বদা A-র সাপেক্ষে অপরিবর্তিত থাকিবে। সুতরাং A-র সাপেক্ষে B-কে স্থির মনে হইবে এবং B-র আপেক্ষিক বেগ শূন্য হইবে।

B B₁ B₂ B₃ — A A₁ A₂ A₃

চিত্র 19

এইবার মনে কর A এবং B দুইটি বিভিন্ন অভিমুখিতায় যথাক্রমে দুইটি বিভিন্ন বেগ v_A এবং v_B লইয়া গতিশীল। মনে কর $\overline{AC}$ ও $\overline{BG}$ যথাক্রমে A ও B-র বেগ v_A ও v_Bকে প্রকাশ করে। $\overline{AC}$-র সমান কিন্তু বিপরীত

বেগ A এবং B-এর উপর প্রয়োগ কর। সুতরাং এই প্রযুক্ত বেগ দুইটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। এক্ষণে, উপরের আলোচনা অনুযায়ী A এবং B-র উপর প্রযুক্ত এই দুইটি সমান ও সমান্তরাল বেগের প্রয়োগের ফলে A-র সাপেক্ষে B-র আপেক্ষিক বেগের কোন পরিবর্তন হইবে না।

চিত্র 20

এক্ষণে, A-র দুইটি বেগ এবং উহারা $\overline{AC}$ ও $\overline{AD}$ দ্বারা প্রকাশিত। যেহেতু $\overline{AC}$ এবং $\overline{AD}$ দুইটি সমান ও বিপরীত বেগ সুতরাং A এখন স্থির অবস্থায় থাকিবে।

আবার এখন, B-র দুইটি যুগপৎ বেগ, V_A ও V_B যথাক্রমে $\overline{BE}$ ও $\overline{BG}$ দ্বারা প্রকাশিত। এই দুইটি যুগপৎ বেগের লব্ধিবেগ V_{BA}, BGFE সামান্তরিকের B বিন্দু হইতে অঙ্কিত কর্ণ $\overline{BF}$ দ্বারা প্রকাশিত হয়। সুতরাং A-র সাপেক্ষে B-র আপেক্ষিক বেগ V_{BA}, $\overline{BF}$ দ্বারা প্রকাশিত।

ভেক্টর চিহ্নে, $V_{BA} = \overline{BG} + \overline{BE}$

$$= V_B - V_A.$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. যদি A এবং B একই সরলরেখায় গতিশীল হয়, তবে উহাদের বেগ যথাক্রমে u এবং v হইলে A-র সাপেক্ষে B-র আপেক্ষিক বেগ

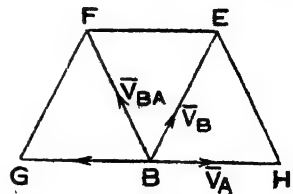
(i) $v-u$, যখন u এবং v-র একই অভিমুখিতা

(ii) $v+u$, যখন u এবং v-র বিপরীত অভিমুখিতা, অর্থাৎ যখন উভয়ে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হয়।

অনুসিদ্ধান্ত 2. $V_{BA} = V_B - V_A$ সম্পর্ক হইতে পাই,

$$V_B = V_{BA} + V_A.$$

অর্থাৎ A-র সাপেক্ষে B-র আপেক্ষিক বেগ জানা থাকিলে, এই আপেক্ষিক বেগের সহিত A-র বেগ যোগ করিয়া B-র প্রকৃত বেগ নির্ণয় করা যাইবে।

চিত্র 21-এ $\overline{BF}$, V_{BA}কে প্রকাশ করে; এক্ষণে A-র বেগ V_A-র সমান, সমান্তরাল কিন্তু বিপরীত অভিমুখিতায় $\overline{BG}$ অঙ্কন কর। এক্ষণে, $\overline{BF}$কে কর্ণ এবং $\overline{BG}$কে একটি বাহু ধরিয়া অঙ্কিত সামান্তরিক BEFG সম্পূর্ণ কর। সুতরাং $\overline{BG}$ এবং $\overline{BE}$ দ্বারা প্রকাশিত বেগ দুইটির

চিত্র 21

লব্ধিবেগ $\overline{BF}$ দ্বারা প্রকাশিত হইবে। আবার V_{BA} অর্থাৎ $\overline{BF}$, V_A অর্থাৎ $\overline{BG}$ এবং V_B-র লব্ধিবেগ। সুতরাং $\overline{BE}$, V_B বেগকে প্রকাশ করে। V_A-র অভিমুখিতায় $\overline{BH}$ অঙ্কন কর যাহাতে একই স্কেলে $\overline{BH}$, V_A-কে প্রকাশ করে। সুতরাং $\overline{GB}$ ও $\overline{BH}$ একই সরলরেখায় অবস্থিত। EH যোগ কর। সুতরাং BHEF একটি সামান্তরিক হইল। এক্ষণে, বেগের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী, এই সামান্তরিকের $\overline{BE}$ কর্ণ, $\overline{BH}$ ও $\overline{BF}$ দ্বারা প্রকাশিত বেগ দুইটির লব্ধি বেগকে প্রকাশ করে।

$$\therefore \quad V_B = V_{BA} + V_A.$$

§ 3·3. আপেক্ষিক বেগের পরিমাণ ও দিক

পূর্ব অনুচ্ছেদে দেখা গেল যে, কোন বস্তু বা কণা B-র নিজের বেগের সহিত অপর কোন বস্তু বা কণা A-র বেগের সমান ও বিপরীত বেগ যোগ করিয়া A-র সাপেক্ষে B-র আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করা যায়।

মনে কর A ও B-র বেগ যথাক্রমে u এবং v এবং উহারা α কোণে নত; সুতরাং B র বেগ v, A-র বিপরীত বেগের সহিত $\pi-\alpha$ কোণে নত। অতএব A-র সাপেক্ষ B-র আপেক্ষিক বেগ w হইলে, § 2·8 অনুযায়ী

$$w^2 = u^2 + v^2 + 2uv \cos(\pi - \alpha)$$
$$= u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha.$$
$$\therefore \quad w = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha} \qquad \cdots(1)$$

যদি u এর দিকের সহিত আপেক্ষিক বেগ w-এর দিকের নতি θ হয়, তবে u-এর বিপরীত বেগের সহিত আপেক্ষিক বেগের নতি হইবে $\pi - \theta$.

সুতরাং § 2·8 অনুযায়ী,

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{v \sin(\pi - \alpha)}{u + v \cos(\pi - \alpha)}$$

$$\text{বা,} \quad -\tan \theta = \frac{v \sin \alpha}{u - v \cos \alpha}$$

$$\therefore \quad \tan \theta = \frac{v \sin \alpha}{v \cos \alpha - u} \quad \cdots(2).$$

সুতরাং (1) ও (2) হইতে আপেক্ষিক বেগের মান ও দিক পাওয়া যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. আপেক্ষিক বেগ w বৃহত্তম হইবে যখন $\alpha = \pi$ হইবে এবং বৃহত্তম আপেক্ষিক বেগ $= u + v$.

সুতরাং A র সাপেক্ষে B-র আপেক্ষিক বেগ বৃহত্তম হইবে যখন উভয়ে একই বেগে একই সরলরেখায় বিপরীত অভিমুখিতায় গতিশীল হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. আপেক্ষিক বেগ w ক্ষুদ্রতম হইবে যখন, $\alpha=0$ অর্থাৎ যখন A ও B একই সরলরেখায় একই বেগে একই অভিমুখিতায় গতিশীল হইবে এবং তখন আপেক্ষিক বেগের পরিমাণ

$$w=v-u.$$

উদাহরণমালা 2

উদা 1. দুইটি স্টেশন A ও B-র দূরত্ব 100 কিলোমিটার। একটি ট্রেন A হইতে B অভিমুখে 40 কি.মি./ঘণ্টা বেগে এবং অপর একটি ট্রেন B হইতে A অভিমুখে একই সময়ে ঘণ্টায় 60 কি. মি. বেগে যাত্রা করিল। ট্রেন দুইটি কখন মিলিত হইবে ?

যেহেতু ট্রেন দুইটি পরস্পরের অভিমুখে যাইতেছিল, সেজন্য উহারা নিশ্চয় সমান্তরাল পথে বিপরীত অভিমুখিতায় চলিতেছিল। সুতরাং যে কোন ট্রেনের অপরটির সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায়

$u+v=(40+60)$ কি.মি. $=100$ কিলোমিটার।

সুতরাং তাহারা $\dfrac{100 \text{ কি.মি.}}{100 \text{ কি.মি.}}=1$ ঘণ্টা পরে মিলিত হইবে ;

অর্থাৎ নির্ণেয় সময় $=1$ ঘণ্টা।

উদা. 2. 200 মিটার ও 250 মিটার দীর্ঘ দুইটি ট্রেন একই দিকে সমান্তরাল রেলপথে চলিতেছিল। ট্রেন দুইটির বেগ ঘণ্টায় যথাক্রমে 45 কি.মি. ও 30 কি.মি. হইলে উহারা কতক্ষণে পরস্পরকে অতিক্রম করিবে ?

এখানে ট্রেন দুইটির আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায়

$(45-30)$ কি.মি. $=15$ কি.মি./ঘণ্টা।

পরস্পরকে অতিক্রম করিতে উহাদের যে কোন ট্রেনকে অপরটির সাপেক্ষে $(200+250)=450$ মিটার পথ অতিক্রম করিতে হইবে।

সুতরাং নির্ণেয় সময় $=\dfrac{450}{15\times1000}$ ঘণ্টা $=\dfrac{450\times60\times60}{15\times1000}$ সেকেণ্ড

$=108$ সেকেণ্ড $=1$ মিনিট 48 সেকেণ্ড।

উদা. 3. একটি স্টীমার ঘণ্টায় 12 কি.মি. বেগে পশ্চিম দিকে এবং আর একটি স্টীমার ঘণ্টায় 9 কি.মি. বেগে উত্তরদিকে যাইতেছে। দ্বিতীয় স্টীমারের প্রথমটির সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

দ্বিতীয় ষ্টীমারের আপেক্ষিক বেগ = উহার নিজের বেগ এবং প্রথম ষ্টীমারের সমান কিন্তু বিপরীত বেগের লব্ধিবেগ

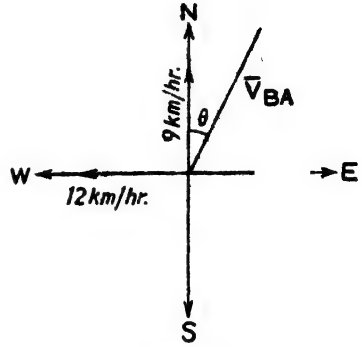
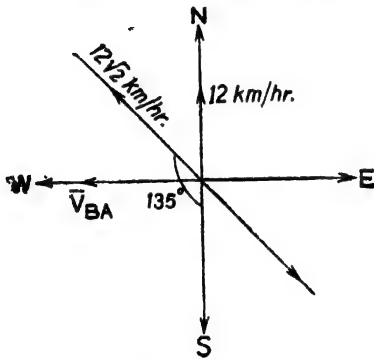
= উত্তরাভিমুখে 9 কিলোমিটার এবং পূর্ব অভিমুখে 12 কি.মি. বেগের লব্ধি

$= \sqrt{12^2+9^2} = 15$ কি.মি./ঘণ্টা।

চিত্র 22

মনে কর এই আপেক্ষিক বেগ উত্তর দিকের সহিত θ কোণে নত।

সুতরাং $\tan\theta = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

অতএব দ্বিতীয় ষ্টীমারের আপেক্ষিক বেগ উত্তর দিকের সহিত পূর্বাভিমুখে $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ কোণে নত এবং ইহার পরিমাপ ঘণ্টায় 15 কিলোমিটার।

উদা. 4. একটি ষ্টীমার ঘণ্টায় 12 কি.মি. বেগে উত্তরাভিমুখে এবং অপর একটি ষ্টীমার ঘণ্টায় $12\sqrt{2}$ কি. মি. বেগে উত্তর-পশ্চিম দিকে যাইতেছে। প্রথম ষ্টীমারটির সাপেক্ষে দ্বিতীয় ষ্টীমারটির বেগ নির্ণয় কর।

চিত্র 23

প্রথম ষ্টীমারটির সাপেক্ষে দ্বিতীয় ষ্টীমারটির বেগ, দক্ষিণাভিমুখে ঘণ্টায় 12 কি. মি. ও উত্তর-পশ্চিম অভিমুখে ঘণ্টায় $12\sqrt{2}$ কি.মি. বেগ দুইটির লব্ধি বেগ। এই দুইটি বেগের মধ্যে কোণের পরিমাপ $= 90° + 45° = 135°$.

∴ সুতরাং আপেক্ষিক বেগের পরিমাপ

$$w = \sqrt{12^2 + (12\sqrt{2})^2 + 2.12.12\sqrt{2}\cos 135°}$$

$$= \sqrt{144 + 288 - 2\times 12.12\sqrt{2}.\ \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{144} = 12 \text{ কি.মি./ঘণ্টা}$$

উত্তর পশ্চিম দিকের সহিত এই আপেক্ষিক বেগ যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহার পরিমাপ θ হইলে,

$$\tan\theta = \frac{12\sin 135°}{12\sqrt{2} + 12\cos 135°} = \frac{\frac{12}{\sqrt{2}}}{12\sqrt{2} - \frac{12}{\sqrt{2}}} = 1 = \tan 45°$$

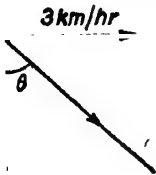
$$\therefore\quad \theta = 45°.$$

অর্থাৎ আপেক্ষিক বেগের অভিমুখিতা পশ্চিম দিকে।

সুতরাং নির্ণেয় আপেক্ষিক বেগ পশ্চিমাভিমুখে ঘণ্টায় 12 কি. মি.।

উদা. 5. ঘণ্টায় 3 কি.মি. বেগে গতিশীল এক ব্যক্তির মনে হইল বৃষ্টি উল্লম্বভাবে পড়িতেছে। যদি বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ $3\sqrt{3}$ কি.মি./ঘণ্টা হয়, তবে বৃষ্টি প্রকৃতপক্ষে কি অভিমুখিতায় পড়িতেছিল নির্ণয় কর।

3km/hr

θ

3√3 km/hr

চিত্র 24

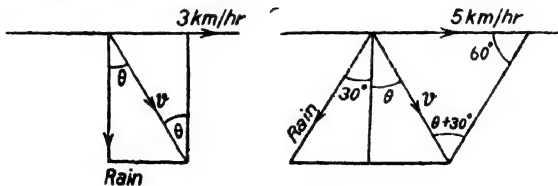
বৃষ্টির প্রকৃত বেগ, ঐ ব্যক্তির বেগ ঘণ্টায় 3 কি.মি. এবং ঐ ব্যক্তির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় $3\sqrt{3}$ কি.মি.-এর লব্ধিবেগ।

মনে কর, বৃষ্টির বেগের প্রকৃত অভিমুখিতা, উল্লম্বদিকের সহিত θ কোণে নত।

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$$

$$\therefore \quad \theta = 30^\circ.$$

উদা. 6. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 3 কি.মি. বেগে যাইতেছিলেন এবং তাঁহার মনে হইল বৃষ্টি উল্লম্ব ভাবে পড়িতেছে। ঐ ব্যক্তি যদি ঘণ্টায় 5 কি.মি. বেগে চলিতেন, তবে বৃষ্টির অভিমুখিতা তাঁহার নিকট উল্লম্ব দিকের সহিত 30° কোণে নত বলিয়া মনে হইত। বৃষ্টির প্রকৃত অভিমুখিতা ও বেগ নির্ণয় কর।

মনে কর বৃষ্টির প্রকৃত বেগ v কি.মি./ঘণ্টা ঐ ব্যক্তির গতির অভিমুখিতার সহিত $90^\circ - \theta)$ কোণে নত।

চিত্র 25

প্রথম ক্ষেত্রে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ

$= \sqrt{v^2 - 3^2}$ কি.মি./ঘণ্টা $= \sqrt{v^2 - 9}$ কি.মি./ঘণ্টা এবং

$$\tan\theta = \frac{3}{\sqrt{v^2 - 9}} \text{ (চিত্র দেখ)} \qquad \dots \quad \text{(i)}$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ

$$= \sqrt{v^2+5^2+2v.5\cos(90°+\theta)}$$
$$= \sqrt{v^2+25-10v\sin\theta}.$$

আবার উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিলে

$$v\cos\theta+5.\cos 90° = \sqrt{v^2+25-10v\sin\theta}.\cos 30°$$

বা, $v^2\cos^2\theta = (v^2+25-10v\sin\theta).\frac{3}{4}\cdots\cdots$(ii)

এক্ষণে, (i) হইতে পাই,

$$\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta = 1+\frac{9}{v^2-9} = \frac{v^2}{v^2-9}.$$

বা, $\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{v^2}{v^2-9}$, $\therefore$ $v^2\cos^2\theta = v^2-9$

$\therefore$ (ii) হইতে পাই,

$$v^2-9 = (v^2+25-10v\sin\theta).\tfrac{3}{4}$$

বা, $4v^2-36 = 3v^2+75-30v\sin\theta$

বা, $v^2+30v\sin\theta-111=0.$

$\therefore$ $\sin\theta = \frac{111-v^2}{30v}$ এবং $\cos\theta = \frac{\sqrt{v^2-9}}{v}$

এক্ষণে, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\therefore$ $\left(\frac{111-v^2}{30v}\right)^2+\frac{v^2-9}{v^2}=1,$

বা, $(111-v^2)^2+900(v^2-9)=900v^2,$

বা, $(111-v^2)^2=8100,$

বা, $111-v^2=90,$ $\therefore$ $v^2=21,$

$\therefore$ $v=\sqrt{21},$

এবং $\tan\theta = \frac{3}{\sqrt{21-9}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore$ বৃষ্টির প্রকৃত বেগ ঐ ব্যক্তির গতির দিকে উল্লম্ব দিকের সহিত $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ কোণে নত এবং ইহার পরিমাপ ঘণ্টায় $\sqrt{21}$ কি. মিটার।

বিকল্প পদ্ধতি : চিত্র হইতে পাই, প্রথমক্ষেত্রে

$\frac{v}{\sin 90°} = \frac{3}{\sin\theta}$, বা, $v\sin\theta=3\cdots$(1)

আবার দ্বিতীয়ক্ষেত্রে $\frac{v}{\sin 60°} = \frac{5}{\sin(30°+\theta)}$

বা, $v \sin(30^\circ+\theta)=5 \sin 60^\circ$,

বা, $v\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ...(2)

(2) কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cot\theta=\frac{5}{6}\sqrt{3}$,

বা, $\frac{1}{2}\cot\theta=\frac{5}{6}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}(5-3)}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

বা, $\cot\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\therefore\ \tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sin\theta=\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}=\frac{1}{\sqrt{\cot^2\theta+1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}+1}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$\therefore$ (1) হইতে পাই, $v.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=3$, বা, $v=\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\sqrt{21}$.

উদা. 7. একটি ট্রেন ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে উত্তরাভিমুখে যাইতেছিল। বাতাস দক্ষিণ-পশ্চিম দিক হইতে ঘণ্টায় 20 কি.মি. বেগে বহিতে থাকিলে ট্রেনটির বাষ্পীয় ইঞ্জিনের ধোঁয়ার গতির দিক নির্ণয় কর।

এখানে ধোঁয়ার বেগ হইল ট্রেনের বেগের সাপেক্ষে বাতাসের আপেক্ষিক বেগ। সুতরাং ধোঁয়ার বেগ বাতাসের বেগ এবং ট্রেনের সমান কিন্তু বিপরীত বেগের লব্ধি বেগ। প্রশ্নানুসারে ট্রেনের বেগ ও বাতাসের বেগের দিকের নতি 45°; সুতরাং ট্রেনের সমান ও বিপরীত বেগ এবং বাতাসের বেগের নতি 135°. এক্ষণে যদি ধোঁয়ার বেগ দক্ষিণের সহিত পূর্বাভিমুখে অর্থাৎ ট্রেনের বেগের বিপরীত দিকের সহিত θ কোণে নত হয়, তবে

$$\tan\theta=\frac{20\sin 135^\circ}{60+20\cos 135^\circ}=\frac{20\sin 45^\circ}{60-20\cos 45^\circ}$$

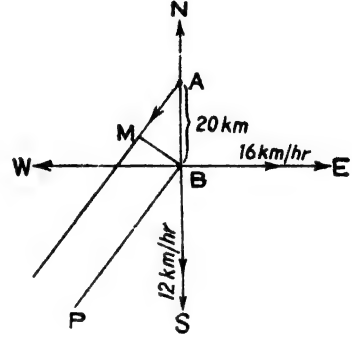
$$=\frac{20\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{60-20\times\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{20}{60\sqrt{2}-20}=\frac{1}{3\sqrt{2}-1}$$

$\therefore\ \theta=\cot^{-1}(3\sqrt{2}-1)$ দক্ষিণ দিকের পূর্ব অভিমুখিতায়

উদা. 8. দ্বিপ্রহরে একটি জাহাজ অপর একটি জাহাজ হইতে উত্তরদিকে 20 কি.মি. দূরত্বে ছিল। প্রথম জাহাজটি দক্ষিণ অভিমুখে ঘণ্টায় 12 কি.মি. বেগে এবং দ্বিতীয় জাহাজটি পূর্বাভিমুখে ঘণ্টায় 16 কি.মি. বেগে যাইতেছিল। তাহাদের মধ্যে দূরত্ব কখন সর্বাপেক্ষা কম হইবে এবং এই ক্ষুদ্রতম দূরত্ব কত?

মনে কর দ্বিপ্রহরে জাহাজ দুইটির অবস্থান A এবং B বিন্দুতে। B-র সাপেক্ষে A-র আপেক্ষিক বেগ হইতেছে, A-র বেগ এবং B-র সমান কিন্তু বিপরীত বেগের লব্ধিবেগ অর্থাৎ দক্ষিণ অভিমুখে 12 কি.মি. বেগ এবং পশ্চিম অভিমুখে 16 কি.মি. বেগ দুইটির লব্ধিবেগ $=\sqrt{12^2+16^2}$ ঘণ্টায় 20 কি. মি. $\overrightarrow{BP}$ রেখায়। এই লব্ধিবেগ A-র গতির দিকের সহিত θ-কোণ উৎপন্ন করিলে $m\angle SBP=\theta$.

চিত্র 26

এবং $\tan\theta=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$

$\therefore\quad \sin\theta=\frac{4}{5},\ \cos\theta=\frac{3}{5}.$

এক্ষণে, $\overrightarrow{AM}$ ও $\overrightarrow{BP}$ সমান্তরাল হইলে, B-র নিকট A-র গতি $\overrightarrow{AM}$ রেখায় মনে হইবে এবং $m\angle BAM=\theta$। এক্ষণে $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AM}$-এর উপর লম্ব হইলে, উহাদের ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হইবে BM.

এক্ষণে $BM=AB\sin\theta=20\times\frac{4}{5}$ কি.মি. $=16$ কি.মি.

$AM=AB\cos\theta=20\times\frac{3}{5}$ কি.মি. $=12$ কি.মি.

এক্ষণে দ্বিপ্রহরের t ঘণ্টা পরে যদি জাহাজ দুইটি মিলিত হয়, তবে t ঘণ্টায় A জাহাজটি B-এর সাপেক্ষে $AM=12$ কি.মি. দূরত্ব যায়।

$\therefore\quad 20t=12,$ বা, $t=\frac{12}{20}$ ঘ. $=\frac{3}{5}$ ঘ. $=36$ মিনিট।

সুতরাং দ্বিপ্রহরের 36 মিনিট পরে তাহাদের দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হইবে এবং এই ক্ষুদ্রতম দূরত্ব 16 কি. মি.।

উদা. 9. একজন সাইকেল আরোহী ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে পূর্বদিকে যাইতেছে। তাহার মনে হইল বায়ু উত্তর-পূর্ব দিক হইতে বহিতেছে। কিন্তু যখন তাহার অভিমুখিতা উত্তর-পূর্ব দিকে হইল, তখন তাহার মনে হইল বায়ু উত্তরদিক হইতে বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগের অভিমুখিতা নির্ণয় কর।

[C. U. 1948]

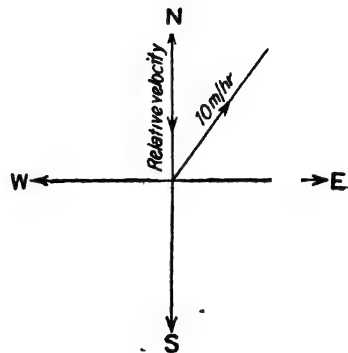
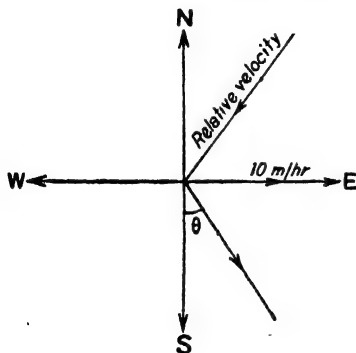
মনে কর বায়ুর প্রকৃত বেগের অভিমুখিতা দক্ষিণপূর্বদিকের সহিত θ-কোণে নত এবং উহার পরিমাপ ঘণ্টায় v মাইল।

বায়ুর প্রকৃতবেগ হইতেছে সাইকেল আরোহীর সাপেক্ষে বায়ুর আপেক্ষিক বেগ এবং সাইকেল আরোহীর বেগের লব্ধিবেগ।

উভয়ক্ষেত্রেই এই দুই বেগের অভিমুখিতাদ্বয় 135° কোণে নত।

প্রথম ক্ষেত্রে, $\dfrac{v}{\sin 135^\circ}=\dfrac{10}{\sin (45^\circ+\theta)}$ ... ...(1)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $\dfrac{v}{\sin 135^\circ}=\dfrac{10}{\sin \theta}$ ... ...(2)

চিত্র 27

(1) ও (2) হইতে পাই, $\sin \theta=\sin (45^\circ-\theta)$

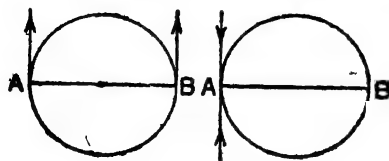
বা, $\sin (180^\circ-\theta)=\sin (45^\circ+\theta)$

$\therefore \quad 180^\circ-\theta=45^\circ+\theta, \quad \therefore \quad 2\theta=135^\circ, \quad \therefore \quad \theta=67\frac{1}{2}^\circ.$

∴ বায়ুর প্রকৃত বেগের অভিমুখিতা দক্ষিণদিকের সহিত পূর্ব অভিমুখিতায় $67\frac{1}{2}^\circ$ কোণে নত।

উদা. 10. একটি বৃত্তের পরিধি বরাবর দুইটি কণা v এবং $2v$ বেগে বিপরীত দিকে ঘোরে। কোথায় তাহাদের পরস্পরের সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম হইবে? এই বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম আপেক্ষিক বেগের মান নির্ণয় কর।

কণা দুইটির আপেক্ষিক বেগ বৃহত্তম হইবে যখন তাহাদের বেগের অভিমুখিতা দুইটি 180° কোণে নত হইবে; অর্থাৎ তাহারা যখন বিপরীত দিক হইতে আসিয়া মিলিত হইবে। তখন আপেক্ষিক বেগ $v+2v=3v$.

চিত্র 28

তাহাদের আপেক্ষিক বেগ ক্ষুদ্রতম হইবে যখন তাহাদের অভিমুখিতা দুইটি 0° কোণে নত হইবে অর্থাৎ

যখন তাহাদের সমান্তরাল রেখায় একই অভিমুখিতা হইবে। সুতরাং কণা দুইটির আপেক্ষিক বেগ ক্ষুদ্রতম হইবে যখন উহারা বৃত্তটির একটি ব্যাসের প্রান্তদ্বয়ে অবস্থিত হইবে। তখন এই আপেক্ষিক বেগের মান হইবে $2v-v=v$.

উদা. 11. B-র সাপেক্ষে A-র আপেক্ষিক বেগ এবং C-র সাপেক্ষে B-র আপেক্ষিক বেগ প্রদত্ত হইলে, A-র সাপেক্ষে C-র আপেক্ষিক বেগ কি হইবে ?

ভেক্টর চিহ্ন ব্যবহার করিলে

$$v_{AB}=v_A-v_B \quad \cdots \quad \cdots \text{ i)}$$

$$v_{BC}=v_B-v_C \quad \cdots \quad \cdot\cdot \text{ (ii)}$$

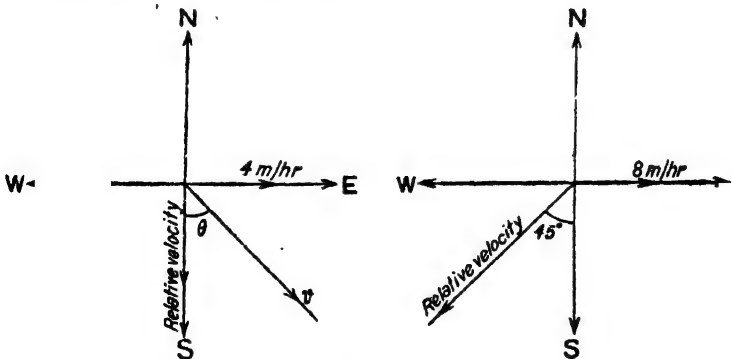
(i) এবং (ii) যোগ করিয়া পাই,

$$v_{AB}+v_{BC}=v_A-v_C.$$

এক্ষণে $v_{CA}=v_C-v_A=-(v_{AB}+v_{BC})$.

সুতরাং A-র সাপেক্ষে C-র আপেক্ষিক বেগ প্রদত্ত আপেক্ষিক বেগ দুইটির লব্ধিবেগের সমান কিন্তু বিপরীত বেগ।

উদা. 12. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে পূর্বদিকে যাইতেছে। তাহার মনে হইল বায়ু সোজা উত্তর দিক হইতে আসিতেছে ; কিন্তু যখন সে তাহার বেগ দ্বিগুণ করিল, তখন তাহার মনে হইল বায়ু উত্তর-পূর্বদিক হইতে আসিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগ এবং অভিমুখিতা নির্ণয় কর। [C. U. 1943]

মনে কর বায়ুর প্রকৃত বেগ v এবং ইহার অভিমুখিতা দক্ষিণদিকের সহিত পূর্ব অভিমুখিতায় θ কোণে নত।

চিত্র 29

প্রথম ক্ষেত্রে আপেক্ষিক বেগ এবং ঐ ব্যক্তির বেগের অভিমুখিতাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ 90°.

$\therefore \quad \dfrac{v}{\sin 90^\circ}=\dfrac{4}{\sin\theta}$, বা, $v \sin\theta=4$ [$\because \sin 90^\circ=1$] ...(i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বায়ুর আপেক্ষিক বেগ এবং ঐ ব্যক্তির বেগের অন্তর্গত কোণ 135°.

$$\therefore \quad \frac{v}{\sin 135^\circ}=\frac{8}{\sin(45^\circ+\theta)}$$

বা, $v\sin(45^\circ+\theta)=8\sin 135^\circ=\dfrac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$ ... ... (ii)

(i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$\frac{v\sin(45^\circ+\theta)}{v\sin\theta}=\frac{4\sqrt{2}}{4}, \text{ বা, } \frac{\sin(45^\circ+\theta)}{\sin\theta}=\sqrt{2}$$

বা, $$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta}=\sqrt{2}$$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\cot\theta)=\sqrt{2}$, বা, $1+\cot\theta=2$

$\therefore \quad \cot\theta=1, \quad \therefore \quad \theta=45^\circ$

আবার (i) হইতে পাই, $v\sin 45^\circ=4$,

বা, $\dfrac{v}{\sqrt{2}}=4 \quad \therefore \quad v=4\sqrt{2}$ মাইল/ঘণ্টায়।

সুতরাং বায়ুর প্রকৃত বেগ দক্ষিণদিকের সহিত পূর্ব অভিমুখিতায় 45° কোণে নত ঘণ্টায় $4\sqrt{2}$ মাইল; অর্থাৎ উত্তর-পশ্চিমদিক হইতে আগত ঘণ্টায় $4\sqrt{2}$ মাইল।

উদা. 13. ঘণ্টায় 90 কি.মি. বেগে ধাবমান একটি ট্রেনের জানালা হইতে অনুভূমিক রেখায় একটি প্রস্তরখণ্ড নিক্ষেপ করা হইল। যদি প্রস্তরখণ্ডটির আপেক্ষিক বেগের পরিমাণ 5 মি./সেকেণ্ড হয় এবং উহা ট্রেনের গতির দিকের সহিত লম্ব হয়, তবে নিক্ষেপের মুহূর্তে উহার প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

ধরা যাক্ প্রস্তরখণ্ডটির প্রকৃত বেগ u মি./সেকেণ্ড এবং উহা ট্রেনের গতির সহিত θ কোণে নত। এখন প্রশ্নানুসারে, আপেক্ষিক গতিবেগের সহিত প্রকৃতবেগের নতি $90^\circ-\theta$.

আবার যেহেতু প্রকৃত গতিবেগ, আপেক্ষিক গতিবেগ ও ট্রেনের গতিবেগের লব্ধি এবং যেহেতু 90 কি.মি./ঘণ্টা $=25$ মি./সে.,

$$\therefore \quad \frac{u}{\sin 90^\circ}=\frac{5}{\sin\theta}=\frac{25}{\sin(90^\circ-\theta)}$$ (§ 2·9 দেখ)

$$\therefore \quad \frac{25}{5}=\frac{\sin(90^\circ-\theta)}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

বা, $\cot\theta=5, \quad \therefore \quad \theta=\tan^{-1} 1/5$

আবার $\dfrac{u}{\sin 90^\circ}=\dfrac{5}{\sin\theta}$

বা, $u=5 \operatorname{cosec}\theta=5\sqrt{1+\cot^2\theta}=5\sqrt{26}$

∴ প্রকৃত বেগ $5\sqrt{26}$ মিটার/সেকেণ্ড এবং উহা ট্রেনের গতির সহিত $\tan^{-1}(1/5)$ কোণে নত।

উদা. 14. একটি স্টীমার ঘণ্টায় u মাইল বেগে পূর্বাভিমুখে এবং আর একটি স্টীমার পূর্বদিকের সহিত উত্তরাভিমুখে θ-কোণে নত অভিমুখিতায় ঘণ্টায় $2u$ মাইল বেগে যাইতেছিল। প্রথম স্টীমারের একজন যাত্রীর মনে হইল দ্বিতীয় স্টীমারটি উত্তর-পূর্বদিকে যাইতেছে। প্রমাণ কর যে, $\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$. [C. U. '45, '49]

প্রশ্নানুসারে, প্রথম স্টীমারের বেগ এবং প্রথম স্টীমারের সাপেক্ষে দ্বিতীয় স্টীমারের আপেক্ষিক বেগের অন্তর্গত কোণ 45°.

আবার দ্বিতীয় স্টীমারের প্রকৃত বেগ এবং আপেক্ষিক বেগের নতি $45^\circ-\theta$.

$$\therefore \quad \frac{2u}{\sin 45^\circ}=\frac{u}{\sin(45^\circ-\theta)},$$

বা, $\dfrac{\sin(45^\circ-\theta)}{\sin 45^\circ}=\dfrac{1}{2}$

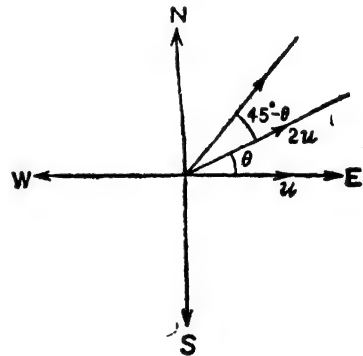
বা, $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta-\sin\theta)}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{1}{2}$

বা, $\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}$.

উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই,

$\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

বা, $1-\sin 2\theta=\frac{1}{4} \quad \therefore \quad \sin 2\theta=\frac{3}{4}$

$\therefore \quad 2\theta=\sin^{-1}\frac{3}{4}$ বা, $\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

চিত্র 30

উদা. 15. একই সময়ে একই স্থান হইতে দুইটি কণা পরস্পর α-কোণে

নত দুইটি সরলরেখায় যাত্রা আরম্ভ করিল। একটি কণা, u-সমবেগে এবং অপর কণাটি স্থির অবস্থা হইতে সমত্বরণ f-এ চলিতে থাকিলে দেখাও যে তাহাদের পরস্পরের সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ $\frac{u \cos \alpha}{f}$ সময় পরে ক্ষুদ্রতম হইবে এবং এই ক্ষুদ্রতম আপেক্ষিক বেগের মান $u \sin \alpha$.

যেহেতু ত্বরণ, বেগের পরিবর্তনের হার, সুতরাং t সময় পরে দ্বিতীয় কণার বেগ $v=ft$. [চতুর্থ অধ্যায় দেখ], সুতরাং কণা দুইটির পরস্পরের সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ w হইলে,

$$w=\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\alpha}=\sqrt{u^2+f^2t^2-2uft\cos\alpha}$$
$$=\sqrt{(ft-u\cos\alpha)^2+u^2-u^2\cos^2\alpha}$$
$$=\sqrt{(ft-u\cos\alpha)^2+u^2(1-\cos^2\alpha)}$$
$$=\sqrt{(ft-u\cos\alpha)^2+u^2\sin^2\alpha}$$

এক্ষণে, যেহেতু t-র কোন মানের জন্যই $(ft-u\cos\alpha)^2$ ঋণাত্মক হইতে পারে না, সুতরাং u-ক্ষুদ্রতম হইবে যখন $(ft-u\cos\alpha)^2=0$,

বা, $ft-u\cos\alpha=0$, বা, $t=\frac{u\cos\alpha}{f}$ হইবে। তখন $w=u\sin\alpha$.

বিকল্প পদ্ধতি :

$w^2=u^2+v^2-2uv\cos\alpha=u^2+f^2t^2-2uft\cos\alpha$.

এক্ষণে w অর্থাৎ w^2-এর ক্ষুদ্রতম মান পাওয়া যাইবে

যখন, $\frac{dw^2}{dt}=0$ এবং $\frac{d^2(w^2)}{dt^2}>0$.

এখন, $\frac{d(w^2)}{dt}=2f^2t-2uf\cos\alpha$

এক্ষণে, $\frac{d(w^2)}{dt}=0$ হইতে পাই $t=\frac{u\cos\alpha}{f}$ এবং তখন $w=u\sin\alpha$.

এবং $\frac{d^2(w^2)}{dt^2}=2f^2$ সর্বদাই ধনাত্মক।

উদা. 16. একটি ট্রেনের গতির অভিমুখের সহিত α-কোণে একটি পিস্তলের গুলি ছোঁড়া হইল। একটি কামরায় প্রবেশ করিয়া গুলিটি ইঞ্জিন হইতে অপেক্ষাকৃত দূরের কোণের মধ্য দিয়া ঢুকিয়া বিপরীত কোণ দিয়া বাহির হইয়া গেল। যদি ট্রেনের গতি ঘণ্টায় u মাইল এবং a ও b (ফুটে) কামরাটির দৈর্ঘ্য

ও প্রস্থ হয়, তবে প্রমাণ কর যে ঐ কামরার মধ্য দিয়া নির্গত হইতে গুলিটির সময় লাগে $\frac{15(b \cot \alpha - a)}{22u}$ সেকেণ্ড।

চিত্র 31

মনে কর ট্রেনের সাপেক্ষে গুলিটির আপেক্ষিক বেগ সেকেণ্ডে w ফুট।

এক্ষণে, w ও u-এর অন্তর্গত কোণ θ হইলে,

$$\tan\theta = \frac{CB}{AB} = \frac{b}{a} \cdots (1)$$

আবার, কামরাটির কর্ণ $AC = b \operatorname{cosec}\theta$.

ঘণ্টায় u মাইল বেগ = সেকেণ্ডে $\frac{u \times 1760 \times 3}{60 \times 60}$ ফুট

= সেকেণ্ডে $\frac{22u}{15}$ ফুট বেগ।

এক্ষণে, গুলিটির প্রকৃত বেগ এবং ট্রেনের গতির অভিমুখিতার অন্তর্গত কোণ α, সুতরাং গুলিটির প্রকৃত বেগ ও আপেক্ষিক বেগের অভিমুখিতার অন্তর্গত কোণ $\theta - \alpha$.

এখন, $\frac{w}{\sin\alpha} = \frac{22u}{15\sin(\theta-\alpha)}$ [যেহেতু গুলির প্রকৃত বেগ, w এবং u-এর লব্ধিবেগ]

বা, $w = \frac{22u}{15} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$ ফুট/সেকেণ্ড $\cdots$(ii)

এক্ষণে, কামরার মধ্য দিয়া যাইতে গুলিটির সময় লাগে

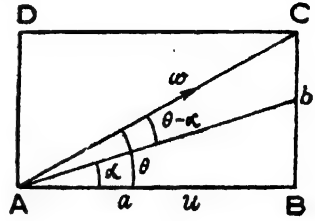
$$= \frac{AC}{w} = \frac{b \operatorname{cosec}\theta}{w} = b \operatorname{cosec}\theta \cdot \frac{15\sin(\theta-\alpha)}{22u\sin\alpha} \text{ [(ii) হইতে]}$$

$$= \frac{15b \operatorname{cosec}\theta}{22u} \cdot \frac{(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{15b \operatorname{cosec}\theta}{22u} \cdot (\sin\theta\cot\alpha - \cos\theta)$$

$$= \frac{15b \operatorname{cosec}\theta}{22u} \cdot \left(\sin\theta\cot\alpha - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \sin\theta\right)$$

$$= \frac{15b \operatorname{cosec}\theta}{22u} \sin\theta (\cot\alpha - \cot\theta) = \frac{15b}{22u}(\cot\alpha - \cot\theta)$$

$$= \frac{15b}{22u}\left(\cot\alpha - \frac{a}{b}\right) \text{ [(i) হইতে]} = \frac{15}{22u}(b\cot\alpha - a) \text{ সেকেণ্ড।}$$

প্রশ্নমালা 2

1. যথাক্রমে ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে ও সেকেণ্ডে 66 ফুট বেগে গতিশীল দুইটি ট্রেনের আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় কর, যখন

(i) ট্রেন দুইটি একই অভিমুখিতায় চলে।

(ii) উহারা বিপরীত অভিমুখিতায় চলে।

2. উলম্ব অভিমুখিতায় 10 মি./সেকেণ্ড বেগে বৃষ্টি পড়িতেছে। কিন্তু একটি চলন্ত ট্রেনের আরোহীর মনে হইতেছে বৃষ্টি উলম্বদিকের সহিত 45° কোণে হেলিয়া পড়িতেছে। ট্রেনটি ঘণ্টায় কত কিলোমিটার বেগে যাইতেছে ?

3. 250 মি. দীর্ঘ দুইটি ট্রেন পরস্পরের অভিমুখে সমান্তরাল পথে চলিতেছে। ট্রেন দুইটির বেগ ঘণ্টায় যথাক্রমে 20 কি. মি. ও 30 কি. মি.। সাক্ষাতের কত সময় পরে উহারা একে অন্যকে অতিক্রম করিবে ?

4. ঘণ্টায় 8 কি. মি. বেগে যাইতে যাইতে এক ব্যক্তির মনে হইল বৃষ্টি ঘণ্টায় 16 কি. মি. বেগে উলম্ব দিকের সহিত 30° কোণে হেলিয়া পড়িতেছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

5. একটি জাহাজ ঘণ্টায় 10 কি.মি. বেগে উত্তর-পূর্বদিকে যাইতেছে এবং এক যাত্রীর মনে হইল বায়ু উত্তর দিক হইতে ঘণ্টায় $10\sqrt{2}$ কি.মি. বেগে আসিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

6. দুই ব্যক্তি যুগপৎ একই স্থান হইতে যাত্রা আরম্ভ করিল। একজন ঘণ্টায় 3 কি. মি. বেগে উত্তরদিকে এবং অপরজন ঘণ্টায় 4 কি. মি. বেগে পূর্বদিকে যাত্রা আরম্ভ করিল। প্রথম জনের সাপেক্ষে দ্বিতীয় জনের আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় কর। 5 ঘণ্টা পরে তাহাদের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

7. ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে চলিলে এক ব্যক্তির মনে হয় বৃষ্টি উলম্বদিকে পড়িতেছে ; কিন্তু যখন তাঁহার বেগ ঘণ্টায় 12 মাইল তখন তাঁহার মনে হইল যে বৃষ্টি 45° কোণে হেলিয়া পড়িতেছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ এবং অভিমুখিতা নির্ণয় কর। [C. U. 1976]

8. কোন একটি মুহূর্তে দুইটি বিমানের দূরত্ব 250 কি. মি. এবং একটি অপরটির পূর্বদিকে ছিল। প্রথম বিমানটি পশ্চিমাভিমুখে ঘণ্টায় 100 কি. মি. বেগে এবং অপরটি দক্ষিণ অভিমুখে ঘণ্টায় 75 কি. মি. বেগে চলিতেছিল। কত সময় পরে তাহাদের দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হইবে ? তাহাদের এই ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় কর।

9. উত্তর-পূর্ব অভিমুখে ভ্রমণরত এক ব্যক্তির মনে হইল বায়ু উত্তর-পূর্বদিক

হইতে আসিতেছে ; কিন্তু ঐ ব্যক্তি যখন তাঁহার গতিবেগ দ্বিগুণিত করিলেন, তখন তাঁহার মনে হইল বায়ু উত্তরদিকের সহিত পূর্ব অভিমুখিতায় (E of N) $\cot^{-1} 2$ কোণে নত হইয়া আসিতেছে। বায়ুর প্রকৃত অভিমুখিতা নির্ণয় কর।

10. সেকেণ্ডে 10 মিটার বেগে অনুভূমিক রেখায় নিক্ষিপ্ত একটি প্রস্তর-খণ্ড ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে ধাবমান একটি ট্রেনকে আঘাত করিল। প্রস্তর খণ্ডটি ট্রেনের অভিমুখিতার সহিত সমকোণে নিক্ষিপ্ত হইলে কি পরিমাণ বেগে এবং কি অভিমুখিতায় প্রস্তরখণ্ডটি ট্রেনটিকে আঘাত করিল মনে হইবে ?

11. পরস্পর 60° কোণে নত দুইটি রাস্তায় গতিশীল দুইটি গাড়ী রাস্তা দুইটির সংযোগস্থলের দিকে অগ্রসর হইতেছে। যদি উহাদের বেগ ঘণ্টায় $12\frac{1}{2}$ এবং 20 মাইল এবং উহাদের ঐ সংযোগস্থল হইতে দূরত্ব যথাক্রমে 350 ও 200 গজ হয়, তবে (i) উহাদের আপেক্ষিক বেগ এবং (ii) উহাদের দূরত্ব যখন ক্ষুদ্রতম তখন রাস্তা দুইটির সংযোগস্থল হইতে উহাদের দূরত্ব দুইটি নির্ণয় কর।

12. পরস্পর α কোণে নত দুইটি সরলরেখায় দুইটি বিন্দু যথাক্রমে u এবং $2u$ বেগে চলিতেছে। প্রথম বিন্দুটির সাপেক্ষে দ্বিতীয় বিন্দুটির আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় কর।

13. একটি সাবমেরিন ঘণ্টায় 10 কি. মি. বেগে A হইতে দক্ষিণ পশ্চিম অভিমুখে যাত্রা করিল। একই সময়ে A-র 20 কি. মি. দক্ষিণে অবস্থিত একটি স্থান হইতে একটি ডেস্ট্রয়ার ঘণ্টায় 25 কি. মি. বেগে যাত্রা করিল। ডেস্ট্রয়ার কোন্‌দিকে চলিলে সাবমেরিনটিকে আঘাত করিতে পারিবে ?

14. একটি বিমানের অভিমুখিতা ও বায়ুর অভিমুখিতার অন্তর্গত কোণ θ. বায়ুর সাপেক্ষে বিমানের বেগ v এবং বায়ুর বেগ $V(<v)$ হইলে বিমানের গতিপথ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, বিমানের প্রকৃত বেগ $V\cos\theta + \sqrt{v^2 - V^2\sin^2\theta}$.

15. এক ব্যক্তি সাইকেলে চড়িয়া ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে উত্তর অভিমুখে যাত্রা করিল এবং তাহার উত্তর ও পূর্বদিকের মধ্যবর্তী একস্থান হইতে ঘণ্টায় 6 কি.মি. বেগে বায়ু প্রবাহিত হইতেছিল। ঐ ব্যক্তির মনে হইল বায়ু উত্তর-দিকের সহিত পূর্বদিকে 15° কোণে নত হইয়া আসিতেছে।

(i) বায়ুর প্রকৃত অভিমুখিতা এবং

(ii) একই বেগে প্রত্যাবর্তন করিলে তাঁহার সাপেক্ষে বায়ুর অভিমুখিতা নির্ণয় কর।

16. 15 নট্‌ সমবেগে পূর্বাভিমুখে গতিশীল একটি জাহাজ হইতে

26 নট্ সমদ্রুতিতে আগত একটি জাহাজকে তোমার 6 মাইল দক্ষিণে মনে হইল। পরে উহাকে তোমার জাহাজ অতিক্রম করিয়া পশ্চাতে চলিয়া গেল। তোমার জাহাজ হইতে ইহার ক্ষুদ্রতম দূরত্ব 3 মাইল হইলে,

(i) দ্বিতীয় জাহাজটির গতিপথ.

(ii) দক্ষিণদিকে জাহাজটির প্রথম অবস্থান হইতে তোমার জাহাজের সহিত যে অবস্থানে উহার দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হইয়াছিল, সেই অবস্থানে যাইতে কত সময় লাগিয়াছিল? [1 নট্ (knott)=6080 ফুট/ঘণ্টা।]

17. এক ব্যক্তি প্যারাসুটে উল্লম্ব রেখায় নামিতেছিল এবং তাহার বেগ v_1 ও v_2 হইলে তাহার মনে হইল বৃষ্টি উল্লম্বরেখার সহিত যথাক্রমে α ও β কোণে হেলিয়া পড়িতেছে। দেখাও যে বৃষ্টি প্রকৃতপক্ষে উল্লম্বরেখার সহিত θ কোণে হেলিয়া পড়িলে $(v_2-v_1)\cot\theta=v_2\cot\alpha-v_1\cot\beta$.

18. স্থিরবাতাসে একটি বিমানের বেগ ঘণ্টায় 80 মাইল; একটি বিমান A স্থান হইতে A-র উত্তর-পূর্বদিকে 200 মাইল দূরের একস্থান B অভিমুখে ধাবমান হইল। যদি বায়ু উত্তর দিক হইতে ঘণ্টায় 20 মাইল বেগে প্রবাহিত হয়, তবে কি অভিমুখে বিমানটি যাত্রা করিবে এবং তাহার B স্থানে পৌঁছাইতে কত সময় লাগিবে? যদি এক ঘণ্টা পরে বায়ুর বেগ হ্রাস হইয়া ঘণ্টায় 5 মাইল হয়, তবে যে সময়ে বিমানটির B স্থানে পৌঁছিবার কথা, সেই সময়ে B র সাপেক্ষে বিমানটির অবস্থান নির্ণয় কর।

19. ঘণ্টায় 36 কি.মি. বেগে ধাবমান একটি ট্রেন হইতে অনুভূমিক রেখায় জানালার বাহিরে একটি বল ছোঁড়া হইল। বলটির বেগের পরিমাণ সেকেণ্ডে 7·5 মিটার এবং উহার অভিমুখিতা ট্রেনের গতির অভিমুখিতার সহিত 90° হইলে ট্রেনের সাপেক্ষে বলটির বেগ নির্ণয় কর। (ছোঁড়ার মুহূর্তে).

20. ঘণ্টায় 30 কি. মি. বেগে উত্তরাভিমুখে গতিশীল একটি ট্রেনের আরোহীর মনে হইল বায়ু উত্তরদিকের সহিত পূর্ব অভিমুখে 15° (15° E of N) কোণে নত হইয়া আসিতেছে। একই সময় ঘণ্টায় $15(\sqrt{3}-1)$ কি. মি. বেগে পূর্ব অভিমুখে গতিশীল আর একটি মটর গাড়ীর আরোহীর মনে হইল বায়ু পূর্বদিকের সহিত উত্তর অভিমুখে 15° (15° N of E) কোণে নত হইয়া আসিতেছে। বায়ুর প্রকৃত অভিমুখিতা নির্ণয় কর।

21. একটি নদীর স্রোতের বেগ দক্ষিণ অভিমুখে ঘণ্টায় 6 কি. মি. এবং ঐ নদীতে একটি জাহাজ ঘণ্টায় 15 কি. মি. বেগে পশ্চিমাভিমুখে যাইতেছিল।

উত্তরাভিমুখে ঘণ্টায় 30 কি. মি. বেগে ধাবমান একটি ট্রেনের ঐ জাহাজের সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় কর। [C. U. 1968]

22. একদল লোক পরপর 20 গজ ব্যবধানে ঘণ্টায় 8 কি. মি. বেগে পদব্রজে এবং একই দিকে অপর একদল লোক সাইকেলে চড়িয়া ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে পরপর 30 গজ ব্যবধানে যাইতেছিল। অপর এক ব্যক্তি কি গতিতে বিপরীত দিকে যাইলে সে সর্বদা যুগপৎ একজন পদাতিক এবং একজন সাইকেল আরোহীর সহিত মিলিত হইবে?

23. দুইটি কণা P ও Q একই সময়ে একটি বিন্দু O হইতে স্থির অবস্থা হইতে দুইটি বিভিন্ন অভিমুখিতায় যথাক্রমে সমবেগে এবং সমত্বরণে যাত্রা করিল। প্রমাণ কর যে, সর্বদাই P-র মনে হইবে যে Q, QR-এর সমান্তরাল রেখায় চলিতেছে (R, OP-র মধ্যবিন্দু)।

24. কোন এক সময়ে একই সমতলে সমবেগে গতিশীল দুইটি বিন্দুর দূরত্ব d; বিন্দু দুইটির আপেক্ষিক বেগ V এবং u ও v যথাক্রমে d-এর অভিমুখিতায় ও উহার লম্ব অভিমুখিতায় V-র বিশ্লেষিতাংশ। প্রমাণ কর যে ঐ বিন্দু দুইটির ক্ষুদ্রতম দূরত্ব $d.\frac{v}{V}$ এবং ঐ ক্ষুদ্রতম দূরত্বে আসিতে তাহাদের সময় লাগে $d.\frac{u}{V^2}$.

চতুর্থ অধ্যায়

সরলরেখায় গতি
(Motion Along A Straight Line)

§ 4·1. বেগের পরিবর্তন : সরলরেখায় গতি :

দ্বিতীয় অধ্যায়ে সংক্ষেপে ত্বরণ সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। বেগের পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলা হয় এবং দ্বিতীয় অধ্যায়ে সমবেগের ন্যায় সমত্বরণের সামান্তরিক সূত্র প্রমাণ করা হইয়াছে। ঐ অধ্যায়ে আরও দেখান হইয়াছে যে বক্রপথে গতিশীল কোন কণার সমবেগ থাকিতে পারে না কিন্তু সমদ্রুতি থাকা সম্ভব। সরলরেখায় গতিশীল কোন কণার বেগের পরিবর্তনের অর্থ বেগের মান পরিবর্তন। কোন কণা অসমবেগে গতিশীল হইলে উহাকে ত্বরণসহ গতিশীল বলা হয়।

যদি সমান অবকাশে (interval) যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন, কোন কণার বেগের সমান পরিবর্তন হয়, তবে বলা হয় বস্তুটি সমত্বরণে (uniform acceleration-এ) গতিশীল। বেগের ন্যায় ত্বরণও একটি ভেক্টররাশি অর্থাৎ ত্বরণেরও পরিমাপ, দিক ও অভিমুখিতা আছে। সরলরেখায় গতিশীল কণার বেগের পরিবর্তন বলিতে বেগের বৃদ্ধি বা হ্রাস উভয়ই বুঝায়। যখন বেগের হ্রাস হয়, তখন ত্বরণকে **মন্দন** (Retardation) বলা হয়। সুতরাং মন্দনকে ঋণাত্মক ত্বরণ বলা চলে। মনে রাখিবে ত্বরণ বলিতে মন্দনও বুঝায়, কিন্তু মন্দন কেবলমাত্র ঋণাত্মক ত্বরণ বা বেগের হ্রাসের হারকে বুঝায়। বর্তমান অধ্যায়ে অন্য কিছু বলা না থাকিলে বস্তুর ত্বরণ বলিতে সমত্বরণ বুঝাইবে। এক্ষণে, সমত্বরণে সরলরেখায় গতিশীল কণার বেগ, ত্বরণ, অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং দূরত্ব অতিক্রমের সময় প্রভৃতির পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করা হইবে। ত্বরণের কারণ, বা গতির নিয়ন্ত্রক বল সম্বন্ধে এই অধ্যায়ে কোন আলোচনা হইবে না; অর্থাৎ এই অধ্যায়ের আলোচ্য সরলরেখায় গতি বিষয়ে স্থিতিবিদ্যা (kinematics).

§ 4·2. (*a*) t মুহূর্তে বেগ (velocity at time t) :

মনে কর একটি কণা, $\overrightarrow{OX}$ রেখায় গতিশীল এবং O এই রেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। মনে কর O বিন্দু গতিশীল কণাটির প্রাথমিক বা $t=0$ ক্ষণে অবস্থান এবং যাত্রার t সময় পরে O বিন্দু হইতে কণার অবস্থান P বিন্দুতে ও $OP=x$.

আবার মনে কর পরবর্তী ক্ষুদ্র অবকাশ δt-পরে কণাটির অবস্থান Q বিন্দুতে এবং $OQ=x+\delta x$.

সুতরাং $OP=x$, $OQ=x+\delta x$ এবং $PQ=\delta x$.

সুতরাং δt সময়ে কণাটির সরণের পরিমাণ হইল δx এবং ঐ সময়ে গড় বেগ হইল $\frac{\delta x}{\delta t}$.

এই অনুপাত $\frac{\delta x}{\delta t}$-র সীমাস্থ মানকে অর্থাৎ $\lim\limits_{\delta t\to 0}\frac{\delta x}{\delta t}$-কে কণাটির t মুহূর্তের বেগ বলা হয়।

সুতরাং t মুহূর্তে কণাটির বেগ v হইলে, $v=\underset{\delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\delta x}{\delta t}=\frac{dx}{dt}$.

অনেক সময় সংক্ষেপে $\frac{dx}{dt}$-কে $\dot{x}$ লেখা হয়।

দ্রষ্টব্য 1. $\frac{dx}{dt}$ সর্বদা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে বেগ নির্দেশ করে; $\frac{dx}{dt}$-র ঋণাত্মক মান x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে বেগ নির্দেশ করিবে।

দ্রষ্টব্য 2. $\frac{dx}{dt}=$ ধ্রুবক হইলে (অর্থাৎ সময় নিরপেক্ষ হইলে), কণাটির x-অক্ষে সমবেগে গতি হইবে।

(*b*) **t-মুহূর্তে ত্বরণ (Acceleration at time t) :**

মনে কর কণাটির P বিন্দুতে বেগ v এবং Q বিন্দুতে বেগ $v+\delta v$.

সুতরাং ঐ ক্ষুদ্র অবকাশ δt-এ কণাটির বেগের পরিবর্তন হইয়াছে δv.

সুতরাং δt সময়ে কণাটির গড় ত্বরণ $\frac{\delta v}{\delta t}$.

$f=\lim\limits_{\delta t\to 0}\frac{\delta v}{\delta t}=\frac{dv}{dt}$-কে সংজ্ঞানুসারে কণাটির t মুহূর্তের ত্বরণ বলা হয়।

এক্ষণে $v=\frac{dx}{dt}$, $\quad\therefore\quad f=\frac{d}{dt}(v)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}$

অনেক সময় $\frac{d^2x}{dt^2}$-কে সংক্ষেপে $\ddot{x}$ লেখা হয়।

আবার $f=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot v$.

সুতরাং যে কোন t-মুহূর্তে কোন কণার ত্বরণকে

(i) $\frac{dv}{dt}$, (ii) $\frac{d^2x}{dt^2}$ এবং (iii) $v\frac{dv}{dx}$-এর যে কোনটি দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

ইহাদের কোন্‌টি কখন ব্যবহার করিতে হইবে, তাহা কি নির্ণয় করিতে হইবে, তাহার উপর নির্ভর করিবে।

উদাহরণস্বরূপ x, v ও f-এর মধ্যে কোন সম্পর্ক নির্ণয়ের জন্য f-কে $v\frac{dv}{dx}$ দ্বারা প্রকাশ করা সুবিধাজনক।

দ্রষ্টব্য : $\frac{d^2x}{dt^2}$=ধ্রুবক বা সময় নিরপেক্ষ হইলে কণাটি সমত্বরণে গতিশীল হইবে। যখন $\frac{d^2x}{dt^2}=0$, তখন কণাটি সমবেগে গতিশীল হয়।

§ 4·3. **উদাহরণ :—**

1. একটি সরলরেখায় গতিশীল কোন কণার ঐ সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে যাত্রার t সময় পরে দূরত্ব (সেন্টিমিটারে) $s=t^3-4t-4$.

3 সেকেণ্ড পরে কণাটির বেগ এবং 5 সেকেণ্ড পরে উহার ত্বরণ নির্ণয় কর।

এক্ষণে, $v=\frac{ds}{dt}=3t^2-4$ ... ... (i)

এবং $f=\frac{d^2s}{dt^2}=6t$ ... . (ii)

[ত্বরণ t-নিরপেক্ষ না হওয়ায়, কণাটি অসম ত্বরণে গতিশীল]

এক্ষণে (i) ও (ii)-এ যথাক্রমে $t=3$ ও 5 বসাইয়া পাই,

নির্ণেয় বেগ $=3.3^2-4=23$ সে.মি./সেকেণ্ড

এবং নির্ণেয় ত্বরণ $=6.5=30$ সে.মি./সেকেণ্ড^2.

2. $\vec{OA}$ রেখায় গতিশীল একটি কণার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে যাত্রার t সময় পরে দূরত্ব $x=(t^3-2t-16)$ ফুট। O বিন্দু হইতে কণাটির দূরত্ব যখন 5 ফুট, তখন কণাটির ত্বরণ নির্ণয় কর।

মনে কর যাত্রার t সেকেণ্ড পরে কণাটির O বিন্দু হইতে দূরত্ব 5 ফুট।

সুতরাং $x=5$ ধরিয়া পাই, $t^3-2t-16=5$

বা, $t^3-2t-21=0$, বা, $(t-3)(t^2+3t+7)=0$

$\therefore$ $t=3$ বা, $t^2+3t+7=0$ অর্থাৎ $t=\frac{-3\pm\sqrt{-19}}{2}$.

t-এর কাল্পনিক মান অগ্রাহ্য করিয়া পাওয়া গেল $t=3$ সেকেণ্ড।

এক্ষণে, $x=t^3-2t-16$

$\therefore$ $\frac{dx}{dt}=3t^2-2$ ... ... (i) এবং $\frac{d^2x}{dt^2}=6t$

সুতরাং 3 সেকেণ্ড পরে (অর্থাৎ O বিন্দু হইতে কণাটির দূরত্ব যখন 5 ফুট) কণাটির ত্বরণ $6 \times 3 = 18$ ফুট/সেকেণ্ড^2 ।

3. t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 63t - 6t^2 - t^3$ হইলে 2 সেকেণ্ড পরে বেগ এবং কণাটি স্থির হইবার পূর্বে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [C. U. 1958]

একণে $s = 63t - 6t^2 - t^3$; $v = \dfrac{ds}{dt} = 63 - 12t - 3t^2$

সুতরাং 2 সেকেণ্ড পরে কণাটির বেগ $63 - 12.2 - 3.2^2$

$= 63 - 24 - 12 = 27$ একক/সেকেণ্ড

আবার কণাটির স্থির হওয়ার অর্থ উহার বেগ শূন্য হওয়া।

সুতরাং $\dfrac{ds}{dt} = 0$ হইলে,

$$63 - 12t - 3t^2 = 0 \quad \text{বা,} \quad t^2 + 4t - 21 = 0$$

বা, $(t+7)(t-3) = 0$, $\therefore$ $t = -7$ বা 3.

কিন্তু সময় ঋণাত্মক হইতে পারে না। $\therefore$ $t = 3$

অর্থাৎ 3 সেকেণ্ড পরে কণাটি স্থির হইবে।

একণে $s = 63t - 6t^2 - t^3$ সম্পর্কে $t = 3$ বসাইয়া পাই নির্ণেয় অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 63.3 - 6.3^2 - 3^3 = 108$ একক দৈর্ঘ্য।

4. (i) $v^2 = 1 - x^2$ এবং (ii) $v^2 = 6a(x \sin x + \cos x)$ হইলে ত্বরণ নির্ণয় কর।

(i) $v^2 = 1 - x^2$. উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই, $2v\dfrac{dv}{dx} = -2x$. $\therefore$ $v\dfrac{dv}{dx} = -x$. বা, $f = -x$.

সুতরাং $x > 0$ হইলে $f < 0$ অর্থাৎ ত্বরণ O বিন্দুর দিকে।

আবার $x < 0$ হইলে $f > 0$ অর্থাৎ ত্বরণের অভিমুখিতা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে অর্থাৎ কণাটি x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে অবস্থিত হইলে উহার ত্বরণ O বিন্দুর দিকে।

সুতরাং সর্বদা ত্বরণের অভিমুখিতা O বিন্দুর দিকে এবং পরিমাণ O বিন্দু হইতে দূরত্বের সমান।

(ii) $v^2 = 6a(x \sin x + \cos x)$.

উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$2v\frac{dv}{dx} = 6a(x \cos x + \sin x - \sin x) = 6a.x.\cos x.$$

$\therefore \quad f=v\frac{dv}{dx}=3a.x.\cos x.$

এক্ষণে $f>0$ যখন $x>0$ এবং $f<0$ যখন $x<0$.

সুতরাং ত্বরণের অভিমুখিতা সর্বদা O-বিন্দু হইতে অপসারী।

5. কোন সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার t সময়ে ঐ সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে কণাটির দূরত্ব x এবং তখন কণাটির বেগ v হইলে $x=\frac{1}{2}vt$ হয়। প্রমাণ কর যে কণাটি সমত্বরণে গতিশীল।

$$x=\tfrac{1}{2}vt,$$

বা, $x=\frac{1}{2}t\frac{dx}{dt}$ $\left[v=\frac{dx}{dt}\text{ লিখিয়া}\right]$ বা, $\frac{2dt}{t}=\frac{dx}{x}.$

উভয়পক্ষের সমাকলন করিয়া পাই,

$2\log t=\log x-\log c$ (c একটি ধ্রুবক]

বা, $\log x=\log t^2+\log c=\log ct^2. \quad \therefore \quad x=ct^2.$

$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=2ct$ এবং $\frac{d^2x}{dt^2}=2c.$

সুতরাং কণাটির ত্বরণ ধ্রুবক অর্থাৎ কণাটি সমত্বরণে গতিশীল।

6. কোন সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার ঐ সরলরেখায় একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে দূরত্ব x হইলে, কণাটির বেগ হয় $\mu\sqrt{\frac{c-x}{x}}$.

প্রমাণ কর যে কণাটির ত্বরণ সর্বদা O বিন্দুর অভিমুখে এবং উহার পরিমাপ O বিন্দু হইতে দূরত্বের বর্গের সহিত ব্যস্ত-সমানুপাতিক।

এখানে $v=\mu\sqrt{\frac{c-x}{x}}, \quad \therefore \quad v^2=\mu^2\frac{c-x}{x}=\frac{c\mu^2}{x}-\mu^2$

উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই, $2v\frac{dv}{dx}=-\frac{c\mu^2}{x^2}$

$\therefore \quad f=v\frac{dv}{dx}=-\frac{c\mu^2}{2x^2}\propto\frac{1}{x^2}.$

এক্ষণে v-র বাস্তব মানের জন্য x সর্বদা ধনাত্মক। সুতরাং f সর্বদা ঋণাত্মক।

অতএব ত্বরণের অভিমুখিতা O বিন্দুর দিকে এবং উহার পরিমাপ সর্বদা O বিন্দু হইতে কণাটির দূরত্বের বর্গের সহিত ব্যস্ত-সমানুপাতিক।

§ 4·4. সমত্বরণে সরলরেখায় গতি (Motion along a straight line with uniform acceleration).

পূর্ব অধ্যায়ে কোন বস্তু বা কণার সমবেগে গতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। এক্ষণে, বস্তুটি বা কণাটির সমবেগে গতি না হইলে উহার গতি ত্বরণ-বিশিষ্ট হইবে। বর্তমান অনুচ্ছেদে সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল কোন কণার বেগ, ত্বরণ, কোন অবকাশ t-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং ঐ অবকাশ t-এর মধ্যে কয়েকটি মৌল সম্পর্ক প্রমাণসহ উল্লেখ করা হইতেছে।

একটি কণা কোন সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল। উহার গতিকালের কোন অবকাশ t-র প্রথমে ও শেষে কণাটির বেগ যথাক্রমে u ও v এবং ঐ অবকাশে অতিক্রান্ত দূরত্ব s হইলে

$$\text{(i)}\quad \mathbf{v=u+ft}\quad \text{(ii)}\quad \mathbf{s=ut+\tfrac{1}{2}ft^2}\quad \text{(iii)}\quad \mathbf{v^2=u^2+2fs}.$$

মনে কর কণাটি $\overrightarrow{OA}$ রেখায় গতিশীল এবং ঐ সরলরেখার O এবং P বিন্দু দুইটি যথাক্রমে t-অবকাশের প্রথমে এবং শেষে কণাটির অবস্থান। সুতরাং $OP=s$.

যে-কোন সময় t-এ কণাটির বেগ ও ত্বরণ যথাক্রমে $\dfrac{ds}{dt}$ এবং $\dfrac{dv}{dt}$

যেহেতু কণাটি সমত্বরণে গতিশীল, সুতরাং $\dfrac{dv}{dt}=f$ হইলে, f একটি ধ্রুবক।

এক্ষণে, $\dfrac{dv}{dt}=f\cdots\cdots(1)$ বা, $dv=fdt$,

উভয়পক্ষের সমাকলন করিয়া পাই,

$$v=ft+c\cdots\cdots(2)$$

এক্ষণে, শর্তানুসারে, $t=0$ হইলে $v=u$, $\therefore\quad u=c.$

সুতরাং $\mathbf{v=u+ft}\cdots\cdots(3)$

আবার, $\dfrac{ds}{dt}=v=u+ft$, বা, $ds=(u+ft)dt$

উভয়পক্ষের সমাকলন করিয়া পাই, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2+c'\cdots\cdots(4)$

এক্ষণে, যখন $t=0$, তখন $s=0$, $\therefore\quad c'=0.$

$\therefore$ (4) হইতে পাই, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2.$

আবার, $v\dfrac{dv}{ds}=f$, বা, $vdv=fds$,

উভয়পক্ষের সমাকলন করিয়া পাই, $\frac{1}{2}v^2=fs+c_1\cdots\cdots(5)$

এক্ষণে, শর্তানুসারে $s=0$ হইলে $v=u$.

সুতরাং (5) হইতে পাই $\frac{1}{2}u^2=C_1$

সুতরাং $v^2=u^2+2fs$ ····(6).

অনুসিদ্ধান্ত 1. কণাটির ত্বরণটি মন্দন হইলে f-এর স্থানে $-f$ বসাইয়া উপরের সূত্রগুলি নিম্নলিখিত আকারে পাওয়া যায়,

(1) $v=u-ft$

(2) $s=ut-\frac{1}{2}ft^2$. (3) $v^2=u^2-2fs$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. একটি সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল কোন কণার কোন অবকাশ t-এ গড় বেগ v হইলে,

$$v=\frac{s}{t}=\frac{ut+\frac{1}{2}ft^2}{t}=u+\frac{1}{2}ft=u+f\frac{t}{2}$$

$$=\frac{2u+ft}{2}=\frac{u+u+ft}{2}=\frac{u+v}{2}.$$

সুতরাং গড় বেগ, $\frac{t}{2}$ অবকাশের শেষে বেগ অথবা t অবকাশের প্রথমে এবং শেষে কণাটির বেগ দুইটির সমান্তরীয় মধ্যক।

§ 4·5. t-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথ

মনে কর একটি সরলরেখায় সমত্বরণ f-এ গতিশীল কোন কণার প্রারম্ভিক বেগ u.

মনে কর কণাটির যাত্রার পর t-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথ s_t.

এক্ষণে, $s_t=$(t সময়ে অতিক্রান্ত পথ) $-$ {($t-1$) সময়ে অতিক্রান্ত পথ}

$$=(ut+\tfrac{1}{2}ft^2)-\{u(t-1)+\tfrac{1}{2}f(t-1)^2\}$$

$$=ut+\tfrac{1}{2}ft^2-ut+u-\tfrac{1}{2}ft^2+ft-\tfrac{1}{2}f$$

$$=u+ft-\tfrac{1}{2}f=u+\tfrac{1}{2}f(2t-1).$$

এক্ষণে, প্রথম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথ $=u+\frac{1}{2}f$

দ্বিতীয় সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথ $=u+\frac{3}{2}f$

তৃতীয় সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথ $=u+\frac{5}{2}f$ ইত্যাদি।

সুতরাং পর পর বিভিন্ন সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথসমূহ একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে এবং এই সমান্তর শ্রেণীর সাধারণ অন্তর f.

উদাহরণ 1. নীচের উদাহরণগুলিতে f ধ্রুবক অর্থাৎ কণাটি সমত্বরণে গতিশীল।

(i) $u=5, f=2, t=3$ (সি. জি. এস্ এককে) হইলে s নির্ণয় কর।

(ii) $u=2, f=\frac{1}{2}, t=4$ (এফ্. পি. এস্. এককে) হইলে v এবং s নির্ণয় কর।

(iii) $u=10$ মি/সেকেণ্ড, $f=-1$ সে. মি./সেকেণ্ড^2, $t=5$ সেকেণ্ড হইলে এবং অন্তিমবেগ v কি. মি./ঘণ্টা হইলে, v নির্ণয় কর।

(iv) $u=6, v=4, s=10$ (সি. জি. এস্. এককে) হইলে, f এবং t নির্ণয় কর।

(i) $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্রে, $u=5, f=2$ এবং $t=3$ বসাইয়া পাই,
নির্ণেয় $s=5\times3+\frac{1}{2}\times2\times3^2=24$ সে. মি.

(ii) $v=u+ft$ সূত্র হইতে পাই
নির্ণেয় $v=2+\frac{1}{2}\times4=2+2=4$ ফুট/সেকেণ্ড।

আবার $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে পাই,
নির্ণেয় $s=2\times4+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4^2=8+4=12$ ফুট।

(iii) $v=u+ft.$

এক্ষণে $u=10$ মি./সেকেণ্ড $=1000$ সে. মি./সেকেণ্ড

$\therefore\quad v=1000+(-1)\times5=1000-5=995$ সে. মি./সেকেণ্ড

$=\dfrac{995\times60\times60}{100\times1000}$ কি. মি./ঘণ্টা $=35{\cdot}82$ কি. মি./ঘণ্টা।

(iv) $v^2=u^2+2fs.$

এখানে $u=6, v=4, s=10.$

$\therefore\quad 4^2=6^2+2f.10,$ বা, $16-36=20f,\quad\therefore\quad f=-1.$

$\therefore$ নির্ণেয় মন্দন $=1$ সে. মি./সেকেণ্ড^2।

এক্ষণে, $v=u+ft.\quad\therefore\quad 4=6+(-1).t,$ বা, $t=2$ সেকেণ্ড।

উদা. 2. একটি বস্তু স্থির অবস্থা হইতে 2 সে. মি./সেকেণ্ড^2 ত্বরণসহ যাত্রা করিল ; যাত্রারম্ভের পর প্রথম সেন্টিমিটার অতিক্রম করিতে উহার কত সময় লাগে এবং ঐ মুহূর্তে তাহার গতিবেগ নির্ণয় কর।

এখানে $u=0, f=2$ সে. মি./সেকেণ্ড^2.

মনে কর যাত্রার পর প্রথম সেন্টিমিটার অতিক্রম করিতে তাহার সময় লাগে t.

সুতরাং $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে পাই, $1=0\times t+\frac{1}{2}.2t^2=t^2$

$\therefore\quad t^2=1,$ বা, $t=\sqrt{1}=1$ সেকেণ্ড।

আবার নির্ণেয় বেগ $v=u+ft=0+2\times1=2$ সে.মি./সেকেণ্ড।

উদা. 3. 50 ফুট পথ অতিক্রম কালে একটি গাড়ির গতিবেগ সমহারে 10 ফু./সেকেণ্ড হইতে 20 ফুট/সেকেণ্ড হইল। ত্বরণ নির্ণয় কর।

এক্ষণে $u=10$ ফুট/সেকেণ্ড ; $v=20$ ফুট/সেকেণ্ড ; $s=50$ ফুট এবং f নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে, $v^2=u^2+2fs$ সূত্র হইতে পাই,

$$20^2=10^2+2\times f\times 50,$$

বা, $400=100+100f$; বা, $100f=300$.

$\therefore$ $f=3$ ফুট/সেকেণ্ড^2.

উদা. 4. একটি কণার প্রারম্ভিক বেগ 2 সে. মি./সেকেণ্ড এবং ত্বরণ 4 সে.মি./সেকেণ্ড^2 হইলে যাত্রারম্ভের পর 12 সে. মি. পথ অতিক্রম করিতে কণাটির কত সময় লাগিবে নির্ণয় কর।

এখানে $u=2$ সে. মি./সেকেণ্ড ; $f=4$ সে. মি./সেকেণ্ড^2.

মনে কর নির্ণেয় সময় t সেকেণ্ড,

সুতরাং $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে পাই,

$$12=2t+\tfrac{1}{2}\times 4\times t^2, \quad \text{বা,} \quad 12=2t+2t^2$$

বা, $2t^2+2t-12=0$, বা, $t^2+t-6=0$

বা, $(t+3)(t-2)=0$, $\therefore$ $t=-3$ বা 2.

t-র ঋণাত্মক মান অগ্রাহ্য করিয়া পাই, নির্ণেয় সময়=2 সেকেণ্ড।

উদা. 5. একটি টার্গেটের 3 ইঞ্চি ভেদ করিতে একটি গুলির বেগ অর্ধেক হ্রাস পাইল, গুলিটি আর কয় ইঞ্চি ভেদ করিবে? [C. U. '43]

মনে কর গুলিটির প্রারম্ভিক বেগ সেকেণ্ডে u ইঞ্চি।

এক্ষণে, যেহেতু গুলিটির বেগের হ্রাস হয়, সুতরাং উহার ত্বরণ এক্ষেত্রে ঋণাত্মক বা মন্দন। মনে কর গুলিটির মন্দন f ইঞ্চি/সেকেণ্ড^2. 3″ ভেদ করিবার পর বেগের অর্ধেক হ্রাস হওয়ায় এখানে $v=\frac{u}{2}$.

সুতরাং $v^2=u^2-2fs$ (ঋণাত্মক চিহ্নটি লক্ষ্য কর)

সূত্র হইতে পাই, $\dfrac{u^2}{4}=u^2-2f.3$

$\therefore$ $\dfrac{3u^2}{4}=6f$, বা, $f=\dfrac{u^2}{8}$.

আবার বেগ অর্ধেক হ্রাস হওয়ার পরও গুলিটি বেগশূন্য না হওয়া পর্যন্ত টার্গেটটিকে আরও ভেদ করিবে। সুতরাং যদি গুলিটি টার্গেটটির আরও s ইঞ্চি ভেদ করে,

তবে $0=\frac{u^2}{4}-2f.s$, বা, $s=\frac{u^2}{8f}=\frac{u^2}{8.\frac{u^2}{8}}=1.$

[লক্ষ্য কর এইক্ষেত্রে u-এর মান $\frac{u}{2}$, $v=0$ এবং $f=\frac{u^2}{8}$.]

সুতরাং গুলিটি আর এক ইঞ্চি ভেদ করিবে।

উদা. 6. একটি স্টেশন A হইতে অপর একটি স্টেশন B যাইতে একটি ট্রেনের সময় লাগে 45 মিনিট। A এবং B-র মধ্যবর্তী একটি স্থান C-এ ট্রেনটির বৃহত্তম গতি ঘণ্টায় 45 মাইল হইল। ট্রেনটি A হইতে C পর্যন্ত সমত্বরণে এবং C হইতে B পর্যন্ত সমমন্দনে চলিলে, A স্টেশন হইতে B স্টেশনের দূরত্ব নির্ণয় কর। [C. U. '36]

মনে কর A ও C-র দূরত্ব x মাইল এবং C ও B-র দূরত্ব y মাইল।

আবার মনে কর A হইতে C পর্যন্ত সমত্বরণ f মাইল/ঘণ্টা^{2} এবং A হইতে C স্থানে পৌঁছাইতে সময় লাগে t ঘণ্টা।

সুতরাং $v=u+ft$ সূত্র হইতে পাই,

$$45=0+ft, \quad \therefore \quad f=\frac{45}{t}.$$

আবার $v^2=u^2+2fs$ সূত্র হইতে পাই,

$$45^2=0^2+2fx=2x.\frac{45}{t}, \quad \therefore \quad x=\frac{45t}{2} \text{ মাইল।}$$

এক্ষণে মনে কর C হইতে B পর্যন্ত মন্দন f' মাইল/ঘণ্টা^{2}.

আবার C হইতে B পর্যন্ত যাইতে সময় লাগে 45 মি.$-t$ ঘণ্টা

বা $(\frac{3}{4}-t)$ ঘণ্টা

যেহেতু B স্টেশনে ট্রেনটির গতিবেগ 0,

$$\therefore \quad 0=u-f't=45-f'(\tfrac{3}{4}-t)$$

$$\therefore \quad f'=\frac{45\times 4}{3-4t}=\frac{180}{3-4t}.$$

আবার $v^2=u^2+2fs$ সূত্র হইতে পাই,

$$0=45^2-2f'.y, \quad \therefore \quad y=\frac{45^2}{2f'}=\frac{45^2}{2.\frac{180}{3-4t}}=\frac{45(3-4t)}{8}$$

সুতরাং A স্টেশন হইতে B স্টেশনের দূরত্ব

$$=x+y=\frac{45t}{2}+\frac{45}{8}(3-4t)=\frac{45\times 3}{8}=16\frac{7}{8} \text{ মাইল}$$

উদা. 7. একটি ট্রেন 4 মাইল দূরত্বে অবস্থিত দুইটি স্টেশনে থামে এবং প্রথম স্টেশন হইতে দ্বিতীয় স্টেশনে যাইতে সময় লাগে 8 মিনিট। যদি ট্রেনটি প্রথমে x সমত্বরণে এবং পরে y সমমন্দনে গতিশীল হয়, তবে মাইল ও মিনিটকে যথাক্রমে দূরত্ব ও সময়ের একক ধরিয়া প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8.$$

মনে কর যাত্রার t সময় পরে প্রথম স্টেশন হইতে d মাইল দূরে কোন স্থানে ট্রেনটির সর্বাধিক গতি v মা./মি. হয়।

সুতরাং $v=xt \cdots(1)$ আবার, $0=v-y(8-t)$

বা, $v=y(8-t) \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(2)$

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে পাই,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{t}{v}+\frac{8-t}{v}=\frac{8}{v} \quad \cdots \quad \cdots(3)$$

আবার $v^2=2xd$ এবং $0^2=v^2-2y(4-d)$, বা, $v^2=2y(4-d)$,

$$\therefore \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2d}{v^2}+\frac{8-2d}{v^2}=\frac{8}{v^2} \quad \cdots \quad \cdots(4)$$

সুতরাং (3) ও (4) হইতে পাই,

$$\frac{8}{v}=\frac{8}{v^2} \quad \therefore \quad v=1.$$

সুতরাং (3) হইতে পাই, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{8}{1}=8.$

উদা. 8. 7 মাইল দূরত্বে অবস্থিত দুইটি স্টেশনের একটিতে থামিবার পর একটি ট্রেনকে অপর স্টেশনটিতে থামিতে হয় এবং প্রথমটি হইতে দ্বিতীয়টিতে গিয়া থামিতে ট্রেনটির সময় লাগে 14 মিনিট। যদি ট্রেনটি প্রথমে সমত্বরণে এবং পরে সমমন্দনে যায়, তবে প্রমাণ কর যে, যাত্রাপথে ট্রেনটির সর্বাধিক বেগ হয় ঘণ্টায় 60 মাইল।

উদাহরণ (7)-এর ন্যায় অগ্রসর হইলে পাওয়া যায়,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{v} \text{ এবং } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{v^2}.$$

$v=$ মিনিটে 1 মাইল বা, ঘণ্টায় 60 মাইল।

উদা. 9. একটি কণার একটি পথ অতিক্রমকালে প্রথম ও শেষার্ধ যথাক্রমে f ও f' ত্বরণ লইয়া অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে সমস্ত পথ $\frac{1}{2}(f+f')$ ত্বরণ লইয়া অতিক্রম করিলেও উভয়ক্ষেত্রে একই অন্তিম বেগ হয়।

মনে কর কণাটির প্রারম্ভিক বেগ u এবং সমগ্র পথের দৈর্ঘ্য $2s$.

সুতরাং প্রশ্নানুসারে, পথের প্রথম অর্ধের জন্য

$$v_1^2 = u^2 + 2fs \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \text{(i)}$$

সুতরাং দ্বিতীয়ার্ধের ক্ষেত্রে প্রারম্ভিক বেগ v_1 এবং মনে কর অন্তিম বেগ v_2.

$$\therefore \quad v_2^2 = v_1^2 + 2f's = u^2 + 2fs + 2f's$$
$$= u^2 + 2(f + f')s \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \text{(ii)}$$

এক্ষণে যদি সমত্বরণ f_0 লইয়া সমগ্র পথটি অতিক্রম করিলে কণাটির একই অন্তিমবেগ v_2 হয়, তবে $v_2^2 = u^2 + 2f_0\,(2s) = u^2 + 4f_0\,s \quad \cdots \quad \cdots \text{(iii)}$

এক্ষণে (ii) ও (iii) হইতে পাই, $f_0 = \frac{1}{2}(f + f')$.

উদা. 10. প্রারম্ভিক বেগ u এবং সমত্বরণ f হইলে যদি কোন কণা p-তম, q-তম ও r-তম সেকেণ্ডে যথাক্রমে a, b, c পথ অতিক্রম করে, তবে প্রমাণ কর যে, $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$. [C. U. 1962]

§ 4·7 অনুযায়ী, $a = u + \frac{1}{2}f(2p-1)$

$$b = u + \tfrac{1}{2}f(2q-1)$$
$$c = u + \tfrac{1}{2}f(2r-1).$$

$$\therefore \quad a(q-r) + b(r-p) + c(p-q)$$
$$= u\{(q-r) + (r-p) + (p-q)\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}f\{(2p-1)(q-r) + (2q-1)(r-p) + (2r-1)(p-q)\}$$
$$= u \times 0 + \tfrac{1}{2}f[2\{p(q-r) + q(r-p) + r(p-q)\}$$
$$- \{(q-r) + (r-p) + (p-q)\}]$$
$$= u \times 0 + \tfrac{1}{2}f[2 \times 0 - 0] = 0.$$

উদা. 11. একটি কণা প্রদত্ত প্রারম্ভিক বেগ এবং সমত্বরণে যাত্রা করিল এবং 3 সেকেণ্ডে 81 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করিল; যদি অতঃপর ত্বরণ থামিয়া যায় এবং পরবর্তী 3 সেকেণ্ডে কণাটি 72 ফুট পথ অতিক্রম করে, তবে উহার প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

মনে কর এফ্. পি. এস্. এককে কণাটির প্রারম্ভিক বেগ u এবং সমত্বরণ f.

সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $81 = 3u + \frac{1}{2}f3^2$,

বা, $81 = 3u + \frac{9}{2}f$, বা, $27 = u + \frac{3}{2}f \quad \cdots\cdots \text{(i)}$

আবার, 3 সেকেণ্ড পরে বেগ $v = u + 3f$.

পরবর্তী 3 সেকেণ্ডে কোন ত্বরণ না থাকায় কণাটি v সমবেগে গতিশীল হয় এবং এই সময়ে 72 ফুট পথ অতিক্রম করে।

সুতরাং $72 = v.3 = (u+3f)\times 3$, বা, $24 = u+3f \cdots\cdots$(ii)

এক্ষণে, (i) ও (ii) হইতে পাই,

$$27-24=-\tfrac{3}{2}f, \quad \text{বা}, \quad 3=-\tfrac{3}{2}f$$

$\therefore \quad f=-2$ ফুট/সেকেণ্ড^2.

এবং $24=u+3f=u-6, \quad \therefore \quad u=30$ ফুট/সেকেণ্ড।

সুতরাং নির্ণেয় প্রারম্ভিক বেগ সেকেণ্ডে 30 ফুট এবং সমমন্দন 2 ফুট/সেকেণ্ড^2.

উদা. 12. একটি ট্রেন স্থির অবস্থা হইতে 2·5 মি./সেকেণ্ড^2 ত্বরণসহ যাত্রা করিল। 90 কি. মি./ঘণ্টা গতিবেগ অর্জন করিবার পর উহা সমবেগে চলিতে লাগিল। যাত্রা শুরু করিবার পর 1 কি. মি. পথ অতিক্রম করিতে উহার কত সময় লাগিবে।

ধর, 90 কি. মি./ঘণ্টা গতিবেগ অর্জন করিতে উহার t সেকেণ্ড সময় লাগে।

এখন 90 কি. মি./ঘণ্টা$=\dfrac{90\times 1000}{60\times 60}=25$ মি./ঘণ্টা।

$\therefore \quad 25=2{\cdot}5t \quad \therefore \quad t=10$ সেকেণ্ড

এখন 10 সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথ যদি s মি. হয় তবে

$s=\frac{1}{2}ft^2=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 100=125$ মি.

এখন 1 কি.মি.-125 মি.$=875$ মি.

এই 875 মি. অতিক্রম করিতে ট্রেনটির সময় লাগে $\frac{875}{25}=35$ সেকেণ্ড

নির্ণেয় সময়$=35+10=45$ সেকেণ্ড।

উদা. 13. পর পর দুইটি অবকাশ t_1 ও t_2 সেকেণ্ডে সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা যথাক্রমে s_1 ও s_2 পথ অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে কণাটির ত্বরণ, $2(s_2t_1-s_1t_2)/t_1t_2(t_1+t_2)$

মনে কর নির্ণেয় ত্বরণ f.

এক্ষণে, প্রশ্নানুসারে কণাটি t_1 ও (t_1+t_2) সময়ে যথাক্রমে s_1 ও (s_1+s_2) পথ অতিক্রম করে। সুতরাং কণাটির প্রারম্ভিক বেগ u হইলে.

$$s_1=ut_1+\tfrac{1}{2}ft_1^2 \cdots\cdots \text{(i)}$$

এবং $s_1+s_2=u(t_1+t_2)+\frac{1}{2}f(t_1+t_2)^2 \cdots\cdots$(ii)

এক্ষণে, (i) হইতে, $\dfrac{s_1}{t_1}=u+\frac{1}{2}ft_1 \cdots\cdots$(iii)

এবং (ii) হইতে, $\dfrac{s_1+s_2}{t_1+t_2}=u+\frac{1}{2}f(t_1+t_2) \cdots$(iv)

(iv) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$\frac{s_1+s_2}{t_1+t_2}-\frac{s_1}{t_1}=\tfrac{1}{2}ft_2, \quad \text{বা,} \quad \tfrac{1}{2}ft_2=\frac{s_2t_1-s_1t_2}{t_1(t_1+t_2)}.$$

$$\therefore \quad f=\frac{2(s_2t_1-s_1t_2)}{t_1t_2(t_1+t_2)}.$$

উদা. 14. যদি সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা তিনটি পরপর অবকাশ t_1, t_2, t_3-র প্রত্যেকটিতে সমান পথ অতিক্রম করে, তবে দেখাও যে,

$$\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}=\frac{3}{t_1+t_2+t_3}.$$

মনে কর সমান পথ তিনটির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য d এবং t_1, t_2, t_3 অবকাশ তিনটির প্রারম্ভে কণাটির বেগ যথাক্রমে u, v ও w. সুতরাং কণাটির সমত্বরণে f হইলে, $d=ut_1+\frac{1}{2}ft_1^2$.

$$\text{বা,} \quad \frac{d}{t_1}=u+\tfrac{1}{2}ft_1\cdots\text{(i)}$$

অনুরূপে, $\frac{d}{t_2}=v+\frac{1}{2}ft_2\cdots\text{(ii)}$ এবং $\frac{d}{t_3}=w+\frac{1}{2}ft_3\cdots\text{(iii)}$

আবার $v=u+ft_1$ এবং $w=u+f(t_1+t_2)$.

সুতরাং $\frac{d}{t_2}=u+ft_1+\frac{1}{2}ft_2\cdots\text{(iv)}$

এবং $\frac{d}{t_3}=u+f(t_1+t_2)+\frac{1}{2}ft_3\cdots\text{(v)}$

এক্ষণে (i), (iv) ও (v) হইতে পাই,

$$\frac{d}{t_1}+\frac{d}{t_3}-\frac{d}{t_2}=u+\tfrac{1}{2}ft_1+u+f(t_1+t_2)+\tfrac{1}{2}ft_3$$
$$-(u+ft_1+\tfrac{1}{2}ft_2)$$
$$=u+\tfrac{1}{2}f(t_1+t_2+t_3)\cdots\text{(vi)}$$

আবার সম্পূর্ণ পথ $3d$ কণাটি $(t_1+t_2+t_3)$ সময়ে অতিক্রম করে।

সুতরাং $3d=u(t_1+t_2+t_3)+\frac{1}{2}f(t_1+t_2+t_3)^2$

$$\text{বা,} \quad \frac{3d}{t_1+t_2+t_3}=u+\tfrac{1}{2}f(t_1+t_2+t_3)\cdots\text{(vii)}$$

এক্ষণে, (vi) ও (vii) হইতে পাই,

$$d\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_3}-\frac{1}{t_2}\right)=\frac{3d}{t_1+t_2+t_3}$$

অর্থাৎ $\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}=\frac{3}{t_1+t_2+t_3}$.

উদা. 15. একটি পথকে n-সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করা হইল এবং প্রত্যেক অংশের শেষে একটি গতিশীল কণার ত্বরণ $\frac{f}{n}$ বৃদ্ধি পায়। কণাটির প্রারম্ভিক বেগ $v_0=0$ এবং প্রারম্ভিক ত্বরণ $f_0=f$ হইলে প্রমাণ কর যে, সমগ্র পথটি (s) অতিক্রম করার পর কণাটির গতিবেগ হয় $\sqrt{fs(3-\frac{1}{n})}$.

পথটির প্রত্যেকটি অংশের দৈর্ঘ্য $\frac{s}{n}$.

সুতরাং পথটির r-তম অংশের শেষে কণাটির বেগ $v_r (r=1, 2, 3, \ldots n)$ হইলে,

$$v_r^2=v_{r-1}^2+2f_{r-1}\frac{s}{n}.$$

এক্ষণে, $r=1, 2, \cdots, n$ বসাইয়া পাই,

$$v_1^2=2f_0\frac{s}{n}=2f\frac{s}{n}.$$

$$v_2^2=v_1^2+2f_1\frac{s}{n}=v_1^2+2\left(f+\frac{f}{n}\right)\frac{s}{n}.$$

$$v_3^2=v_2^2+2f_2\frac{s}{n}=v_2^2+2\left(f+\frac{2f}{n}\right)\frac{s}{n}.$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$v_{n-1}^2=v_{n-2}^2+2f_{n-2}\frac{s}{n}=v_{n-2}^2+2\left\{f+f\frac{(n-2)}{n}\right\}\frac{s}{n}.$$

$$v_n^2=v_{n-1}^2+2\left\{f+(n-1)\frac{f}{n}\right\}\frac{s}{n}.$$

যোগ করিয়া পাই,

$$v_n^2=2\frac{s}{n}\left[nf+\frac{f}{n}\left\{1+2+\cdots+(n-1)\right\}\right]$$

$$=\frac{2fs}{n}\left\{n+\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{fs}{n}(2n+n-1)=\frac{fs}{n}(3n-1)=fs\left(3-\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \quad v_n=\sqrt{fs(3-\tfrac{1}{n})}.$$

উদা. 16. দুইটি কণা একই স্থান A হইতে একই সময়ে একই $\overrightarrow{AB}$ রেখায় যাত্রা করিল। প্রথম কণাটি সেকেণ্ডে 40 ফুট সমবেগে এবং দ্বিতীয় কণাটি

প্রারম্ভিক বেগ 16 ফুট/সেকেণ্ড এবং সমত্বরণ 6 ফুট/সেকেণ্ড^2 লইয়া যাত্রা করিলে, কণা দুইটি কত সময় পরে আবার মিলিত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

[C. U. 1965]

মনে কর, কণা দুইটি যাত্রার t সেকেণ্ড পরে যাত্রা-স্থান হইতে s দূরত্বে অবস্থিত কোন স্থানে মিলিত হয়।

সুতরাং যেহেতু প্রথম কণাটি 40 ফুট/সেকেণ্ড সমবেগে গতিশীল ছিল,

$\therefore \quad s=40.t \qquad \cdots$(i)

আবার দ্বিতীয় কণাটির পক্ষে

$s=16t+\frac{1}{2}.6t^2=16t+3t^2 \qquad \cdots$(ii)

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $40t=16t+3t^2$

বা, $3t^2-24t=0$. বা, $t^2-8t=0$.

বা, $t(t-8)=0 \quad \therefore \quad t=0$ বা 8.

এক্ষণে, $t=0$ মানটি যাত্রা-সময় নির্দেশ করে।

সুতরাং নির্ণেয় সময় 8 সেকেণ্ড অর্থাৎ কণা দুইটি যাত্রা-সময়ের 8 সেকেণ্ড পরে পুনরায় মিলিত হইবে।

উদা. 17. উপরের উদাহরণে, কণা দুইটির দূরত্ব কখন সর্বাধিক হইবে? এই সর্বাধিক দূরত্ব নির্ণয় কর।

মনে কর যাত্রার t সেকেণ্ড পরে কণা দুইটির অতিক্রান্ত পথ যথাক্রমে s_1 ও s_2.

সুতরাং $s_1=40t$ এবং $s_2=16t+3t^2$.

$\therefore$ এই সময়ে কণা দুইটির দূরত্ব

$x=s_1-s_2=24t-3t^2$

$=-3[16-8t+t^2]+48=48-3(4-t)^2$.

$\therefore$ x হইতেছে 48 হইতে একটি ধনাত্মক রাশির বিয়োগফল।

সুতরাং x-এর মান বৃহত্তম হইবে যখন

$3(4-t)^2=0$, বা, $t=4$ এবং তখন $x=48$ ফুট।

$\therefore$ যাত্রার 4 সেকেণ্ড পরে কণা দুইটির দূরত্ব সর্বাধিক হইবে এবং এই সর্বাধিক দূরত্ব 48 ফুট।

উদা. 18. দুইটি কণা P ও Q, $\overleftrightarrow{AB}$ রেখায় গতিশীল। P কণাটি A হইতে $\overrightarrow{AB}$ অভিমুখিতায় প্রারম্ভিক বেগ u_1 এবং সমত্বরণ f_1 লইয়া এবং একই সময়ে B হইতে Q কণাটি বিপরীত অভিমুখিতায় প্রারম্ভিক বেগ u_2 এবং

সমত্বরণ f_2 লইয়া যাত্রা করিল। যদি কণা দুইটি AB-র মধ্যবিন্দুতে পরস্পরকে অতিক্রম করে এবং যথাক্রমে B ও A বিন্দুদ্বয়ে উহাদের একই অন্তিম বেগ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(u_1+u_2)(f_1-f_2)=8(f_1u_2-f_2u_1)$.

মনে কর A ও B-র দূরত্ব s এবং কণাদ্বয় যাত্রার t সময় পরে পরস্পরকে অতিক্রম করে। সুতরাং প্রশ্নানুসারে, P-এর ক্ষেত্রে, $\frac{s}{2}=u_1t+\frac{1}{2}f_1t^2$ ··· (i)

এবং Q-এর ক্ষেত্রে $\frac{s}{2}=u_2t+\frac{1}{2}f_2t^2$ ···(ii)

আবার যেহেতু B ও A-তে উহাদের একই অন্তিম বেগ v (মনে কর),

$\therefore$ P-এর ক্ষেত্রে $v^2=u_1^2+2f_1s$ এবং Q-এর ক্ষেত্রে $v^2=u_2^2+2f_2s$.

$\therefore \quad u_1^2+2f_1s=u_2^2+2f_2s,$

বা, $2(f_1-f_2)s=u_2^2-u_1^2$

বা, $s=\dfrac{u_2^2-u_1^2}{2(f_1-f_2)}$ ···(iii).

আবার (i) ও (ii) হইতে পাই, $u_1+\frac{1}{2}f_1t=u_2+\frac{1}{2}f_2t$

বা, $\frac{1}{2}(f_1-f_2)t=u_2-u_1$

$\therefore \quad t=\dfrac{2(u_2-u_1)}{f_1-f_2}$ ···(iv)

এক্ষণে (i)-এ যথাক্রমে (iii) ও (iv)-এ লব্ধ s ও t-এর মান বসাইয়া পাই,

$$\frac{s}{2t}=u_1+\tfrac{1}{2}f_1t$$

বা, $\dfrac{\dfrac{u_2^2-u_1^2}{2(f_1-f_2)}}{\dfrac{4(u_2-u_1)}{f_1-f_2}}=u_1+\frac{1}{2}f_1\times\dfrac{2(u_2-u_1)}{f_1-f_2}$

বা, $\dfrac{u_2+u_1}{8}=u_1+\dfrac{f_1(u_2-u_1)}{f_1-f_2}=\dfrac{u_2f_1-u_1f_2}{f_1-f_2}$

অর্থাৎ $(u_1+u_2)(f_1-f_2)=8(u_2f_1-u_1f_2)$.

প্রশ্নমালা 3

1. একটি কণা $\overleftrightarrow{OA}$ রেখায় গতিশীল এবং সরলরেখাটির একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে যাত্রার t সেকেণ্ড পরে কণাটির দূরত্ব s সে. মি. হইলে, $s=t^4-2t^3-1$. যাত্রার 2 সেকেণ্ড পরে কণাটির বেগ এবং 3 সেকেণ্ড পরে ত্বরণ নির্ণয় কর।

2. একটি কণা $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখায় গতিশীল এবং সরলরেখাটির একটি নির্দিষ্ট বিন্দু A হইতে যাত্রার t সেকেণ্ড পরে কণাটির দূরত্ব s হইলে $s = \cdot5t + \cdot25t^2$ (সকল t-র জন্য)। প্রমাণ কর যে কণাটি সমত্বরণে গতিশীল।

3. একটি কণা $\overleftrightarrow{OA}$ সরলরেখায় গতিশীল। যদি যাত্রার t-সেকেণ্ড পরে সরলরেখাটির একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে কণাটির দূরত্ব $x = t^3 - 2t^2 - 6$ হয়, তবে কণাটি যখন O বিন্দু হইতে 3 সে. মি. দূরে অবস্থিত, তখন কণাটির ত্বরণ নির্ণয় কর।

4. যদি t = সময়, s = অতিক্রান্ত দূরত্ব, v বেগ এবং a, b, c ধ্রুবক হইলে $s = at^2 + bt + c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $4a(s-c) = v^2 - b^2$.

[C. U. 1958]

5. একটি সরলরেখায় গতিশীল কোন কণার ঐ সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে দূরত্ব যখন x, তখন কণাটির বেগ v হইলে $v^2 = 4x - x^2$. দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ f হইলে $(f+x)^2 = 4$.

6. একটি সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে c দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু হইতে স্থির অবস্থায় যাত্রা আরম্ভ করিয়া ঐ সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার O বিন্দু হইতে x দূরত্বে অবস্থিত কোন বিন্দুতে ত্বরণ, x-এর সকল মানের জন্য O-র বিপরীত দিকে (away from x) $\frac{\mu}{x^2}$. কণাটি যখন O বিন্দু হইতে $2c$ দূরত্বে অবস্থিত তখন উহার বেগ নির্ণয় কর।

7. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে একটি কণার গতি আলোচনা কর। যখন,

(i) $\dot{s} = 2t^2$, যখন $0 \leqslant t < 1$

$= 4t$, যখন $t > 1$

(ii) $f = -x - 2v$.

8. O একটি সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। ঐ সরলরেখার একটি বিন্দু A হইতে স্থির অবস্থায় ঐ সরলরেখায় একটি কণা গতিশীল হইলে যাত্রার t সময় পরে কণাটির ত্বরণ $f = 5t - 10$ হয়। OA = 16 সে. মি. হইলে কণাটির গতি আলোচনা কর।

9. (নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিতে f-কে ধ্রুবক মনে করিবে)

(i) সি. জি. এস্. এককে $u = 4, f = 1, t = 3$ হইলে s নির্ণয় কর।

(ii) এফ. পি. এস্. এককে $u = 3, f = 2, t = 5$ হইলে v এবং s নির্ণয় কর।

(iii) $u=15$ মি./সেকেণ্ড ; $f=-5$ সে. মি./সেকেণ্ড^2, $t=4$ সেকেণ্ড হইলে v-কে কি. মি./ঘণ্টা দ্বারা প্রকাশ কর।

(iv) সি. জি. এস্. এককে $u=5$, $v=6$, $s=5\cdot5$ হইলে f এবং t নির্ণয় কর।

10. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার কোন এক মুহূর্তে বেগ সেকেণ্ডে 15 মিটার এবং 10 সেকেণ্ড পরে কণাটির বেগ হয় সেকেণ্ডে 45 মিটার। যদি কণাটির বেগ সমহারে পরিবর্তিত হয়, তবে কণাটির ঐ সময়ে অতিক্রান্ত পথ নির্ণয় কর।

11. একটি কণা স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা করে এবং 10 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ হয় সেকেণ্ডে 8 মিটার। কণাটি সমত্বরণবিশিষ্ট হইলে আরও 5 সেকেণ্ড পরে উহার গতিবেগ এবং এই সময় পর্যন্ত মোট অতিক্রান্ত পথ নির্ণয় কর।

12. যখন ব্রেক প্রয়োগ করা হইল, তখন একটি ট্রেনের বেগ ছিল ঘণ্টায় 48 মাইল। পরবর্তী একটি স্টেশনে থামিতে ট্রেনটির সময় লাগে 2 মিনিট। এই স্টেশন হইতে কতদূর আগে ব্রেক প্রযুক্ত হইয়াছিল ?

13. একটি চাঁদমারির (Target) এক ইঞ্চি ভেদ করিবার পর সেকেণ্ডে 1200 ফুট বেগে গতিশীল একটি গুলির গতিবেগ অর্ধেক হ্রাস পাইল। চাঁদমারির রোধ (resistance) সর্বত্র সমান হইলে, গুলিটি চাঁদমারির আর কতটা ভেদ করিবে ?

14. স্থির অবস্থা হইতে একটি কণা একটি সরলরেখায় গতিশীল হইল। যদি কণাটি প্রথমে সমত্বরণ a এবং পরে সমমন্দন b লইয়া গতিশীল হয় এবং s দূরত্ব অতিক্রম করিয়া যাত্রার t সেকেণ্ড পরে পুনরায় স্থির হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $t^2=2s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

15. 9·6 ইঞ্চি পুরু একটি প্রাচীর ভেদ করিবার ফলে একটি গুলির বেগ সেকেণ্ডে 1200 ফুট হইতে সেকেণ্ডে 800 ফুটে পরিণত হইল। প্রাচীরটি ভেদ করিতে গুলিটির কত সময় লাগিয়াছিল এবং গুলিটি যখন প্রাচীরটির অর্ধাংশ ভেদ করে তখন গুলিটির বেগ কি ছিল নির্ণয় কর।

16. সমত্বরণে একটি সরলরেখায় গতিশীল, একটি কণা গতির শেষ সেকেণ্ডে সম্পূর্ণ অতিক্রান্ত দূরত্বের $\frac{9}{25}$ অংশ অতিক্রম করে। কণাটি স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা করিলে এবং প্রথম সেকেণ্ডে 6 সে. মি. পথ অতিক্রম করিলে উহা কতক্ষণ গতিশীল ছিল এবং অতিক্রান্ত সম্পূর্ণ দূরত্ব কত ?

17. একটি সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা t সেকেণ্ডে এবং পরবর্তী $\frac{t}{2}$ সেকেণ্ডে সমান পথ s অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে পরবর্তী $\frac{3t}{2}$ সেকেণ্ডে কণাটি $5s$ পথ অতিক্রম করিবে।

18. একটি ট্রেন পর পর দুইটি স্টেশনে থামে। স্টেশন দুইটির মধ্যে দূরত্ব 2 মাইল এবং একটি স্টেশন হইতে স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া অপরটিতে গিয়া থামিতে উহার সময় লাগে 4 মিনিট। মাইল ও মিনিট যথাক্রমে দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক হইলে এবং ট্রেনটি প্রথমে সমত্বরণ x ও পরে সমমন্দন y-এ চলিলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4.$ [C. U. 1934]

19. একই সরলরেখায় d ফুট দূরত্বে একটি স্টেশন হইতে স্থির অবস্থায় যাত্রা করিয়া একটি ট্রেন অপর একটি স্টেশনে গিয়া থামে। ট্রেনটি যাত্রাপথের প্রথম অংশ a ফুট/সেকেণ্ড^2 সমত্বরণে এবং অপর অংশ b ফুট/সেকেণ্ড^2 সমমন্দনে চলিলে প্রমাণ কর উহার সম্পূর্ণ পথটি অতিক্রম করিতে সময় লাগে,

$$\sqrt{\frac{2(a+b)d}{ab}} \text{ সেকেণ্ড।}$$ [C. U. 1945]

20. একটি ট্রেনের বেগ প্রথমে 0 হইতে সমহার f_1-এ বৃদ্ধি পাইয়া v হইল ; অতঃপর কিছু সময় উহা সমবেগে চলিল, এবং শেষে সমহার f_2-এ হ্রাস পাইয়া উহার বেগ 0 হইল। সম্পূর্ণ পথের দৈর্ঘ্য x হইলে প্রমাণ কর যে উহার ঐ পথ অতিক্রম করিতে মোট সময় লাগিয়াছিল $\frac{x}{v}+\frac{v}{2}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$.

21. একটি বাস স্থির অবস্থা হইতে 1 মিটার/সেকেণ্ড^2 সমত্বরণে যাত্রা করিল। কোন ব্যক্তি যদি বাসটির 50 ফুটের অধিক পশ্চাতে থাকে, তবে প্রমাণ কর যে 10 মিটার/সেকেণ্ড সমবেগে চলিয়া সে বাসটিকে ধরিতে পারিবে না।

22. একটি কণা স্থির অবস্থা হইতে সমত্বরণে যাত্রা করিল। প্রমাণ কর যে, যে-কোন অবকাশে কণাটির গড় বেগ (অতিক্রান্ত পথের সাপেক্ষে)= $\frac{4}{3}$. (ঐ অবকাশে তাহার গড় বেগ)।

23. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা তিনটি ক্রমিক অবকাশ 3 সেকেণ্ড, 8 সেকেণ্ড ও 5 সেকেণ্ডে যথাক্রমে AB=153 ফুট, BC=320 ফুট এবং CD=135 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে কণাটি সমমন্দনে গতিশীল। কণাটি যে বিন্দুতে স্থির হয়, সেই বিন্দু হইতে A বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

24. যদি ক্রমিক তিনটি অবকাশ t_1, t_2 ও t_3-তে সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি কণার গড় বেগ যথাক্রমে v_1, v_2 ও v_3 হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{v_1-v_2}{v_2-v_3}=\frac{t_1+t_2}{t_2+t_3}$$

25. একই লাইনে u_1 ও u_2 বেগে গতিশীল দুইটি ট্রেন পরস্পরের দিকে অগ্রসর হইতেছিল। যখন তাহাদের মধ্যে দূরত্ব x তখন তাহারা পরস্পরকে দেখিল এবং ব্রেক প্রয়োগের ফলে তাহাদের সমমন্দন হইল যথাক্রমে f_1 ও f_2. প্রমাণ কর যে, যদি $u_1^2f_2+u_2^2f_1=2f_1f_2x$ হয়, তবে দুর্ঘটনা কোনও ক্রমে এড়ান যাইবে।

26. একটি কণা একটি সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল। যদি যাত্রার t_1, t_2 ও t_3 সময় পরে সরলরেখাটির একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে কণাটির দূরত্ব যথাক্রমে x_1, x_2 ও x_3 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, কণাটির ত্বরণ

$$=2\left\{\frac{(x_2-x_3)t_1+(x_3-x_1)t_2+(x_1-x_2)t_3}{(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)}\right\}$$

27. একটি কণা A বিন্দু হইতে স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া একটি সরলরেখায় f সমত্বরণে গতিশীল হইল। T সেকেণ্ড পরে অপর একটি কণা A বিন্দু হইতে একই রেখায় একই অভিমুখে u সমবেগে যাত্রা করিল। যদি $u>2fT$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, দ্বিতীয় কণাটি $\frac{2}{f}\sqrt{u(u-2fT)}$ সময়ের জন্য প্রথম কণাটির সম্মুখে থাকিবে।

28. একটি ট্রেনের বেগ, ত্বরণ ও মন্দন সর্বাধিক যথাক্রমে 59·4 কি. মি./ঘণ্টা, 75 সে.মি./সেকেণ্ড^2 ও 1 মি./সেকেণ্ড^2 হইতে পারে। একটি স্টেশন হইতে স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 10·56 কি.মি দূরত্বে অবস্থিত অপর একটি স্টেশনে থামিতে ট্রেনের কমপক্ষে কত সময় লাগিবে ?

29. একটি পথের প্রথম এক-তৃতীয়াংশ ও শেষ চতুর্থাংশ একটি ট্রেন যথাক্রমে সমত্বরণে ও সমমন্দনে চলে। ট্রেনটি স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া যদি ঐ পথের শেষে আবার স্থির হয়, তবে প্রমাণ কর যে উহার বৃহত্তম বেগ ও গড়বেগের অনুপাত 19 : 12. [C. U.]

30. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে x দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু হইতে প্রারম্ভিক বেগ u লইয়া সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার যাত্রার t সেকেণ্ড পরে বেগ হইল $ue^{a(t+x)}$ যেখানে a একটি ধনাত্মক ধ্রুবক। প্রমাণ কর যে

কণাটির $2u$ বেগ হইবে $\frac{1}{a}\log\frac{2u+2}{2u+1}$ সময় পরে এবং এই অবকাশে উহার অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্য $\frac{1}{a}\log\frac{2u+1}{u+1}$.

31. সরলরেখায় স্থির অবস্থা হইতে f ত্বরণসহ গতিশীল একটি কণার ত্বরণ t, $2t$ ইত্যাদি সময় পরে $2f$, $3f$ ইত্যাদি হইল। প্রমাণ কর যে কণাটির nt সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথের মোট দৈর্ঘ্য $\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}ft^2$.

32. x ফুট দূরত্বে একটি চোরকে দেখিয়া একটি কন্‌স্টেবল্ u বেগে এবং α সমত্বরণসহ চোরটিকে ধরিবার জন্য যাত্রা করিল, আর তখন চোরটি স্থির অবস্থা হইতে β সমত্বরণে দৌড় আরম্ভ করিল। প্রমাণ কর যে, কন্‌স্টেবলটি চোরটিকে ধরিতে পারিবে যদি, $\alpha \geqslant \beta$ অথবা $\alpha < \beta < \alpha + \frac{u^2}{2x}$ হয়।

পঞ্চম অধ্যায়
নিউটনের গতিসূত্র
(Newton's Laws of motion)

§ 5·1. পূর্ববর্তী অধ্যায়সমূহে আমরা স্থিতিবিজ্ঞান সম্বন্ধে আলোচনা করিয়াছি; অর্থাৎ গতির কারণ বা প্রযুক্ত বলের প্রকৃতি সম্বন্ধে আলাচনা ব্যতিরেকেই কণার গতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। বর্তমান অধ্যায়ে প্রযুক্ত বল এবং তজ্জনিত গতির সম্পর্ক সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে। পূর্বেই বলা হইয়াছে যে নিউটনের গতিসূত্র হইতে বলের সংজ্ঞা পাওয়া যায়; প্রকৃতপক্ষে নিউটনের গতিসূত্রসমূহ বলবিদ্যার ভিত্তি। নিম্নে সূত্রসমূহ বিবৃত করা হইল।

সূত্র 1. বাহির হইতে প্রযুক্ত বল দ্বারা অবস্থার পরিবর্তন না ঘটিলে স্থির বস্তু চিরকাল স্থির অবস্থাতেই থাকে এবং গতিশীল বস্তু চিরকাল সমবেগে সরলরেখায় চলিতে থাকে।

সূত্র 2. কোন বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার বস্তুটির উপর প্রযুক্ত বলের সহিত সমানুপাতিক এবং বল যেদিকে প্রযুক্ত হয় ভরবেগের পরিবর্তনও সেইদিকে ঘটে।

সূত্র 3. প্রত্যেক ক্রিয়ার সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া থাকে।

উপরের সূত্র তিনটিকে প্রমাণ করা যায় না এবং ইহাদের বলবিদ্যার মৌল স্বতঃসিদ্ধ রূপে গণ্য করিতে হইবে। যে সকল বস্তুর গতিবেগ আলোকের বেগের তুলনায় ক্ষুদ্র, সেইরূপ বিভিন্ন বস্তুর ক্ষেত্রে এই সূত্রসমূহ পরোক্ষভাবে প্রমাণিত হইয়াছে। এই গতিসূত্র তিনটির সাহায্যে পৃথিবী, চন্দ্র, সূর্য, গ্রহ, নক্ষত্র ইত্যাদির অবস্থান এবং গতি সম্বন্ধে নির্ভুল ভবিষ্যদ্বাণী করা যায়। সুতরাং এই সূত্রসমূহকে সত্য বলিয়া গণ্য করা যায়। নিউটন এই সূত্র তিনটি সুসংবদ্ধ আকারে প্রকাশ করিবার প্রায় দুইশত বৎসর পরে এই সূত্র তিনটিকে বলবিদ্যার মৌল স্বতঃসিদ্ধরূপে স্বীকার করা হয় এবং যে কোন প্রকার গতির কারণ এই সূত্র তিনটি দ্বারা ব্যাখ্যা করা যাইবে বলিয়া মনে করা হয়। কিন্তু ইহা উল্লেখ করা প্রয়োজন যে জ্যোতির্বিদ্যা, উপ-আণবিক এবং নিউক্লীয় পদার্থবিদ্যায় এই সূত্র তিনটির সাহায্যে অনেক সময়ই বিভিন্ন গতি ব্যাখ্যা করা যায় না। যাহা হউক, সাধারণ গতির ক্ষেত্রে এই সূত্রগুলির যাথার্থ্য প্রমাণিত হইয়াছে। পরবর্তী কয়েকটি অনুচ্ছেদে সূত্র তিনটির তাৎপর্য ব্যাখ্যা করা হইতেছে।

§ 5·2. 1. **প্রথম সূত্র :** গ্যালিলিও সর্বপ্রথম এই সূত্রটি আবিষ্কার করেন। এই সূত্রটির দুইটি অংশ ; প্রথম অংশকে জাড্য-সূত্র বা law of inertia বলে ; দ্বিতীয় অংশ হইতে বলের গুণগত সংজ্ঞা পাওয়া যায়।

(i) **জাড্য সূত্র :**—ল্যাটিন Inertia শব্দের অর্থ আলস্য। প্রথম সূত্রের প্রথম অংশে বলা হইয়াছে যে, কোন বস্তু যদি স্থির থাকে, তবে বস্তুর ধর্ম হইল চিরদিনই স্থির থাকা এবং ইহাকে **স্থিতি জাড্য** (Inertia of rest) বলা হয়। আবার কোন গতিশীল বস্তুর ধর্ম হইল চিরকাল সমবেগে সরলরেখায় গতি বজায় রাখা এবং পদার্থের এই ধর্মকে **গতিজাড্য** (Inertia of motion) বলে। সুতরাং জাড্য দুই প্রকার (1) স্থিতিজাড্য এবং (2) গতিজাড্য।

প্রথম সূত্রের দ্বিতীয় অংশে বলের সংজ্ঞা পাওয়া যায়। কোন বস্তুর অবস্থার পরিবর্তন করিতে হইলে বাহির হইতে বস্তুটির উপর বল প্রয়োগ করিতে হয়। বস্তু নিজ হইতে স্থির হইতে বা চলিতে পারে না। কিন্তু বাহির হইতে বস্তুর উপর বলপ্রয়োগ করিলেই বস্তুর অবস্থার পরিবর্তন নাও হইতে পারে। জাড্য ধর্মের জন্য বস্তু উহাতে প্রযুক্ত বল কর্তৃক উহার অবস্থান পরিবর্তনের প্রচেষ্টাকে বাধা দেয়। কিন্তু যখন বস্তুটি প্রযুক্ত বলের এই প্রচেষ্টাকে বাধা দিতে সক্ষম হয় না, তখন বস্তুটির অবস্থার পরিবর্তন ঘটে। সুতরাং প্রথম সূত্র হইতে বলের নিম্নলিখিত গুণগত সংজ্ঞা পাওয়া যায়।

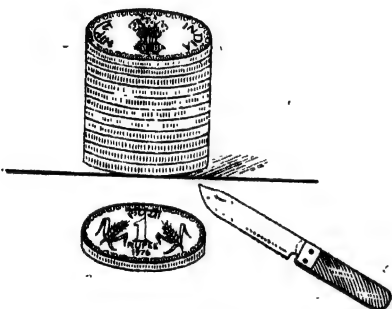
সংজ্ঞা : বাহির হইতে যাহা প্রয়োগ করিয়া বস্তুর স্থির অবস্থার অথবা সরলরেখায় সমবেগে গতিশীল অবস্থার পরিবর্তন করা হয় বা পরিবর্তন করিবার চেষ্টা করা হয় তাহাকে **বল** (Force) বলে।

এক্ষণে, বস্তুর জাড্য ধর্মের কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইতেছে।

(ক) কোন গতিশীল গাড়ী হঠাৎ থামিয়া গেলে, গাড়ীর আরোহী সামনে হেলিয়া পড়ে। কারণ, গাড়ীর সহিত সংলগ্ন আরোহীর দেহের নিম্নাংশ গাড়ীর সহিত থামিয়া যায়, কিন্তু গতিজাড্য হেতু তাহার দেহের উর্ধ্বাংশ গতিশীল থাকিতে চায় এবং সেইজন্য আরোহী সামনের দিকে হেলিয়া পড়ে। অনুরূপে কোন গাড়ী হঠাৎ চলিতে আরম্ভ করিলে, আরোহীর দেহের উর্ধ্বাংশ স্থিতিজাড্য হেতু স্থির থাকিতে চায় এবং ঐ আরোহী পিছনের দিকে হেলিয়া পড়ে।

(খ) কোন বলকে মেঝের উপর গড়াইয়া দিলে ভূমির ঘর্ষণহেতু বলটি কিছুক্ষণ পরেই থামিয়া যায়। কিন্তু যদি মেঝেটি মসৃণ হইত অর্থাৎ মেঝেতে ঘর্ষণ বলের উৎপত্তি না হইত (ঘর্ষণ সম্বন্ধে এই অধ্যায়ের § 5·13 অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হইল), তবে বলটি সমবেগে সরলরেখায় গতিশীল থাকিত।

পৃথিবীতে কোন তলই প্রকৃত মসৃণ নয়, সুতরাং কোন বলই অনাদিকাল গতিশীল থাকিতে পারে না। বরফ কিংবা চশমার কাঁচের দ্বারা নির্মিত তলে ঘর্ষণ খুবই অল্প; সে কারণ, এই সকল তলে কোন বল গড়াইয়া দিলে উহা বেশ কিছু সময় গতিশীল থাকে; এই সকল ক্ষেত্রে ঘর্ষণ ব্যতীত বায়ুর রোধ এবং ক্রিয়াশীল অন্যান্য বহিঃপ্রযুক্ত বলও বলটিকে স্থিরাবস্থায় আসিতে সাহায্য করে। কিন্তু ইহা হইতে বুঝা যায় যে, যদি কোন বহিঃপ্রযুক্ত বল না থাকিত এবং তলটি প্রকৃত মসৃণ হইত, তবে গতিজাড্য হেতু বলটি চিরকালই সরলরেখায় সমবেগে গতিশীল থাকিত।

(গ) কয়েকটি মুদ্রা অথবা ধাতুর চাকৃতি উপর উপর সাজাইয়া একটি স্তম্ভ তৈরী কর এবং একটি ছুরি দ্বারা নিম্নতম চাকৃতিটিকে আঘাত কর। দেখা যাইবে যে নিম্নতমটি বাদ দিয়া স্তম্ভটি পূর্বের ন্যায়ই খাড়া রহিয়াছে। ইহার কারণ, নিম্নতম চাকৃতিটিতে হঠাৎ গতি আরোপিত হওয়ায় উহার উপরের চাকৃতিগুলি উহাদের স্থিতিজাড্য অতিক্রম করিবার জন্য যথেষ্ট সময় পায় না।

চিত্র 42

প্রথম গতিসূত্র হইতে বলা যায় যে, যখন কোন বস্তু স্থিরাবস্থায় অথবা সরলরেখায় সমবেগে গতিশীল থাকে, তখন উহার উপর কোন লব্ধিবল ক্রিয়া করে না। উহার অবস্থার পরিবর্তনের জন্য উহার উপর বাহির হইতে বল প্রয়োগ করা প্রয়োজন।

§ 5·3. ভরবেগ (Momentum):

দ্বিতীয় গতিসূত্রটি ব্যাখ্যা করিবার পূর্বে ভরবেগের সংজ্ঞা জানা প্রয়োজন।

ভরবেগ :—কোন বস্তুর **ভরবেগ** উহার ভর এবং বেগের গুণফল। ভরবেগ একটি ভেক্টর রাশি এবং ইহার দিক ও অভিমুখিতা বস্তুটির বেগের দিক ও অভিমুখিতা।

ভরবেগের একক :—একক ভর একক বেগে চলিলে ঐ একক ভরের ভরবেগকে একক ভরবেগ বলা হয়। এফ্. পি. এস্. ও সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে ভরবেগের একক যথাক্রমে সেকেণ্ডে পাউণ্ড-ফুট এবং সেকেণ্ডে গ্রাম-সেন্টিমিটার।

দ্রষ্টব্য : এখানে যে ভরবেগের আলোচনা করা হইতেছে, তাহাকে অনেক সময় রৈখিক ভরবেগ (linear momentum) বলা হয়। কৌণিক ভরবেগের ধারণা (concept of angular momentum) বস্তুর আবর্তনের আলোচনায় পাওয়া যায়।

§ 5·4. দ্বিতীয় গতিসূত্র :—

প্রথম গতিসূত্র হইতে বলের গুণগত সংজ্ঞা পাওয়া গিয়াছে। দ্বিতীয় সূত্র হইতে বলের পরিমাণগত সংজ্ঞা অর্থাৎ বলের পরিমাপ করিবার পদ্ধতি পাওয়া যায়। দ্বিতীয় সূত্র হইতে জানা যায় যে প্রযুক্ত বল বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের সহিত সমানুপাতী এবং বলের দিক ও অভিমুখিতা ভরবেগের পরিবর্তনের দিক ও অভিমুখিতা।

দ্বিতীয় সূত্র হইতে বলের প্রাকৃতিক স্বাধীনতা তত্ত্বটিও (Principle of Physical Independence of force) পাওয়া যায়। যেহেতু উৎপন্ন ভরবেগ-ভেক্টরের দিক্ ও অভিমুখিতা প্রযুক্ত বলের দিক্ ও অভিমুখিতা এবং উহা বস্তুর অবস্থা-নিরপেক্ষ, সুতরাং যদি কোন বস্তুর উপর একাধিক বল যুগপৎ প্রযুক্ত হয়, তবে প্রত্যেক বল তাহার নিজস্ব দিক্ ও অভিমুখিতায় বস্তুটির উপর নিজস্ব একটি ক্রিয়া উৎপন্ন করে, যে ক্রিয়া অন্য কোন বল বস্তুটির উপর প্রযুক্ত না হইলেও উৎপন্ন হইত। আবার কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত কোন বল বস্তুর গতির যে পরিবর্তন করে, তাহা বস্তুর ভরের উপর নির্ভর করে ; অপেক্ষাকৃত ভারী বস্তুর গতির পরিবর্তন অপেক্ষাকৃত কম হয়। প্রকৃতপক্ষে সমান বেগ-পরিবর্তনের জন্য পৃথক্ ভরের দুইটি বস্তুতে ভরের সমানুপাতে বল প্রয়োগ করা প্রয়োজন।

কোন বস্তুর ভর অপরিবর্তিত থাকিলে, প্রত্যেক বলের প্রয়োগে বস্তুর এক-একটি ত্বরণ সৃষ্টি হয়। প্রযুক্ত বিভিন্ন বলের ক্রিয়ার ফলে বস্তুর প্রকৃত ত্বরণ এই পৃথক্ ত্বরণসমূহের লব্ধি ত্বরণ। কোন বস্তুর ভর ক্রমাগত বৃদ্ধি পাইলে (উদাহরণস্বরূপ পতনশীল বৃষ্টির ফোঁটা), উহার বেগ অপরিবর্তিত রাখিবার জন্য বলপ্রয়োগের প্রয়োজন হয়। কারণ, ভরবেগ (ভর × বেগ) ভরের বৃদ্ধির সহিত বৃদ্ধি পাইয়া থাকে।

§ 5·5. P = mf সূত্রের নির্ণয় :—

মনে কর কোন মুহূর্তে m-ভরের একটি কণার উপর একটি বল P প্রযুক্ত হইল এবং ঐ মুহূর্তে কণাটির বেগ v এবং ত্বরণ f. নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী, বলের পরিমাপ ভরবেগের পরিবর্তনের হারের সহিত সমানুপাতী।

$$\therefore \quad P \propto \frac{d}{dt}(mv) \quad \text{বা,} \quad P \propto m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

এখানে, m ধ্রুবক হইলে, $\frac{dm}{dt}=0$. $\therefore$ $P \propto m\frac{dv}{dt} = mf$.

বা, $P = Kmf$, K একটি ধ্রুবক এবং ইহার মান বলের এককের উপর নির্ভর করে।

এক্ষণে, একক বলের সংজ্ঞা নিম্নরূপে দেওয়া যাক। মনে কর একক বল এইরূপ একটি বল যাহা একক ভরের উপর প্রযুক্ত হইলে একক ত্বরণ উৎপন্ন হয়।

স্বতরাং, $m=1$, $f=1$ হইলে $P=1$ হয়।

$\therefore$ $1 = K.1.1$, $\therefore$ $K=1$

$\therefore$ উপরে প্রদত্ত একক বলের সংজ্ঞানুযায়ী $P=mf$.

$\therefore$ বলের পরিমাপ $=$ ভর $\times$ ত্বরণ।

দ্রষ্টব্য। কোন কণার গতির সমীকরণ হইল, $P = m\frac{d^2x}{dt^2}$.

§ 5·6. বলের একক ; পরম একক (Units of force ; absolute units) :

§ 5·5 অনুচ্ছেদে প্রদত্ত একক বলের সংজ্ঞানুযায়ী এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একক এক **পাউণ্ডাল** (Poundal)। যে পরিমাপের বল এক পাউণ্ড ভরের উপর ক্রিয়াশীল হইলে ভরটির এক ফুট/সেকেণ্ড² ত্বরণ উৎপন্ন হয়, তাহাকে এক পাউণ্ডাল বল বলে। সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একক এক **ডাইন** (Dyne). যে পরিমাপের বল এক গ্রাম ভরের উপর ক্রিয়াশীল হইলে ভরটির এক সে মি /সেকেণ্ড² ত্বরণ উৎপন্ন হয়, তাহাকে এক ডাইন বল বলে।

পাউণ্ডাল ও ডাইন হইল বলের **পরম একক** (Absolute unit).

পাউণ্ডাল ও ডাইনের সম্পর্ক :—

$$\frac{\text{এক পাউণ্ডাল}}{\text{এক ডাইন}} = \left(\frac{1 \text{ পাউণ্ড}}{1 \text{ গ্রাম}}\right)\left(\frac{1 \text{ ফু./সেকেণ্ড}^2}{1 \text{ সে. মি./সেকেণ্ড}^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1 \text{ পাউণ্ড}}{1 \text{ গ্রাম}}\right)\left(\frac{1 \text{ ফু}}{1 \text{ সে. মি}}\right)$$

$$= 453{\cdot}6 \times 30{\cdot}48 = 13825{\cdot}7 \text{ (আসন্ন)},$$

$\therefore$ 1 পাউণ্ডাল $= 13825{\cdot}7$ ডাইন (আসন্ন)।

§ 5·7. নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র (Newton's Law of gravitation) : বিশ্বের প্রত্যেকটি জড়কণা অপর যে-কোন জড়কণাকে

উহাদের পরস্পরের সংযোজক সরলরেখায় ক্রিয়াশীল বলদ্বারা আকর্ষণ করে। এই আকর্ষণ বলের পরিমাপ জড়কণা দুইটির ভর দুইটির গুণফলের সহিত সমানুপাতিক এবং উহাদের দূরত্বের বর্গের সহিত ব্যস্তানুপাতিক।

এই আকর্ষণ বলকে **মহাকর্ষ** (gravitation) বলা হয়। মনে কর দুইটি কণার ভর m ও m' এবং উহাদের দূরত্ব r, উহাদের যে কোনটি অপরটিকে F পরিমাপের বল দ্বারা আকর্ষণ করিলে,

$$F \propto \frac{mm'}{r^2}, \quad \text{বা,} \quad F = G.\frac{mm'}{r^2}$$

যেখানে G একটি ধ্রুবক এবং ইহাকে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক (gravitational constant) বলা হয়। G-এর মান বল, ভর ও দূরত্বের এককের উপর নির্ভর করে।

দ্রষ্টব্য। সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-8}$.

§ 5·8. **ভার এবং অভিকর্ষ** (Weight and gravity): পৃথিবী অন্যান্য সকল বস্তুকে যে বল দ্বারা আকর্ষণ করে তাহাকে **অভিকর্ষ** (gravity) বলে। সুতরাং অভিকর্ষ একটি বিশেষ প্রকার মহাকর্ষ। কোন বস্তুর উপর পৃথিবী মোট যে অভিকর্ষজ বল প্রয়োগ করে তাহাই বস্তুর ওজন। দ্বিতীয় গতিসূত্র হইতে আমরা জানি, কোন বস্তুর উপর কোন বল প্রযুক্ত হইলে বস্তুটির ঐ বলের অভিমুখিতায় একটি ত্বরণ উৎপন্ন হয়। অভিকর্ষ বলের ক্রিয়ায় উৎপন্ন কোন পতনশীল বস্তুর ত্বরণকে **অভিকর্ষজ ত্বরণ** (acceleration due to gravity) বলে। অভিকর্ষজ ত্বরণকে 'g' অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে 'g'-এর মান 981 সে. মি./সেকেণ্ড^2 (আসন্ন) এবং এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে 'g'-এর মান 32 ফুট/সেকেণ্ড^2 (আসন্ন)।

মনে কর কোন বস্তুর ভর m.

সুতরাং বস্তুটির ওজন = ভর × অভিকর্ষজ ত্বরণ = mg (পরম এককে)

∴ এক পাউণ্ড ভরের ওজন = 32 পাউণ্ডাল (আসন্ন)

এক গ্রাম ভরের ওজন = 981 ডাইন (আসন্ন)।

আবার মহাকর্ষ সূত্র অনুসারে, $W = G\frac{M.m}{r^2} = mg$,

যেখানে M = পৃথিবীর ভর ; m = বস্তুটির ভর এবং r = পৃথিবীর ভারকেন্দ্র এবং বস্তুটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব। ∴ $g = \frac{GM}{r^2}$.

∴ g-এর মান ধ্রুবক নয় এবং ইহা r-এর মানের উপর নির্ভরশীল। যেহেতু পৃথিবী গোলাকৃতি নয়, সুতরাং ভূপৃষ্ঠের উপর g-র মান বিভিন্ন অক্ষাংশে বিভিন্ন ; আবার একই অক্ষাংশে বিভিন্ন উচ্চতায় g-র মান বিভিন্ন হয়।

§ 5·9. **বলের অভিকর্ষীয় একক** (Gravitational unit of force).

উপরে দেখা গেল যে g-এর মান বিভিন্ন স্থানে এবং উচ্চতায় বিভিন্ন। সুতরাং এক পাউণ্ড ভারের ওজন বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন। এইজন্য আদর্শ পাউণ্ড ভারের সংজ্ঞা নির্ধারণ প্রয়োজন।

সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে বলের অভিকর্ষীয় একক **এক গ্রাম ভার** (one gramme weight).

যে পরিমাণ বল এক গ্রাম ভরের কোন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল হইয়া বস্তুটির 981 সে. মি./সেকেণ্ড^2 ত্বরণ উৎপন্ন করে, তাহাকে এক গ্রাম-ভার বলে।

এফ. পি. এস্. পদ্ধতিতে বলের অভিকর্ষীয় একক **এক পাউণ্ড-ভার** (one pound weight).

যে পরিমাণ বল এক পাউণ্ড ভরের কোন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল হইয়া বস্তুটির 32 ফুট/সেকেণ্ড^2 ত্বরণ উৎপন্ন করে, তাহাকে এক পাউণ্ড-ভার বল বলে।

§ 5·10. **ভর এবং ওজন** (Mass and weight).

যদিও সাধারণ কথোপকথনে আমরা ভর এবং ওজন একই অর্থে ব্যবহার করি, বলবিদ্যা এবং বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় ভর এবং ওজন পৃথক অর্থে ব্যবহৃত হয়। কোন বস্তুর ভর বলিতে উহার জড়ের পরিমাণকে বুঝায়। আর বস্তুটির ভার বা ওজন বলিতে উহা যে বলের দ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে আকৃষ্ট হয়, তাহার পরিমাপকে বুঝায়। $W=mg$ সমীকরণ হইতে দেখা যাইতেছে যে, g-এর মান ধ্রুবক হইলে কোন বস্তুর ভার উহার ভরের সহিত সমানুপাতিক। কিন্তু আমরা ইতিপূর্বে উল্লেখ করিয়াছি যে বিভিন্ন স্থানে ও উচ্চতায় g-এর মান বিভিন্ন, সুতরাং বস্তুর ভর বিভিন্নস্থানে অপরিবর্তিত থাকিলেও উহার ভার বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন হইতে পারে। এক্ষণে একই স্থানে বিভিন্ন আকৃতির কিন্তু একই ভরের বিভিন্ন বস্তুর উপর পৃথিবীর আকর্ষণ সমান হয় এবং সুতরাং তাহাদের ওজন সমান। এইজন্য সাধারণ তুলাযন্ত্র (common balance) দ্বারা বস্তুর ভর নির্ণয় করা হয়। 100 গ্রাম ভরের কোন বস্তুর ওজন 100 গ্রামের পরিবর্তে 100 গ্রাম-ভার বলাই শুদ্ধ।

দ্রষ্টব্য। ভর একটি স্কেলার রাশি ; ওজন একটি ভেক্টর রাশি।

§ 5·11. বলের প্রাকৃতিক স্বাধীনতাতত্ত্ব :

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে দ্বিতীয় গতিসূত্র হইতে বলের প্রাকৃতিক স্বাধীনতা তত্ত্বটি পাওয়া যায়। কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত কোন বলের জন্য বস্তুটির ঐ বলের অভিমুখিতায় একটি ত্বরণ উৎপন্ন হয়। বস্তুটির উপর প্রযুক্ত অন্যান্য বলের উপস্থিতি দ্বারা এই ত্বরণের অভিমুখিতা পরিবর্তিত হয় না। উদাহরণ স্বরূপ, কোন চলন্ত ট্রেনের কোন আরোহী ট্রেনের ভিতরে উপরদিকে কোন বস্তু ছুঁড়িয়া দিলে, বস্তুটি ঐ আরোহীর হাতেই পড়িবে। ইহা হইতে বুঝা যায় যে বস্তুটির উল্লম্বগতি বস্তুটির অনুভূমিক গতির উপর নির্ভরশীল নহে।

§ 5·12. বলের সামান্তরিক সূত্র (Parallelogram of forces) :

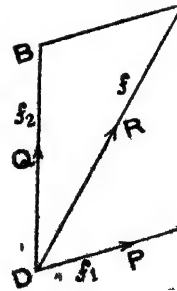
একাধিক বেগ বা ত্বরণের লব্ধিবেগ বা লব্ধি ত্বরণের ন্যায় একাধিক বলের লব্ধি বল পাওয়া যাইতে পারে। কোন বস্তু বা কণার উপর প্রযুক্ত কোন বলের ঐ বস্তু বা কণার উপর ক্রিয়া উহার উপর প্রযুক্ত একাধিক বলের ক্রিয়ার সমান হইলে, ঐ বলকে প্রযুক্ত অপর বলসমূহের **লব্ধি-বল** বলে। বলের প্রাকৃতিক স্বাধীনতাতত্ত্ব হইতে একাধিক বলের লব্ধি নির্ণয় বিষয়ক সামান্তরিক সূত্রটি প্রমাণ করা যায়। সূত্রটি নীচে বিবৃত হইল।

কোন কণার উপর প্রযুক্ত দুইটি বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা যদি কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তবে ঐ বল দুইটির লব্ধি বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা ঐ বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইতে অঙ্কিত সামান্তরিকটির কর্ণ দ্বারা প্রকাশিত হইবে।

দ্রষ্টব্য : যেহেতু বল একটি ভেক্টর, সুতরাং নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ দ্বারা কোন বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা প্রকাশ করা যায়। এই পুস্তকের স্থিতিবিদ্যা অংশে এই বিষয়ে পূর্ণাঙ্গ আলোচনা করা হইয়াছে।

মনে কর P ও Q বল দুইটি m-ভরের একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল। মনে কর P ও Q দ্বারা উৎপন্ন কণাটির ত্বরণ $\overline{DA}$ ও $\overline{DB}$ দ্বারা প্রকাশিত হয়।

চিত্র 33

DACB সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ কর। ত্বরণের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী, এই ত্বরণ দুইটির লব্ধি ত্বরণ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{DC}$ দ্বারা প্রকাশিত হইবে। সুতরাং P ও Q বল দুইটির যুগপৎ ক্রিয়ায় কণাটির উৎপন্ন ত্বরণ $\overline{DC}$ দ্বারা প্রকাশিত। সুতরাং P ও

Q বল দুইটির লব্ধিবল R, $\overline{DC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল এবং এই লব্ধিবল $\overline{DC}$ দ্বারা প্রকাশিত ত্বরণ উৎপন্ন করে (নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র)।

$$\therefore \quad R = m.\overline{DC}$$

সুতরাং P ও Q যথাক্রমে $m.\overline{DA}$ ও $m.\overline{DB}$ দ্বারা প্রকাশিত হইলে R, $m.\overline{DC}$ দ্বারা প্রকাশিত হইবে। অতএব P ও Q যথাক্রমে $\overline{DA}$ ও $\overline{DB}$ দ্বারা প্রকাশিত হইলে R, $\overline{DC}$ দ্বারা প্রকাশিত হইবে।

§ 5·13. তৃতীয় গতিসূত্র :

নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র হইতে কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল এবং উৎপন্ন ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক পাওয়া যায় এবং তত্ত্বগতভাবে বলবিদ্যার যে-কোন সমস্যা এই সম্পর্ক হইতে সমাধান করা যায়। নিউটনের তৃতীয় সূত্র হইতে বলের একটি সাধারণ ধর্ম পাওয়া যায়। এই সূত্র অনুযায়ী প্রত্যেক ক্রিয়ার একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া থাকে। মনে কর দুইটি কণার একটি অপরটির উপর কোন বল প্রয়োগ করে। তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী দ্বিতীয় কণাটি যুগপৎ প্রথম কণাটির উপর একটি সমান ও বিপরীত বল প্রয়োগ করিবে এবং এই বল দুইটি একই রেখায় ক্রিয়াশীল হয়। তৃতীয় গতিসূত্র হইতে একটি গুরুত্বপূর্ণ সংরক্ষণতত্ত্ব পাওয়া যায়। এই সংরক্ষণতত্ত্বকে ভরবেগ সংরক্ষণের সূত্র বলা হয়।

এক্ষণে, দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুসারে, বল ভরবেগ পরিবর্তনের হার। সুতরাং প্রথম বলটির ভরবেগ p_1 পরিবর্তনের হার = দ্বিতীয় বলটির ভরবেগ $-p_2$ পরিবর্তনের হার [p_2-এর ঋণাত্মক চিহ্নটি লক্ষ্য কর]।

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(p_1) = -\frac{d}{dt}(p_2), \text{ বা, } \frac{d}{dt}(p_1) + \frac{d}{dt}(p_2) = 0,$$

$$\text{বা, } \frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0, \quad \therefore \quad p_1 + p_2 \text{ একটি ধ্রুবক।}$$

সুতরাং কণা দুইটির মোট ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।

এক্ষণে যদি প্রত্যেক ক্রিয়ার একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া হয়, তবে প্রশ্ন হইতে পারে বস্তুর গতি কিভাবে সম্ভব হয়। এই বিষয়ে আলোচনার জন্য মনে রাখা প্রয়োজন ভূ-পৃষ্ঠে গতির জন্য ঘর্ষণ একান্ত প্রয়োজনীয় যদিও ঘর্ষণের কাজ হইল গতিকে বাঁধা দেওয়া। নীচে তৃতীয় সূত্রের কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

1. টেবিলের উপর স্থির অবস্থায় রক্ষিত একটি বস্তু :—কোন মসৃণ টেবিলের উপর স্থির অবস্থায় রক্ষিত কোন বস্তু টেবিলের উপর উহার ভারের সমান চাপ প্রয়োগ করে। আবার টেবিলটিও বস্তুটির উপর একটি সমান ঊর্ধ্বমুখী বল প্রয়োগ করে। এই বলকে বস্তুটির উপর টেবিলের লম্ব-প্রতিক্রিয়া (Normal Reaction) বলে। যদি টেবিলটি সরাইয়া লওয়া হয়, তবে বস্তুটি পড়িয়া যাইবে এবং তখন টেবিলের উপর চাপও অন্তর্হিত হইবে।

এখানে ক্রিয়া হইল টেবিলটির উপর বস্তুটির ওজনের সমান চাপ এবং এই ক্রিয়া ঊর্ধ্বমুখী টেবিলের প্রতিক্রিয়ার সমান। ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীতমুখী।

2. মনে কর একটি বৃহৎ প্রস্তরখণ্ডকে দড়ি দিয়া বাঁধিয়া একটি ঘোড়ার সাহায্যে টানা হইতেছে। যখন ঘোড়া দড়িতে টান দেয়, তখন তৃতীয় সূত্র অনুসারে প্রস্তরখণ্ডও ঘোড়াটিকে বিপরীত দিকে টানিবে। তাহা হইলে ঘোড়া কিরূপে অগ্রসর হইবে? ঘোড়া নিশ্চয়ই পিছন দিকে হটিয়া যায় না। প্রকৃতপক্ষে প্রস্তরখণ্ডটি ঘোড়াটিকে অগ্রসর হইতে বাধা দেয়। এখন যদি হঠাৎ দড়িটি কাটিয়া দেওয়া হয়, তবে দড়ির টান অন্তর্হিত হইবে এবং ঘোড়াটি যদি পা দিয়া পূর্বের ন্যায় চাপ দেওয়া হইতে সঙ্গে সঙ্গে বিরত হয়, তবে সে সামনের দিকে পড়িয়া যাইবে।

এতক্ষণ নিউটনের গতিসূত্রের কয়েকটি স্থৈতিক উদাহরণ দেওয়া হইল। তৃতীয় সূত্রের গতীয় উদাহরণ সম্বন্ধে আলোচনা করিবার পূর্বে বিভিন্ন প্রকার ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া সম্বন্ধে আলোচনা করা প্রয়োজন।

(i) **ধাক্কা** (Thrust) : দুইটি বস্তুর পারস্পরিক ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া উহাদিগকে পরস্পর হইতে দূরে সরাইয়া দিতে চেষ্টা করিলে ঐ ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়াকে **ধাক্কা** বলা হয়।

(ii) **টান** (Pull) : দুইটি বস্তুর পারস্পরিক ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া উহাদের পরস্পরকে কাছে টানিয়া রাখিতে চেষ্টা করিলে ঐ ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়াকে **টান** বলা হয়। একটি দড়ি দ্বারা বাঁধিয়া রাখা দুইটি বস্তুর একটি অন্যটিকে টানিলে অথবা টানিয়া লইবার চেষ্টা করিলে বস্তু দুইটির প্রত্যেকটি অপরটির উপর একটি টান প্রয়োগ করে। এই টান বস্তু দুইটির

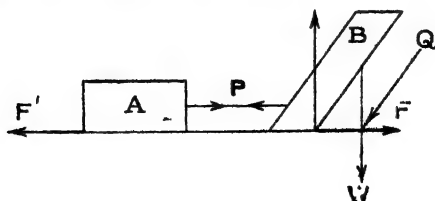
চিত্র 34

গতির দিকের উপর নির্ভর করে না। পাশের চিত্রে P_{AB}, A-র উপর B-র টান এবং P_{BA}, B-র উপর A-র টান।

(iii) **আকর্ষণ ও বিকর্ষণ :** দুইটি বস্তুর মধ্যে কোন দূরত্ব থাকিলে অর্থাৎ উহারা পরস্পরের সংস্পর্শে না থাকিলে, উহাদের একটি যদি অপরটিকে কাছে টানিতে চেষ্টা করে, তবে এইজন্য প্রথম বস্তুটি অপরটির উপর যে বল প্রয়োগ করে, তাহাকে একটি **আকর্ষণ বল** (Force of attraction) বলে। অপরটিকে কাছে টানিবার পরিবর্তে প্রথম বস্তুটি অপরটিকে দূরে সরাইবার চেষ্টা করিলে প্রযুক্ত বলটিকে **বিকর্ষণ বল** (Force of repulsion) বলে।

(iv) **ঘর্ষণ** (Friction) : দুইটি বস্তু পরস্পরের সংস্পর্শে থাকিলে উহাদের সাধারণ স্পর্শতলে (common surface of contact) উহাদের পরস্পরের গতিকে বাধা দিবার জন্য একটি বল উৎপন্ন হয়। এই উৎপন্ন বলকে **ঘর্ষণ বল** (Force of friction) বলা হয়। ভূপৃষ্ঠে গতির জন্য ঘর্ষণের আবশ্যকতা নীচের উদাহরণগুলি হইতে বুঝা যাইবে।

(*a*) **ভ্রমণ :**—ভ্রমণে ঘর্ষণের ভূমিকা হইতে নিউটনের তৃতীয় সূত্রের একটি চমৎকার গতীয় উদাহরণ পাওয়া যায়। যখন আমরা চলিতে শুরু করি, তখন আমরা ভূমির উপর পা দিয়া একটি পশ্চাৎ অভিমুখী চাপ দিই এবং ভূমির সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া দ্বারা আমাদের সামনের দিকে ঠেলিয়া দেয়। তোমরা নিশ্চয় মসৃণ অথবা ভিজা ভূমিতে চলিতে অসুবিধা মনে কর। ইহার কারণ, মসৃণ অথবা ভিজা ভূমির ঘর্ষণ খুবই অল্প এবং সেজন্য ঐ সকল ভূমিতে চলিবার সময় আমরা প্রায়ই পিছলাইয়া পড়ি।

(*b*) **ঘোড়া এবং গাড়ীর গতি** (Motion of a horse and a cart) : ঘোড়া যখন গাড়ীকে সামনের দিকে টানে তখন গাড়ীও ঘোড়ার

চিত্র 35

উপর সমান ও বিপরীত টান প্রয়োগ করে। এই ক্ষেত্রে কিভাবে গতি সম্ভব হয়, তাহা বুঝাইবার জন্য বিশদ আলোচনা করা প্রয়োজন।

চিত্রে B এবং A যথাক্রমে ঘোড়া ও গাড়ী ; গাড়ী ও ঘোড়ার পারস্পরিক টান P. ঘোড়াটি গাড়ীটিকে টানিবার জন্য তাহার ক্ষুর দিয়া মাটিতে আঘাত করে এবং মনে কর এইজন্য তির্যক বল Q প্রয়োগ করে। নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী ভূমিও একটি সমান ও বিপরীত বল প্রয়োগ করে। মনে কর এই প্রতিক্রিয়া বলের অনুভূমিক ও উলম্ব উপাংশ যথাক্রমে F ও R, F উপাংশটি ঘোড়ার গতির অভিমুখিতায় ক্রিয়া করে এবং R ঘোড়ার ওজন Wকে অপসারিত করে।

মনে কর, গাড়ীর গতির বিপরীত দিকে গাড়ীর উপর প্রযুক্ত ভূমির ঘর্ষণ F'. এক্ষণে ঘোড়ার ভর M' এবং স্থির অবস্থা হইতে গতিশীল হইবার পর উহার ত্বরণ f হইলে, কেবলমাত্র ঘোড়ার গতি আলোচনা করিলে নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র হইতে পাই,

$$F-P=M'f\cdots\cdots(i)$$

আবার গাড়ীর ভর M হইলে, উহার গতির জন্য

$$P-F'=Mf\cdots\cdots(ii)$$

এখন, (i) ও (ii) হইতে পাই,

$$F-F'=(M+M')f.$$

সুতরাং $f>0$ হইতে হইলে $F>F'$ হইতে হইবে।

অতএব গতি সম্ভব হইবে, যদি ভূমির প্রতিক্রিয়ার অনুভূমিক উপাংশ গাড়ীর গতিরোধকারী ঘর্ষণ বল অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। সুতরাং ঘোড়াটি যদি ভূমির উপর এইরূপে আঘাত করে যে $F>F'$ হয়, তবেই তাহার পক্ষে গাড়ীটি টানিয়া লইয়া যাইবার জন্য যাত্রা করা সম্ভব হইবে। এক্ষণে, গতি শুরু হইবার পর $F=P=F'$ হইলে ঘোড়াটি গাড়ীটিকে লইয়া সমবেগে চলিতে পারিবে। সুতরাং গতি শুরু করিবার জন্য প্রয়োজনীয় বল গতি সংরক্ষণের জন্য প্রয়োজনীয় বল অপেক্ষা বৃহত্তর।

§ 5·14. একক এবং মাত্রা (Units and dimensions) :

বলবিদ্যায় সময়, দৈর্ঘ্য এবং ভরের একককে যে মৌলিক একক বলা হয় তাহা প্রথমেই বলা হইয়াছে। অন্যান্য সকল একক এই মৌলিক তিনটি একক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যে কোন এককে দৈর্ঘ্য, ভর এবং সময়ের এককের প্রতীক যথাক্রমে [L], [M] এবং [T]. বলবিদ্যায় প্রায়শঃই আলোচিত অন্যান্য এককের মাত্রা নীচে দেওয়া হইল।

বেগ : $\frac{L}{T}=LT^{-1}$; ত্বরণ : LT^{-2} ; ভরবেগ : MLT^{-1} ; বল : MLT^{-2}.

উদাহরণ 1. ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে গতিশীল একটি 300 পাউণ্ড ভরের দ্বিচক্রযানের ভরবেগ নির্ণয় কর।

ঘণ্টায় 30 মাইল $=\frac{30\times1760\times3}{60\times60}$ ফুট/সেকেণ্ড $=44$. ফুট/সেকেণ্ড,

$\therefore$ নির্ণেয় ভরবেগ $=$ ভর $\times$ বেগ $=300\times44$ পাউণ্ড-ফুট/সেকেণ্ড

$=13200$ পাউণ্ড-ফুট/সেকেণ্ড।

উদা. 2. একটি বল 100 কে. জি. ভরের একটি বস্তুতে প্রযুক্ত হইয়া উহার 10 মিটার/সেকেণ্ড^2 ত্বরণ উৎপন্ন করে। বলটির পরিমাপ (a) ডাইন ও b) গ্রাম-ভারে প্রকাশ কর।

এখানে $f=10$ মিটার/সেকেণ্ড$^2=1000$ সে. মি./সেকেণ্ড^2

$\therefore$ বল $=$ ভর $\times$ ত্বরণ $=100\times1000\times1000$ ডাইন $=10^8$ ডাইন

$=\frac{10^8}{981}$ গ্রাম-ভার

$=1{\cdot}02\times10^5$ গ্রাম-ভার।

উদা. 3. একটি সর্বদাসম 520 ডাইন পরিমাপের বল সরলরেখায় গতিশীল একটি বস্তুর উপর $\frac{1}{2}$ মিনিট কাল ধরিয়া ক্রিয়া করিয়া বস্তুটির বেগ সেকেণ্ডে 290 সে. মি. হইতে 3·5 মিটার/সেকেণ্ড-এ পরিবর্তিত করিল। বস্তুটির ভর নির্ণয় কর।

বেগের পরিবর্তন $=3{\cdot}5$ মিটার/সেকেণ্ড -290 সে. মিটার/সেকেণ্ড

$=350$ সে. মিটার/সেকেণ্ড -290 সে. মিটার/সেকেণ্ড

$=60$ সে. মি./সেকেণ্ড

বেগের এই পরিবর্তন $\frac{1}{2}$ মিনিট বা 30 সেকেণ্ডে ঘটিয়াছে।

$\therefore$ ত্বরণ $f=\frac{60}{30}$ সে. মি./সেকেণ্ড$^2=2$ সে.মি./সেকেণ্ড^2.

এক্ষণে, মনে কর m বস্তুটির ভর ; এখানে প্রযুক্ত বল $=520$ ডাইন।

এক্ষণে, $P=mf$ সূত্র হইতে,

$520=m.2.\quad\therefore\quad m=260$ গ্রাম

বস্তুটির ভর 260 গ্রাম।

উদা. 4. একটি ট্রেন ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে একটি অনুভূমিক রেলপথে চলিতেছে। ষ্টীম (বাষ্প) হঠাৎ বন্ধ করিয়া দিলে আর কতদূর গিয়া ট্রেনটি থামিয়া যাইবে ? রোধ প্রত্যেক টনে 5 পাউণ্ড ভার। [C. U. 1956]

ঘণ্টায় 30 মাইল $=$ সেকেণ্ডে 44 ফুট (উদাহরণ 1 দেখ)।

মনে কর মন্দন f. এখানে প্রারম্ভিক বেগ $(u)=44$ ফুট/সেকেণ্ড।
মনে কর ট্রেনের ভর m টন ; সুতরাং রোধ $5m$ পাউণ্ড ভার।

$\therefore$ $P=mf$ সূত্র হইতে পাই,

$5m\times32=mf\times2240$ [1 টন$=2240$ পাউণ্ড],

$$\therefore \quad f=\frac{5\times32}{2240} \text{ ফুট/সেকেণ্ড}^2=\frac{1}{14} \text{ ফুট/সেকেণ্ড}^2 ;$$

এক্ষণে, $v^2=u^2-2fs$ সূত্র হইতে পাই, নির্ণেয় দূরত্ব s হইলে, $u^2=2fs$
[যেহেতু $v=0$; কারণ, ট্রেনটি থামিয়া যায়]।

$$\text{বা,} \quad s=\frac{u^2}{2f}=\frac{44^2}{2\times\frac{1}{14}} \text{ ফুট}=\frac{44\times44\times14}{2\times1760\times3} \text{ মাইল}$$

$$=\frac{77}{30} \text{ মাইল}=2\tfrac{17}{30} \text{ মাইল।}$$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব$=2\frac{17}{30}$ মাইল।

উদা. 5. 3000 পাউণ্ড ওজনের একটি গাড়ী ব্রেক কষিয়া 1000 পাউণ্ড ভার বলের রোধ উৎপন্ন করিতে পারে। 30 মা./ঘণ্টা বেগে চলিতে থাকা-কালীন গাড়ীটি যদি ব্রেক প্রয়োগ করে তবে উহা কতদূর গিয়া থামিবে ?

ধরা যাক্ ব্রেক প্রয়োগের ফলে গাড়ীটির মন্দন f.

$$mf=1000\times g$$

$$\text{বা,} \quad f=\frac{1000\times32}{3000}=\frac{32}{3} \text{ ফু./সেকেণ্ড}^2$$

এখন যদি নির্ণেয় দূরত্ব s হয়, তবে, $u^2=2fs$, সূত্র হইতে পাই

$$44\times44=2fs$$

$$\therefore \quad s=\frac{44\times44\times3}{2\times32}=90.75 \text{ ফুট।}$$

উদা. 6. একটি সর্বদাসম P পাউণ্ডাল বলের ক্রিয়ায় স্থির অবস্থা হইতে গতিশীল m পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু t সেকেণ্ডে x ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে এবং উহার বেগ হয় v ফুট/সেকেণ্ড। প্রমাণ কর যে,

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{mv^2}{P}.$$

উৎপন্ন ত্বরণ f হইলে, $P=mf$. $\therefore$ $f=\frac{P}{m}$······(1)

আবার $v^2=u^2+2fx$ সূত্র হইতে,

$v^2=2fx$ [এখানে $u=0$] $\therefore$ $x=\dfrac{v^2}{2f}=\dfrac{v^2}{2\frac{P}{m}}$ [(1) হইতে]

$\therefore \quad x=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{mv^2}{P}.$

উদা. 7. একটি 100 পাউণ্ড ভরের গোলা সেকেণ্ডে 1600 ফুট বেগে চলিয়া একটি নির্দিষ্ট চাঁদমারিকে (target-কে) আঘাত করিল। গোলাটি চাঁদমারির কতটা ভেদ করিবে ? চাঁদমারির গড় রোধ 12000 টনের ভার।
[C. U. 1933]

রোধ $=12000$ টনের ভার $=12000\times2240$ পাউণ্ড-ভার
$=12000\times2240\times32$ পাউণ্ডাল

$\therefore$ রোধের জন্য উৎপন্ন মন্দন f হইলে, $P=mf$ সূত্র হইতে পাই,

$12000\times2240\times32=100\times f$

$\therefore$ $f=2240\times32\times120$ ফুট/সেকেণ্ড^2

মনে কর গোলাটি চাঁদমারির x ফুট ভেদ করে, সুতরাং যেহেতু শেষ পর্যন্ত গোলাটির গতি শূন্য হয়,

অতএব $u^2=2fx$ সূত্র হইতে পাই,

$1600\times1600=2\times2240\times32\times120\times x.$

$$\therefore x=\frac{1600\times1600}{2\times2240\times32\times120} \text{ ফুট}$$

$$=\frac{100}{4\times14\times12} \text{ ফুট}=\frac{25}{14} \text{ ইঞ্চি}=1\frac{11}{14} \text{ ইঞ্চি}$$

উদা. 8. 4 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে 200 ফুট পতিত হয় এবং অতঃপর কাদার ভিতর 2 ফুট প্রবেশ করিয়া স্থিরাবস্থায় আসে। কাদার মোট ঘাত নির্ণয় কর।

যেহেতু অভিকর্ষজ ত্বরণ $g=32$ ফুট/সেকেণ্ড^2 এবং প্রত্যেক বলের অভিমুখিতায় বলটি কর্তৃক উৎপন্ন ত্বরণের অভিমুখিতা হয়, সুতরাং যেহেতু বস্তুটি স্থিরাবস্থা হইতে 200 ফুট পতিত হয়, অতএব 200 ফুট পতনের মুহূর্তে বস্তুটির বেগ v হইলে, $v^2=0+2.32.200=12800.$

এক্ষণে মনে কর কাদার ঘাতের দ্বারা উৎপন্ন মন্দন f,

সুতরাং $v^2=2fx$, যেখানে $x=2$ ফুট,

$\therefore$ $12800=4f$ বা $f=3200$ ফুট/সেকেণ্ড^2.

সুতরাং বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল ঊর্ধ্বাভিমুখী লব্ধি বল $=mf$

$=4\times3200$ পাউণ্ডাল $=400$ পাউণ্ড-ভার।

এক্ষণে বস্তুটির ভার $=4$ পাউণ্ড-ভার।

$\therefore$ কাষ্ঠের মোট ঘাত $=400+4=404$ পাউণ্ড-ভার।

উদা. 9. 12 স্টোন ওজনের এক ব্যক্তি 8 ফুট/সেকেণ্ড^2 ত্বরণে একটি লিফ্‌টে চড়িয়া উপরদিকে উঠিতে ছিলেন। লিফ্‌টের উপর তাঁহার পায়ের ঘাত নির্ণয় কর। যদি তিনি একই ত্বরণসহ নামিতে থাকিতেন, তবে ঐ ঘাত কত হইত? লিফ্‌টের চেন্ (i) উত্থান সময় মধ্যে এবং (ii) অবনমন-সময় মধ্যে ছিঁড়িয়া গেলে এই ঘাত কত হইবে? [C. U. 1943]

ঐ ব্যক্তি যখন 8 ফুট/সেকেণ্ড^2 ত্বরণসহ নামিতে ছিলেন, তখন লব্ধি বল নিম্নাভিমুখী। মনে কর লিফ্‌টের উপর ঐ ব্যক্তির পায়ের ঘাত R. সুতরাং গতির সমীকরণ, $mg-R=mf$.

$\therefore\quad R=mg-mf=m(g-f)=m\times(32-8)=m.24$

$=12\times\frac{24}{32}$ স্টোন-ভার $=9$ স্টোন-ভার।

যখন ঐ ব্যক্তি উঠিতেছিলেন, তখন তাঁহার উপর প্রযুক্ত লব্ধি বল ঊর্ধ্বাভিমুখী এবং ইহার পরিমাপ $R-mg$. $\therefore\quad R-mg=mf$,

বা, $R=m(g+f)=12\times\dfrac{(32+8)}{32}$ স্টোন-ভার

$=12\times\dfrac{40}{32}$ স্টোন-ভার $=15$ স্টোন-ভার।

চেন্‌টি ছিঁড়িয়া গেলে উভয় ক্ষেত্রে ঘাতটি শূন্য হয়।

উদা. 10. মূলবিন্দু হইতে x-দূরত্বে m-ভরের একটি কণার উপর মূলবিন্দু অভিমুখে $m\left(x+\dfrac{a^4}{x^3}\right)$ পরিমাপের একটি বল প্রযুক্ত হইল। কণাটি মূলবিন্দু হইতে a দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু হইতে যাত্রা শুরু করিলে, প্রমাণ কর যে মূলবিন্দুতে পৌঁছাইতে উহার সময় লাগিবে $\dfrac{\pi}{4}$.

নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র $P=mf$ অনুসারে এখানে $-m\left(x+\dfrac{a^4}{x^3}\right)=mf$.

$\therefore\quad f=-\left(x+\dfrac{a^4}{x^3}\right)\cdots\cdots(1)$

[ঋণাত্মক চিহ্নের কারণ, বলটির অভিমুখিতা মূলবিন্দুর দিকে]

এক্ষণে f-কে $v\frac{dv}{dx}$ লিখিয়া পাই, $\quad v\frac{dv}{dx}=-\left(x+\frac{a^4}{x^3}\right)$

বা, $\quad vdv=-\left(x+\frac{a^4}{x^3}\right)dx$

উভয় পক্ষের সমাকলন করিয়া পাই, $\frac{v^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+\frac{a^4}{2x^2}+c,$

[c, সমাকলন-ধ্রুবক]

যেহেতু কণাটি স্থির অবস্থায় মূলবিন্দু হইতে a দূরত্বে অবস্থিত বিন্দু হইতে যাত্রা করে, সেজন্য $v=0$ যখন $x=a$.

$$\therefore \quad 0=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{2a^2}+c \quad =-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}+c=0+c. \quad \therefore \ c=0.$$

$$\therefore \quad \frac{v^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+\frac{a^4}{2x^2}=\frac{a^4-x^4}{2x^2}, \quad \therefore \quad v^2=\frac{a^4-x^4}{x^2}$$

$$\therefore \quad v=-\frac{\sqrt{a^4-x^4}}{x}$$ [ঋণাত্মক চিহ্নের কারণ, সময় বৃদ্ধি পাইলে x-এর মান হ্রাস পায়]

বা, $\quad \frac{dx}{dt}=-\frac{\sqrt{a^4-x^4}}{x}$, বা, $\quad -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}=dt$

উভয় পক্ষের সমাকলন করিয়া পাই,

$$-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}=t+c' \quad \cdots(1)$$

এক্ষণে $x^2=a^2\sin z$ মনে করিলে, $2xdx=a^2\cos z\,dz$.

এবং $a^4-x^4=a^4-a^4\sin^2 z=a^4(1-\sin^2 z)=a^4\cos^2 z$

$$\therefore \quad \text{বামপক্ষ}=-\tfrac{1}{2}\int\frac{a^2\cos z\,dz}{a^2\cos z}$$

$$=-\tfrac{1}{2}\int dz=-\frac{z}{2}=-\tfrac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

$\therefore \quad$ (1) হইতে পাই, $\quad -\tfrac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x^2}{a^2}=t+c'$

এক্ষণে, যখন $t=0$ তখন $x=a$,

$$\therefore \quad -\tfrac{1}{2}\sin^{-1}1=0+c' \quad \therefore \quad c'=-\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore \quad -\tfrac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x^2}{a^2}=t-\frac{\pi}{4} \quad \cdots\cdots(2)$$

সুতরাং মূল বিন্দুতে পৌঁছাইতে কণাটির t সময় লাগিলে সমীকরণ-(2)-এ $x=0$ বসাইয়া পাই,

$$-\tfrac{1}{2}\sin^{-1}0=t-\frac{\pi}{4}, \quad \text{বা,} \quad 0=t-\frac{\pi}{4}, \quad \text{বা,} \quad t=\frac{\pi}{4}$$

উদা. 11. একটি পাতলা কাঁচের প্লেট 27 পাউণ্ড ভরের ভার বহন করিতে পারে। একটি বস্তু প্লেটটির উপর বসান হইল এবং ক্রমশঃ বর্ধমান ত্বরণে বস্তুটি সহ প্লেটটিকে উপরে তোলা হইল। দেখা গেল যখন ত্বরণ 4 ফুট/সেকেণ্ড^2 তখন প্লেটটি ভাঙ্গিয়া গেল। বস্তুটির ভর নির্ণয় কর।

মনে কর বস্তুটির ভর m পাউণ্ড। যেহেতু বস্তুটি উপরদিকে উঠিতেছিল, অতএব লব্ধি বল ঊর্ধ্বমুখে ক্রিয়াশীল। যখন প্লেটটি 4 ফুট/সেকেণ্ড^2 ত্বরণে উপরদিকে উঠিতেছিল, তখন মনে কর প্লেটটির উপর উহার ঘাত R.

$$\therefore \quad R-mg=mf, \quad \text{বা,} \quad R=m(g+f)=m(32+4)=36m.$$

যেহেতু প্লেটটি 27 পাউণ্ডের বেশী ভার সহ্য করিতে পারে না এবং ত্বরণ 4 ফুট/সেকেণ্ড^2 হইলে উহা ভাঙ্গিয়া যায়,

সুতরাং $27\times32=m\times36$

$$\therefore \quad m=\frac{27\times32}{36} \text{ পাউণ্ড}=24 \text{ পাউণ্ড।}$$

উদা. 12. 100তে 1 নতিবিশিষ্ট একটি নততলে একটি ট্রেন স্থির অবস্থা হইতে 1 মাইল নীচের দিকে নামিল। নততলের রোধ প্রতি টনে 8 পাউণ্ড হইলে, নততলের পাদদেশে অনুভূমিক তলে ট্রেনটি আর কতদূরে যাইবে ?

এখানে নততলের নতি α হইলে, $\sin\alpha=\frac{1}{100}$.

মনে কর ট্রেনের ভর m (পাউণ্ড) ; সুতরাং উহার ভারের নততল বরাবর নিম্নাভিমুখী উপাংশ

$$mg\sin\alpha=\frac{m\times32}{100} \text{ পাউণ্ডাল।}$$

প্রতি টনে 8 পাউণ্ড হারে মোট রোধ$=\dfrac{8\times32\times m}{2240}$ পাউণ্ডাল।

সুতরাং ট্রেনটির উপর ক্রিয়াশীল লব্ধি বল$=\left(\dfrac{32m}{100}-\dfrac{256m}{2240}\right)$ পাউণ্ডাল।

সুতরাং ত্বরণ $f=\dfrac{144\times32}{10\times2240}$ ফুট/সেকেণ্ড^2

যেহেতু ট্রেনটি স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করে, সেজন্য 1 মাইল পথ নীচের দিকে যাত্রা করিবার পর উহার বেগ v হইলে,

$$v^2=2fs=\frac{2\times 144\times 32}{10\times 2240}\times 1760\times 3 \text{ ফুট}$$

অনুভূমিক তলে ট্রেনটির উপর ক্রিয়াশীল একমাত্র বল হইল

$\frac{32\times 8m}{2240}$ পাউণ্ডাল রোধ।

সুতরাং উৎপন্ন মন্দন f' হইলে, $\frac{32\times 8m}{2240}=mf'$, $\therefore$ $f'=\frac{32\times 8}{2240}$.

$\therefore$ নির্ণেয় পথের দৈর্ঘ্য x হইলে,

$$v^2=2f'x, \quad \text{বা,} \quad x=\frac{v^2}{2f'}=\frac{2\times 144\times 32\times 1760\times 3\times 2240}{10\times 2240\times 2\times 32\times 8} \text{ ফুট}$$

$$=\frac{2\times 144}{10\times 2\times 8} \text{ মাইল}=\tfrac{9}{5} \text{ মাইল}=1\tfrac{4}{5} \text{ মাইল।}$$

উদা. 13. একটি দড়ি দ্বারা W ভারের একটি বস্তুকে স্থির অবস্থা হইতে h উচ্চতায় স্থিরাবস্থায় তোলা হইল। দড়িটি যে সর্বাধিক টান সহ্য করিতে পারে তাহার মান হইল nW. প্রমাণ কর যে, যে ক্ষুদ্রতম সময়ে বস্তুটিকে ঐ উচ্চতায় তোলা যাইবে তাহার মান হইল $\left\{\frac{2nh}{(n-1)g}\right\}^{\frac{1}{2}}$.

যেহেতু ভারটিকে স্থির অবস্থা হইতে স্থির অবস্থায় তোলা হইল, সেজন্য ইহার বেগ সর্বাধিক হয়, কিছু দূরত্ব উঠিবার পর। মনে কর এই দূরত্ব x ফুট। সুতরাং সর্বাধিক বেগ v হইলে, $v^2=2fx\cdots\cdots(1)$.

আবার অবশিষ্ট $(h-x)$ উচ্চতা বস্তুটি অভিকর্ষের বিরুদ্ধে উঠে।

$$\therefore \quad v^2=2g(h-x)\ldots\ldots (2).$$

এক্ষণে সময় ক্ষুদ্রতম হইবে, যখন f বৃহত্তম।

এক্ষণে, f-এর বৃহত্তম মানের জন্য,

$$T_{max}-\left(\frac{W}{g}\right)f=W \qquad \left[\text{বস্তুটির ভর}=\frac{W}{g}\right]$$

$$\therefore \quad nW=W\left(\frac{f+g}{g}\right), \quad \text{বা,} \quad ng=f+g, \quad \text{বা,} \quad f=(n-1)g.$$

এক্ষণে, (1) ও (2) হইতে পাই, $2fx=2g(h-x)$

বা, $2(n-1)gx=2g(h-x)$

বা, $(n-1)x=h-x$, বা, $nx=h$ $\therefore$ $x=\frac{h}{n}$.

$$\therefore \quad v^2 = 2fx = 2\frac{(n-1)gh}{n} \cdots\cdots(3)$$

এক্ষণে, প্রথম x উচ্চতা উঠিতে t_1 সময় লাগিলে

$$v = ft_1, \quad \text{বা,} \quad t_1 = \frac{v}{f} = \frac{v}{(n-1)g}.$$

আবার অবশিষ্ট উচ্চতা উঠিতে t_2 সময় লাগিলে,

$$v = gt_2, \quad \text{বা,} \quad t_2 = \frac{v}{g}. \quad \therefore \quad \text{ক্ষুদ্রতম সময়} = t = t_1 + t_2$$

$$= \frac{v}{(n-1)g} + \frac{v}{g} = \frac{v}{g}\left(\frac{1}{n-1} + 1\right) = \frac{nv}{(n-1)g}$$

$$= \frac{n}{(n-1)g}\sqrt{\frac{2(n-1)}{n}gh} \quad [\text{(3) হইতে}] = \sqrt{\frac{2nh}{(n-1)g}}.$$

প্রশ্নমালা 4

1. ঘণ্টায় 40 মাইল বেগে গতিশীল 3 টন ভরের একটি গাড়ীর ভর-বেগ নির্ণয় কর।

2. 200 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুর উপর 5 মিনিট ক্রিয়াশীল একটি বল বস্তুটির মিনিটে 5 গজ বেগ উৎপন্ন করিল।

পাউণ্ডাল ও পাউণ্ড ভারে বলটির পরিমাপ নির্ণয় কর।

3. 10773 ডাইন পরিমাপের একটি সর্বদাসম বল একটি সরলরেখায় একটি 9 পাউণ্ড ভরের বস্তুর উপর 2 মিনিট কাল ক্রিয়াশীল হইল। বস্তুটি প্রথমে স্থির থাকিলে এই অবকাশে উহা কত ফুট দূরত্ব যাইবে? [1 পাউণ্ড= 453·6 গ্রাম, 1 ফুট=30·4 সে. মি.] [C. U. 1963]

4. 200 ডাইন পরিমাপের একটি সর্বদাসম বল সরলরেখায় গতিশীল একটি 24 গ্রাম ভরের বস্তুর উপর প্রযুক্ত হইয়া উহার বেগ প্রতি সেকেণ্ডে 200 মিটার হইতে 300 মিটারে বৃদ্ধি করিল। বলটি কত সময় ধরিয়া ক্রিয়াশীল ছিল নির্ণয় কর।

5. একটি 4 পাউণ্ড ভরের বস্তু স্থির অবস্থা হইতে 100 ফুট পতিত হইল এবং অতঃপর বালির ভিতর 2 ফুট প্রবেশ করিয়া স্থিরাবস্থায় আসিল। বালির ঘাত সর্বত্র সমান হইলে উহার মান নির্ণয় কর।

6. অর্ধ আউন্স ভরের একটি গুলি একটি রাইফেলের 2 ফুট লম্বা নল হইতে 2000 ফুট/সেকেণ্ড বেগে বাহির হইয়া আসে। গুলিটির উপর ক্রিয়াশীল

বল নলের সর্বত্র সমান হইলে, এই বলের পরিমাণ এবং নলটি অতিক্রম করিতে গুলিটির কত সময় লাগে তাহা নির্ণয় কর। [C. U. 1938]

7. স্থিরাবস্থায় একটি দড়ি 20 পাউণ্ড পর্যন্ত ভার বহন করিতে পারে। প্রমাণ কর যে, 8 ফুট/সেকেণ্ড^2 অপেক্ষা অধিকতর ত্বরণসহ দড়িটি যদি কোন একটি 16 পাউণ্ড ভরের বস্তুকে উপরে তুলিতে যায়, তবে দড়িটি ছিঁড়িয়া যাইবে।

8. প্রথমে স্থির অবস্থায় আছে এইরূপ একটি 40 গ্রাম ভরের কণার উপর 100 ডাইন পরিমাপের একটি বল 4 সেকেণ্ড ক্রিয়া করিয়া অপহৃত হইল। 10 সেকেণ্ডে কণাটির কি পরিমাণ সরণ হইবে? তখন উহার বেগ কত?

9. ইঞ্জিন ছাড়া একটি ট্রেনের ভর 435 টন। সমতল রেলপথে স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 7 মিনিটে উহার বেগ হইল ঘণ্টায় 40 মাইল। প্রতি টনে 15 পাউণ্ড ভার রোধ হইলে, ইঞ্জিন এবং ট্রেনের মধ্যে গড় টান নির্ণয় কর।

10. কোন 10 ইঞ্চি পুরু প্রাচীরের রোধ 42 টন-ভার হইলে, 4 পাউণ্ড ভরের যে গোলা প্রাচীরটিকে ঠিক ভেদ করিয়া থামিয়া যায় তাহার বেগ নির্ণয় কর।

11. একটি ট্রেন 200তে 1 (1 in 200) নতির একটি নততলে, বাষ্প বন্ধ করিয়া নামিতেছিল। নততলের রোধ প্রতি টনে 15 পাউণ্ড এবং নততলের শীর্ষে ট্রেনের বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল হইলে দেখাও যে 1000 গজ নামিবার পর ট্রেনের বেগ হইল ঘণ্টায় 27·4 মাইল।

12. 3 আউন্স ভরের একটি গুলি অনুভূমিক সরলরেখায় সেকেণ্ডে 1280 ফুট বেগে একটি নির্দিষ্ট চাঁদমারিতে আঘাত করিল। যদি গুলিটির উপর রোধ 1600 পাউণ্ড হয়, তবে গুলিটি চাঁদমারির কতটা ভেদ করিবে এবং কতক্ষণে স্থির অবস্থায় আসিবে?

13. সেকেণ্ডে 244 মিটার বেগে একটি 30 গ্রাম ভরের গুলি একটি নির্দিষ্ট কাষ্ঠখণ্ডকে আঘাত করিয়া $\frac{1}{150}$ সেকেণ্ডে স্থির অবস্থায় আসিল। কাষ্ঠখণ্ডের রোধকে সর্বত্র সম মনে করিয়া ঐ রোধের মান ডাইন ও গ্রামভারে প্রকাশ কর।

14. একটি m-ভরের কণা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে c দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু হইতে যাত্রা করিল। যদি কণাটির উপর প্রযুক্ত বলের মান ও অভিমুখিতা O বিন্দু হইতে x দূরত্বে অবস্থিত কোন P বিন্দুতে যথাক্রমে $\frac{m\mu}{x^2}$ এবং

$\overrightarrow{OP}$ হয়, তবে কণাটি যখন O বিন্দু হইতে 2c দূরত্বে, তখন কণাটির বেগ নির্ণয় কর।

15. x-অক্ষে গতিশীল m-ভরের একটি কণার উপর একটি আকর্ষণ বল প্রযুক্ত হইল। আকর্ষণ বলটির পরিমাণ,

$$\frac{2m\kappa^2a^2}{x^2} \text{ যখন } x \geqslant a \text{ এবং } \frac{2m\kappa^2x}{a} \text{ যখন } x<a.$$

কণাটি স্থির অবস্থায় মূলবিন্দু হইতে $2a$ দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু হইতে যাত্রা করিলে, প্রমাণ কর যে মূলবিন্দুতে পৌঁছাইবার মুহূর্তে উহার বেগ হইবে $2\kappa\sqrt{a}$.

16. একটি বস্তুর প্রকৃত ভার 13 আউন্স; কিন্তু, যখন উহাকে একটি গতিশীল লিফ্‌টে একটি স্প্রিং তুলা (spring balance) দ্বারা ওজন করা হইল, তখন উহার ভার দেখা গেল 12 আউন্স; ওজন করিবার সময় লিফ্‌টের ত্বরণ নির্ণয় কর।

17. নিরক্ষরেখায় একটি স্প্রিং তুলা দ্বারা ওজন করিয়া একটি বস্তুর ভার দেখা গেল 2 পাউণ্ড। স্প্রিং তুলা দ্বারা কলিকাতায় একই বস্তুকে ওজন করিয়া দেখা গেল বস্তুটির ভার $\frac{1}{8}$ আউন্স বেশী হইতেছে। একটি বলকে কলিকাতায় উল্লম্ব রেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে 16 ফুট পর্যন্ত ছুঁড়িতে পারা যায়। বলটিকে নিরক্ষরেখায় কোন্ উচ্চতা পর্যন্ত ছোঁড়া যাইবে?

ষষ্ঠ অধ্যায়

অভিকর্ষজ ত্বরণসহ উল্লম্বগতি

(Vertical motion under gravity)

§ 6·1. পূর্ব অধ্যায়ে সংক্ষেপে অভিকর্ষ (gravity) সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। কোন ভারী বস্তুকে কোন উচ্চতা হইতে ফেলিয়া দেওয়া হইলে, ঐ বস্তু একটি নির্দিষ্ট (ধ্রুবক) ত্বরণসহ নীচের দিকে পড়িয়া থাকে ; ঐ বস্তুর উপর পৃথিবীর আকর্ষণের ফলেই ঐ ত্বরণের উৎপত্তি হইয়া থাকে। ষোড়শ শতাব্দীর শেষভাগে গ্যালিলিও পতনশীল বস্তুর সূত্রাবলী (Laws of falling bodies) সূত্রবদ্ধ করেন। নীচে সূত্রগুলি বিবৃত হইল।

1. কোন স্থানে কোন পতনশীল বস্তুর অভিকর্ষজ-ত্বরণ (acceleration due to gravity) ধ্রুবক।

2. কোন স্থানে সকল পতনশীল বস্তুর অভিকর্ষজ-ত্বরণ ধ্রুবক।

বিভিন্ন বস্তু লইয়া পরীক্ষার দ্বারা গ্যালিলিও সিদ্ধান্ত করেন যে স্থিরাবস্থা হইতে অবাধে অবতরণের ফলে পতনশীল বস্তু কোন নির্দিষ্ট অবকাশে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাহা পতনকালের (Time of fall) সমানুপাতিক এবং সকল বস্তু সমান অবকাশে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে। অনেক সময় দেখা যায় যে এক টুকরা কাগজ বা পাখির পালকের ন্যায় হাল্কা বস্তুসমূহ লোহা বা সীসার টুকরার ন্যায় ভারী বস্তু অপেক্ষা ধীরে পতিত হয়। কিন্তু এই পার্থক্যের কারণ ঐ বস্তুসমূহের উপর বায়ুর রোধের পার্থক্য। কিন্তু শূন্যে (In vacuo) প্রত্যেক বস্তুই একই বেগে পতিত হয়। নিউটন তাঁহার বিখ্যাত গিনি ও পালকের পরীক্ষা দ্বারা ইহার সত্যতা প্রমাণ করেন। নিউটন একটি লম্বা মোটা কাঁচের নলের ভিতর একটি গিনি ও একটি পালক রাখিয়া নলের দুই মুখ বন্ধ করেন এবং একমুখে একটি ছিপি দ্বারা বায়ু নিষ্কাশন যন্ত্র লাগান। যখন নলটি বায়ুপূর্ণ ছিল তখন নলটিকে হঠাৎ উল্টাইয়া দেখা গেল যে গিনিটি অন্য প্রান্তে আগে পৌঁছিল। কিন্তু যখন বায়ু নিষ্কাশন যন্ত্র দ্বারা বায়ু নিষ্কাশন করিয়া টিউবটিকে পুনরায় উল্টান্ হইল, তখন দেখা গেল যে সর্বদা পাশাপাশি থাকিয়া গিনি ও পালক একসঙ্গে অন্য প্রান্তে পৌঁছিল। নিউটনের পূর্বেই গ্যালিলিও পিসার হেলান মিনার (Leaning tower of Pisa) হইতে বিভিন্ন ভারের বস্তু একই সঙ্গে ফেলিয়া একই সিদ্ধান্তে উপনীত হন।

পূর্বেই উল্লেখ করা হইয়াছে যে অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর মান বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন হয়। কিন্তু বর্তমান অধ্যায়ে অন্য কিছু বলা না থাকিলে আমরা g-এর

মান এফ্. পি. এস্. ও সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে যথাক্রমে 32 ফুট/সেকেণ্ড^2 ও 981 সে. মি./সেকেণ্ড^2 ধরিব।

§ 6·2. **অভিকর্ষজ আকর্ষণে অবাধে পতনশীল বস্তু** (**A body falling freely under gravity**)।

মনে কর একটি m-ভরের কণা O বিন্দু হইতে অবাধে পড়িতেছে।

অবাধে পড়িতেছে বলিতে বুঝিবে যে, কণাটিকে স্থির অবস্থা হইতে ফেলা হইল অর্থাৎ কণাটির প্রারম্ভিক বেগ শূন্য। O বিন্দুকে মূলবিন্দু, O বিন্দু হইতে কল্পিত উল্লম্বরেখাকে x-অক্ষ এবং নিম্নাভিমুখিতাকে x অক্ষের ধনাত্মক অভিমুখিতা মনে কর। এক্ষণে কণাটির উপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষজ বল হইল mg. সুতরাং দ্বিতীয় গতিসূত্র হইতে পাই,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=P=mg, \quad \text{বা,} \quad m\frac{dv}{dt}=P=mg \quad \left[v=\frac{dx}{dt}\right]$$

বা, $\frac{dv}{dt}=g \cdots$ (i) বা, $dv=g\,dt$

সমীকরণ (i) হইতে সমাকলন প্রক্রিয়া দ্বারা পাই, $v=gt+c \cdots$ (ii)

এক্ষণে, যখন $t=0$, তখন $v=0$. $\therefore$ $c=0$.

সুতরাং (ii) হইতে পাই, $v=gt$, বা, $\frac{dx}{dt}=gt$, বা, $dx=gtdt$.

পুনরায় সমাকলন প্রক্রিয়া দ্বারা পাই, $x=\frac{1}{2}gt^2+c' \cdots$ (iii)

এক্ষণে O বিন্দুকে মূলবিন্দু মনে করা হইয়াছে,

অর্থাৎ যখন $t=0$ তখন $x=0$. $\therefore$ $c'=0$. $\therefore$ $x=\frac{1}{2}gt^2$.

সুতরাং কোন কণাকে যদি ভূমি হইতে h উচ্চতায় অবস্থিত কোন স্থান হইতে অবাধে ফেলা হয়, তবে ভূমিতে পৌঁছিতে কণাটির t-সময় লাগিলে,

$$h=\frac{1}{2}gt^2, \quad \text{বা,} \quad t=\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

আবার, ভূমিতে **পতনজ বেগ** (velocity on reaching the ground due to the fall) v হইলে,

$$v^2=2gh, \quad \text{বা,} \quad v=\sqrt{2gh}.$$

§ 6·3. **উল্লম্বদিকে নিম্নাভিমুখে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতি** (**Motion of a body projected vertically downwards**):

মনে কর কোন কণা O বিন্দু হইতে উল্লম্বদিকে নিম্নাভিমুখে u বেগ-সহ নিক্ষিপ্ত হইল। § 6·2 অনুচ্ছেদের আলোচনা হইতে বর্তমান আলোচনার

পার্থক্য এই যে, পূর্বে কণাটির প্রারম্ভিক বেগ শূন্য ছিল, কিন্তু এই ক্ষেত্রে কণাটির প্রারম্ভিক বেগ u.

যেহেতু এই ক্ষেত্রে বস্তুটির একমাত্র ত্বরণ অভিকর্ষজ ত্বরণ g এবং ইহা ধ্রুবক (ঐস্থানে),

সুতরাং বস্তুটি t-সময়ে h উচ্চতা অতিক্রম করিলে যদি উহার বেগ v হয়, তবে চতুর্থ অধ্যায়ে আলোচিত $v=u+ft$, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ ইত্যাদি সূত্র হইতে পাই, $v=u+gt$, $h=ut+\frac{1}{2}gt^2$ এবং $v^2=u^2+2gh$.

আবার t-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব h_t হইলে,

$$h_t=u+\tfrac{1}{2}(2t-1)g.$$

§ 6·4. **উল্লম্বদিকে ঊর্ধ্বাভিমুখে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতি** (Motion of a body projected vertically upwards).

মনে কর একটি কণাকে O বিন্দু হইতে প্রারম্ভিক বেগ u-সহ উল্লম্বদিকে ঊর্ধ্বাভিমুখে নিক্ষেপ করা হইল। এইক্ষেত্রে ঊর্ধ্বাভিমুখিতাকে ধনাত্মক অভিমুখিতা মনে করিলে কণাটির ত্বরণ $f=-g$.

সুতরাং কণাটির গতির জন্য § 6·3 এর সূত্রসমূহের অনুরূপ নিম্নলিখিত সূত্রসমূহ পাওয়া যায়।

$$v=u-gt\ ;\quad h=ut-\tfrac{1}{2}gt^2\ ;$$
$$v^2=u^2-2gh\ ;\quad h_t=u-\tfrac{1}{2}g(2t-1).$$

দ্রষ্টব্য। অনেক সময় নিম্নাভিমুখিতাকে ধনাত্মক ধরা হয়। তখন g ধনাত্মক হইবে এবং u, h ইত্যাদি ভেক্টর রাশিগুলির চিহ্নের প্রয়োজনীয় পরিবর্তন করা আবশ্যক হয়।

§ 6·5. **চরম উচ্চতা** (greatest height).

কোন কণাকে উল্লম্বদিকে ঊর্ধ্বাভিমুখে নিক্ষেপ করিলে কিছুক্ষণ পরে বস্তুটি আর উপরদিকে না উঠিয়া নীচের দিকে পতিত হইতে থাকে। ইহার কারণ উত্থান করিতে করিতে একসময় বস্তুটির ঊর্ধ্বাভিমুখী গতি শূন্য হয় এবং অতঃপর উহা নিম্নাভিমুখী অভিকর্ষজ ত্বরণে নীচের দিকে পতিত হয়। যে উচ্চতার পর ঊর্ধ্বাভিমুখে নিক্ষিপ্ত কোন কণা আর উপরে উঠিতে পারে না, তাহাকে কণাটির গতিপথে **চরম উচ্চতা** বলা হয়।

$v^2=u^2-2gh$ সূত্রে $v=0$ এবং $h=H$ বসাইয়া পাই, চরম উচ্চতা H হইলে,

$0=u^2-2gH$ [কারণ, চরম উচ্চতায় কণাটির বেগ শূন্য]

বা, $2gH=u^2$ অর্থাৎ $H=\dfrac{u^2}{2g}$.

আবার চরম উচ্চতা H-এ পৌঁছিবার জন্য কোন কণাকে নিক্ষেপ করিতে হইলে উহার প্রারম্ভিক বেগ $\sqrt{2gH}$ হওয়া প্রয়োজন। আবার $v=u-gt$ সূত্রে $v=0$ বসাইয়া পাই, চরম উচ্চতায় পৌঁছিতে T সময় লাগিলে,

$$0=u-gT, \quad \text{বা,} \quad T=\frac{u}{g}.$$

সুতরাং চরম উচ্চতায় পৌঁছিতে সময় লাগে $\frac{u}{g}$.

§ 6·6. **কোন প্রদত্ত উচ্চতায় পৌঁছিবার সময়** (Time to attain any given height).

মনে কর উৎক্ষিপ্ত কণার প্রারম্ভিক বেগ u.

সুতরাং h উচ্চতায় পৌঁছিতে t সময় লাগিলে $h=ut-\frac{1}{2}gt^2$

বা, $gt^2-2ut+2h=0 \cdots$(i)

সমীকরণ-(i) t-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ; সুতরাং এই সমীকরণ হইতে t-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে। এই মান দুইটি বাস্তব হইবে যদি $u^2 \geqslant 2gh$ হয়। আবার $u^2 \geqslant 2gh$ হইলে বাস্তব বীজদ্বয় উভয়েই ধনাত্মক হয়। সমীকরণ-(i) এর দুইটি বীজ হওয়ার কারণ নিম্নের উদাহরণ হইতে বুঝিতে পারিবে।

মনে কর একটি বিন্দু O হইতে একটি কণাকে উল্লম্বদিকে ঊর্ধ্বাভিমুখে নিক্ষেপ করা হইল এবং কণাটির অতিক্রান্ত পথে P এরূপ একটি বিন্দু যে $OP=h$. এক্ষণে কণাটি P বিন্দুকে দুইবার অতিক্রম করে, একবার উপরদিকে যাইবার কালে এবং দ্বিতীয়বার উপর হইতে নীচে পতিত হইবার সময়। সমীকরণ-(i)-এর বীজদ্বয় t_1 ও t_2 হইলে যদি $t_2>t_1$ হয়, তবে t_1 হইবে উত্থানকালে P বিন্দুতে পৌঁছিবার সময় এবং t_2 হইবে পতনকালে P বিন্দুতে পৌঁছিবার সময়। $u^2<2gh$ হইলে সমীকরণ-(i)-এর বীজদ্বয় কাল্পনিক হয় এবং ইহার অর্থ কণাটির পক্ষে h উচ্চতায় পৌঁছান সম্ভব নয়। $u=\sqrt{2gh}$ হইলে h, কণাটির অতিক্রান্ত পথের চরম উচ্চতা নির্দেশ করিবে এবং ইহা § 6·5 অনুচ্ছেদে আলোচিত হইয়াছে।

এক্ষণে সমীকরণ-(i) সমাধান করিয়া পাই,

$$t=\frac{u\pm\sqrt{u^2-2gh}}{g},$$

$$\therefore \quad t_1=\frac{u-\sqrt{u^2-2gh}}{g} \text{ এবং } t_2=\frac{u+\sqrt{u^2-2gh}}{g}$$

OA কণাটির চরম উচ্চতা হইলে এই উচ্চতায় পৌঁছিতে সময় লাগে

$T=\frac{u}{g}$ (§ 6·5)

সুতরাং P-বিন্দু হইতে A বিন্দুতে পৌঁছিতে কণাটির সময় লাগে

$$T-t_1=\frac{\sqrt{u^2-2gh}}{g}.$$

আবার A বিন্দু হইতে P বিন্দুতে পৌঁছিতে কণাটির সময় লাগে

$$t_2-T=\frac{\sqrt{u^2-2gh}}{g}.$$

সুতরাং যে-কোন বিন্দু P হইতে চরম উচ্চতায় উঠিতে যে সময় লাগে তাহা চরম উচ্চতা হইতে ঐ P বিন্দুতে নামিতে যে সময় লাগে তাহার সমান।

আবার যদি P এবং O একই বিন্দু হয়, অর্থাৎ $h=0$ হয়, তবে আমরা সমীকরণ-(i) হইতে পাই, $gt^2-2ut=0$, বা, $t(u-\frac{1}{2}gt)=0$

$$\therefore \quad t_1=0, \; t_2=\frac{2u}{g}.$$

$t_1=0$ মানটি কণাটির নিক্ষেপ মুহূর্ত নির্দেশ করে, আর $t_2=\frac{2u}{g}$ মানটি নিক্ষেপক্ষণ হইতে O বিন্দুতে পুনরায় ফিরিয়া আসিতে যে সময় লাগে তাহা নির্দেশ করে।

সুতরাং উত্থিতিকাল (Time of flight) $=\frac{2u}{g}$.

এবং পতনের সময়

$=$(উত্থিতিকাল) $-$(আরোহণের সময়) $=\frac{2u}{g}-\frac{u}{g}=\frac{u}{g}$.

সুতরাং পতনের সময় $=$ আরোহণের সময় $=\frac{u}{g}$.

§ 6·7. **যে-কোন উচ্চতা h-এ বেগ** (velocity at any height h).

u, g এবং h জানা থাকিলে, $v^2=u^2-2gh$ সূত্র হইতে v-এর মান জানা যায়। এক্ষণে, $v^2=u^2-2gh$ সূত্র হইতে পাই, $v=\pm\sqrt{u^2-2gh}$.

v-এর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান দুইটি h উচ্চতায় অবস্থিত কোন P-বিন্দুতে কণাটির যথাক্রমে উত্থান ও পতনের মুহূর্ত দুইটিতে বেগ নির্দেশ করে। সুতরাং **যে-কোন বিন্দু P-তে আরোহণ ও অবতরণ কালে বেগ সমান পরিমাপের কিন্তু বিপরীত অভিমুখিতাবিশিষ্ট।**

আবার H, চরম উচ্চতা হইলে, $v^2=u^2-2gh$ সূত্র হইতে পাই,

$$v^2=2gH-2gh\left[\because \quad H=\frac{u^2}{2g}\right] \quad =2g\,(H-h).$$

কিন্তু H−h হইল h উচ্চতায় অবস্থিত P বিন্দু হইতে চরম উচ্চতার দূরত্ব। সুতরাং যে কোন উচ্চতায় বেগ, চরম উচ্চতায় স্থির অবস্থা হইতে ঐ উচ্চতায় পতনের বেগ।

দ্রষ্টব্য। নিক্ষেপ-বিন্দুতে প্রত্যাবর্তনের মুহূর্তে বেগ নিক্ষেপবেগের সমপরিমাণ কিন্তু বিপরীত অভিমুখিতাবিশিষ্ট।

§ 6.8. ঊর্ধ্ব বা অধঃ অভিমুখে গতিশীল কোন বস্তু হইতে ছাড়িয়া দেওয়া কোন কণার গতি (Motion of a particle dropped from an ascending or a descending object).

উল্লম্বরেখায় গতিশীল কোন বস্তু, (কোন লিফ্‌ট বা বেলুন) হইতে কোন কণাকে ছাড়িয়া দিলে ঐ গতিশীল বস্তুর সাপেক্ষে ঐ কণার প্রারম্ভিক বেগ শূন্য। কিন্তু পৃথিবীকে স্থির মনে করিলে পৃথিবীর সাপেক্ষে ঐ কণার প্রারম্ভিক বেগ শূন্য নয়; প্রকৃত পক্ষে ঐ কণার প্রারম্ভিক বেগ কণাটিকে ছাড়িয়া দিবার মুহূর্তে ঐ গতিশীল বস্তুর বেগের সমান। যদি কোন কণাকে ঊর্ধ্বাভিমুখে v-বেগে গতিশীল কোন বস্তু হইতে ছাড়িয়া দেওয়া হয়, তবে কণাটির গতি § 6.4 এ আলোচিত v-বেগসহ উৎক্ষিপ্ত কণার ন্যায় হইবে। গতিশীল বস্তুটি নিম্নাভিমুখে v-বেগে গতিশীল হইলে কণাটির গতি § 6.3 এ আলোচিত v-বেগসহ নিক্ষিপ্ত কোন কণার গতির ন্যায় হইবে।

উদাহরণ 1. একটি প্রস্তরখণ্ডকে এরূপ বেগে উল্লম্বদিকে ঊর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষেপ করা হইল যাহাতে উহার চরম উচ্চতা 50 ফুট হয়। প্রস্তরখণ্ডটি যখন ঊর্ধ্বাভিমুখে অর্ধপথে, তখন উহার বেগ নির্ণয় কর।

মনে কর প্রারম্ভিক u ফুট/সেকেণ্ড বেগে কণাটিকে ঊর্ধ্বাভিমুখে নিক্ষেপ করা হইল। সুতরাং কণাটির চরম উচ্চতা $\frac{u^2}{2g}$. $\therefore \quad \frac{u^2}{2g}=50$ ফুট··· (1)

মনে কর কণাটি যখন ঊর্ধ্বাভিমুখে অর্ধপথে, তখন উহার বেগ v ফুট/সেকেণ্ড। $\therefore \quad v^2=u^2-2g.\frac{50}{2}=u^2-50g$ · · (2).

(1) হইতে পাই, $u^2=100g$.

$\therefore$ (2) হইতে, $v^2=100g-50g=50g$.

বা, $v=\sqrt{50g}=\sqrt{50.32}=40$.

সুতরাং নির্ণেয় বেগ ঊর্ধ্বাভিমুখে 40 ফুট/সেকেণ্ড।

উদা. 2. একটি বল সেকেণ্ডে 30 মিটার বেগে উল্লম্বরেখায় উর্ধ্বাভিমুখে নিক্ষেপ করা হইল। চরম উচ্চতা এবং উত্থিতিকাল (time of flight) নির্ণয় কর।

এখানে $u=30$ মিটার/সেকেণ্ড।

স্থতরাং চরম উচ্চতা $=\dfrac{u^2}{2g}=\dfrac{30\times 30\times 100\times 100}{2\times 981}$ সে. মি.

$=\dfrac{9\times 10^6}{2\times 981}$ সে. মি. $=\dfrac{9\times 10^4}{2\times 981}$ মিটার $=45\cdot 9$ মিটার (আসন্ন)।

উত্থিতিকাল $=\dfrac{2u}{g}=\dfrac{2\times 30\times 100}{981}$ সেকেণ্ড $=6\cdot 1$ সেকেণ্ড।

উদা. 3. উল্লম্বদিকে উর্ধ্বাভিমুখে একটি বল ছোঁড়া হইল। প্রমাণ কর যে অর্ধ-উচ্চতায় বলটির পৌঁছিতে যে ছুটি সময় লাগিবে তাহাদের অনুপাত $3+2\sqrt{2}:1$.

মনে কর উৎক্ষেপ বেগ u. স্থতরাং বলটির চরম উচ্চতা $H=\dfrac{u^2}{2g}$.

উৎক্ষেপের পর যে-কোন t মুহূর্তে বলটির উচ্চতা h হইলে,

$$h=ut-\tfrac{1}{2}gt^2.$$

যখন $h=\dfrac{H}{2}$, তখন $\dfrac{H}{2}=ut-\tfrac{1}{2}gt^2$,

বা, $\dfrac{u^2}{4g}=ut-\tfrac{1}{2}gt^2$, বা, $gt^2-2ut+\dfrac{u^2}{2g}=0$. ইহা হইতে

সমাধান করিয়া পাই, $t=\dfrac{2u\pm\sqrt{4u^2-2u^2}}{2g}=\dfrac{2u\pm\sqrt{2}u}{2g}$

$$=\frac{\sqrt{2}u(\sqrt{2}\pm 1)}{2g}$$

স্থতরাং এই বীজদ্বয় t_1 ও t_2 হইলে,

$$t_1=\frac{\sqrt{2}u(\sqrt{2}-1)}{2g} \text{ এবং } t_2=\frac{\sqrt{2}u(\sqrt{2}+1)}{2g}$$

$$\therefore\quad t_2:t_1=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\frac{3+2\sqrt{2}}{1}=(3+2\sqrt{2}):1.$$

উদা. 4. একটি মিনার হইতে অবাধে পতনশীল একটি কণা পতনকালের শেষ সেকেণ্ডে মোট দূরত্বের $\frac{9}{25}$ অংশ অতিক্রম করিল। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর। [C. U. 1966]

মনে কর মিনারটির উচ্চতা h এবং পতনের মোট সময় t.

এক্ষণে, যেহেতু কণাটি শেষ সেকেণ্ডে মিনারটির উচ্চতার $\frac{9}{25}$ অংশ অতিক্রম করে, অতএব, $h_t=\frac{1}{2}g\,(2t-1)$ সূত্র হইতে পাই,

$\frac{9}{25}\,h=\frac{1}{2}\,g\,(2t-1)$......(1)

আবার, t-সেকেণ্ডে কণাটি সম্পূর্ণ উচ্চতা অর্থাৎ মিনারের উচ্চতা h অতিক্রম করে।

সুতরাং, $h=\frac{1}{2}gt^2$ ·· (2) [এখানে প্রারম্ভিক বেগ শূন্য]

(1) হইতে পাই, $\frac{9}{25}.\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}g(2t-1)$

বা, $t^2=\frac{25}{9}(2t-1)$, বা, $9t^2-50t+25=0$.

বা, $(9t-5)(t-5)=0$, $\therefore$ $t=\frac{5}{9}$ বা 5.

কিন্তু প্রশ্নানুসারে, $t>1$.

$\therefore$ $t=5$ সেকেণ্ড

$\therefore$ $h=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times 32\times 5^2$ ফুট $=400$ ফুট

বা, $\frac{1}{2}\times 981\times 5^2=490{\cdot}5\times 25$ সে. মি.

$=12262{\cdot}5$ সে. মি. $=122{\cdot}6$ মিটার (আসন্ন)।

উদা. 5. অবাধে পতনশীল কোন কণা কিছুক্ষণ পতনের পর দেখা গেল যে, কণাটি 4 সেকেণ্ডে 768 ফুট অতিক্রম করে। পরবর্তী 4 সেকেণ্ডে কণাটি আর কত পথ অতিক্রম করিবে ?

মনে কর, যে সময় হইতে আরম্ভ করিয়া 4 সেকেণ্ডে কণাটি 768 ফুট অতিক্রম করে সেই সময়ের প্রারম্ভে কণাটির বেগ u ফুট/সেকেণ্ড।

সুতরাং $768=u.\,4+\frac{1}{2}g.4^2=4u+256$,

বা, $4u=512$, বা, $u=128$.

এক্ষণে পর্যবেক্ষণ ক্ষণের পর 8 সেকেণ্ডে কণাটি,

$u.8+\frac{1}{2}\,g.8^2=8u+64.16=8.128+64.16$

$=2048$ ফুট পথ অতিক্রম করে।

আবার প্রথম 4 সেকেণ্ডে কণাটি 768 ফুট পথ অতিক্রম করে। সুতরাং পরবর্তী 4 সেকেণ্ডে কণাটি $(2048-768)=1280$ ফুট অতিক্রম করিবে।

উদা. 6. একটি কণাকে উল্লম্বদিকে ঊর্ধ্বাভিমুখে নিক্ষেপ করা হইল। যদি কোন নির্দিষ্ট উচ্চতায় পৌঁছিতে কণাটির সময় লাগে t এবং পরবর্তী t' সময় পরে উহা পুনরায় ভূমিতে ফিরিয়া আসে, তবে প্রমাণ কর যে, কণাটির চরম উচ্চতা $\frac{g}{8}(t+t')^2$.

এখানে, সম্পূর্ণ উত্থান ও পতন কাল $=t+t'=\mathrm{T}$ (ধর).

এক্ষণে, যদি প্রারম্ভিক উৎক্ষেপ বেগ $=u$ হয়, তবে

$$T=\frac{2u}{g}, \text{ বা, } \quad t+t'=\frac{2u}{g}\cdots\cdots(1)$$

আবার, চরম উচ্চতা $H=\dfrac{u^2}{2g}\cdots\cdots(2)$

এক্ষণে (1) হইতে, $u=\dfrac{g(t+t')}{2}$.

সুতরাং (2) হইতে পাই, নির্ণেয় চরম উচ্চতা

$$H=\frac{g^2(t+t')^2}{4.2g}=\frac{gt(+t')^2}{8}.$$

উদা. 7. একটি কূপের ভিতর একটি প্রস্তরখণ্ড স্থির অবস্থা হইতে ফেলা হইল। প্রস্তরখণ্ডটির জলে আঘাতের শব্দ $2\frac{33}{56}$ সেকেণ্ড পরে শুনা গেল। শব্দের বেগ সেকেণ্ডে 1120 ফুট হইলে কূপটির গভীরতা নির্ণয় কর।

[C. U. 1932]

মনে কর, কূপটির গভীরতা h ফুট। সুতরাং জলে আঘাত করিতে প্রস্তরখণ্ডটির t সেকেণ্ড লাগিলে,

$h=\frac{1}{2}gt^2=16t^2\cdots\cdots(1)$ [$g=32$ ফু/সেকেণ্ড^2 ধরিয়া]

আবার কূপের গভীরতা h ফুট অতিক্রম করিতে শব্দের t' সেকেণ্ড সময় লাগিলে, $h=1120t'\cdots\cdots(2)$.

এক্ষণে প্রশ্নানুসারে, $t+t'=2\frac{33}{56}$.

সুতরাং (1) ও (2) হইতে পাই,

$$16t^2=1120(2\tfrac{33}{56}-t)=1120\times\left(\frac{145-56t}{56}\right),$$

বা, $16t^2=20(145-56t)$, বা, $4t^2=725-280t$,

বা, $4t^2+280t-725=0$, বা, $(2t+145)(2t-5)=0$,

$\therefore \quad t=-\frac{145}{2}$ বা $\frac{5}{2}$.

$\because$ সময় ঋণাত্মক হইতে পারে না,

$\therefore \quad t=\frac{5}{2}. \qquad \therefore \quad h=16t^2=16.\frac{25}{4}=100$।

সুতরাং কূপের গভীরতা 100 ফুট।

উদা. 8. একটি প্রস্তরখণ্ডকে অবাধে একটি কূপের মধ্যে ফেলিবার পর প্রস্তরখণ্ডটি যদি কূপের জলকে 112 ফু./সেকেণ্ড বেগে আঘাত করে এবং আঘাতের শব্দ প্রস্তরখণ্ডটিকে ফেলিবার $3\frac{7}{3}$ সেকেণ্ড পরে শুনা যায়, তবে শব্দের বেগ নির্ণয় কর।

$v=gt$ সূত্র হইতে পাই প্রস্তরখণ্ডটির কূপের জলে আঘাত করিতে t সময় লাগিলে, $112=32t$ [এখানে $v=112$ ফুট এবং $g=32$ ফুট/সেকেণ্ড^2]

$\therefore \quad t=\frac{112}{32}=3\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড।

আঘাতের শব্দ শুনা গেল প্রস্তরখণ্ডটি নিক্ষেপ করিবার $3\frac{2}{3}$ সেকেণ্ড পরে। সুতরাং শব্দের কূপের গভীরতা অতিক্রম করিতে সময় লাগে $3\frac{2}{3}-3\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ সেকেণ্ড।

এক্ষণে কূপের গভীরতা h হইলে, $h=\frac{1}{2}gt^2=16\times(\frac{7}{2})^2=196$ ফুট।

সুতরাং শব্দের বেগ সেকেণ্ডে $\frac{196}{\frac{1}{6}}$ ফুট $=1176$ ফুট।

উদা. 9. উল্লম্বদিকে ঊর্ধ্বাভিমুখে সমবেগে গতিশীল একটি বিমান হইতে নিক্ষিপ্ত একটি বোমা 5 সেকেণ্ডে ভূমিতে পৌঁছিল। বোমাটি যখন ভূমিতে পৌঁছিল, সেইক্ষণে বিমানটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

মনে কর, বিমানটির বেগ v ফুট/সেকেণ্ড। সুতরাং বোমাটির প্রারম্ভিক বেগ ঊর্ধ্বাভিমুখে v ফুট/সেকেণ্ড। এই সময়, বিমানটির উচ্চতা h ফুট হইলে,

$$h=-v.5+\tfrac{1}{2}.g.5^2=-5v+400.$$

এক্ষণে যখন বোমাটি ভূমিতে পৌঁছায়, সেই সময়ের মধ্যে বিমানটি আরও $5v$ ফুট উপরে উঠে।

সুতরাং ঐ মুহূর্তে বিমানটির ভূমি হইতে উচ্চতা $=h$ ফুট $+5v$

$$=-5v+400+5v=400 \text{ ফুট।}$$

উদা. 10. উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে সমবেগে 6 সেকেণ্ড গতিশীল থাকার পর একটি বেলুন হইতে একটি প্রস্তরখণ্ড ফেলিয়া দেওয়া হইল। 10 সেকেণ্ড পরে প্রস্তরখণ্ডটি ভূমিতে পৌঁছিল। বেলুনটির বেগ এবং কোন্ উচ্চতা হইতে প্রস্তরখণ্ডটি ফেলা হইয়াছিল তাহা নির্ণয় কর।

মনে কর বেলুনটির সমবেগ সেকেণ্ডে v ফুট। সুতরাং প্রস্তরখণ্ডটির প্রারম্ভিক বেগ উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখী v ফুট/সেকেণ্ড। প্রস্তরখণ্ডটি t সেকেণ্ডে ভূমিতে পৌঁছিলে এবং h ফুট উচ্চতা হইতে উহাকে ফেলা হইলে,

$$h=-vt+\tfrac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

আবার, এই h উচ্চতায় উঠিতে বেলুনটির সময় লাগিয়াছে 6 সেকেণ্ড।

$\therefore \quad h=v.6=6v \cdots (2).$

যেহেতু প্রস্তর খণ্ডটি 10 সেকেণ্ডে ভূমিতে পৌঁছায়, সুতরাং সমীকরণ (1) হইতে পাই,

$h=-10v+1600 \cdots (3)$ [$g=32$ ফুট/সেকেণ্ড^2 ধরিয়া]

সুতরাং $6v = -10v + 1600$ [(2) হইতে $h = 6v$]

বা, $16v = 1600$, বা, $v = 100$.

এক্ষণে, $h = 6v = 600$, সুতরাং বেলুনটির সমবেগ 100 ফুট/সেকেণ্ড এবং প্রস্তরখণ্ডটি 600 ফুট উচ্চতা হইতে ফেলা হইয়াছিল।

উদা. 11. স্থিরাবস্থা হইতে 5 ফুট/সেকেণ্ড^2 সমত্বরণে অবতরণরত একটি পাটাতনে দণ্ডায়মান একব্যক্তি দুই সেকেণ্ডকাল অবতরণ করিবার পর একটি বলকে ফেলিয়া দিল। পরবর্তী 2 সেকেণ্ডের শেষে বলটির বেগ নির্ণয় কর।

2 সেকেণ্ড অবতরণের পর পাটাতনটির বেগ $u = ft = 5 \times 2$

$= 10$ ফুট/সেকেণ্ড।

সুতরাং বলটির প্রাথমিক বেগ উল্লম্বরেখায় নিম্নাভিমুখে 10 ফুট/সেকেণ্ড। এক্ষণে আরও 2 সেকেণ্ড পর বলটির বেগ v হইলে,

$v = u + gt = 10 + 32.2 = 74$ ফুট/সেকেণ্ড।

উদা. 12. সমত্বরণ f সং উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে গতিশীল একটি বিমান হইতে একটি বল ফেলিয়া দেওয়া হইল; আরও 4 সেকেণ্ড পরে ঐ বিমান হইতে আর একটি বল ফেলা হইল। প্রমাণ কর যে, দ্বিতীয় বলটি ফেলার 2 সেকেণ্ড পরে বল দুইটির দূরত্ব $1f(g+f)$.

মনে কর প্রথম বলটির প্রারম্ভিক বেগ উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে u (কারণ, বিমানটি উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে উঠিতেছিল)। সুতরাং প্রথম বলটি ফেলার সময় বিমানটির বেগ উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে u ফুট/সেকেণ্ড। 4 সেকেণ্ড পরে বিমানটির বেগ হইবে একই দিক ও অভিমুখিতায় সেকেণ্ডে $u + 4f$.

সুতরাং দ্বিতীয় বলটির প্রারম্ভিক বেগ উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে সেকেণ্ডে $(u + 4f)$ ফুট।

6 সেকেণ্ডে প্রথম বলটি h দূরত্ব অতিক্রম করিলে

$$h = -6u + \tfrac{1}{2}g \times 6^2 = -6u + 18g.$$

আবার, 2 সেকেণ্ডে দ্বিতীয় বলটি h' দূরত্ব অতিক্রম করিলে,

$$h' = -2(u + 4f) + \tfrac{1}{2}g \times 2^2 = -2u - 8f + 2g.$$

কিন্তু দ্বিতীয় বলটিকে প্রথম বলটি অপেক্ষা উচ্চ স্থান হইতে ফেলা হইয়াছিল। এক্ষণে বল দুইটিকে যে দুই উচ্চতা হইতে ফেলা হইয়াছিল, তাহাদের অন্তরের সমান উচ্চতা বিমানটি 4 সেকেণ্ডে অতিক্রম করে। এই উচ্চতা h_0 হইলে, $h_0 = 4u + \frac{1}{2}f.4^2 = 4(u + 2f) = 4u + 8f$.

সুতরাং দ্বিতীয় বলটি ফেলিবার 2 সেকেণ্ড পরে বল দুইটির উচ্চতার পার্থক্য

$$= h + h_0 - h'$$

$$=(-6u+18g)+(4u+8f)-(-2u-8f+2g)$$
$$=-6u+18g+4u+8f+2u+8f-2g=16g+16f$$
$$=16(g+f).$$

উদা. 13. একটি কণাকে u-বেগে ঊর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষেপ করা হইল; অপর একটি কণা n-সেকেণ্ড পরে একই স্থান হইতে একই দিক ও অভিমুখিতায় v-বেগে উৎক্ষিপ্ত হইল। প্রথম কণাটির চরম উচ্চতায় কণা দুইটি পরস্পরের সহিত মিলিত হইলে, প্রমাণ কর যে, $v-u=g^2n^2/2(u-ng)$.

প্রথম কণাটির চরম উচ্চতা h হইলে এবং চরম উচ্চতায় পৌঁছিতে t সময় লাগিলে,

$$h=\frac{u^2}{2g} \text{ এবং } t=\frac{u}{g}.$$

দ্বিতীয় কণাটি n-সেকেণ্ড পরে উৎক্ষিপ্ত হওয়ায় প্রশ্নানুসারে, $(t-n)$ সেকেণ্ডে উহা h উচ্চতায় উঠে।

$$\therefore \quad h=v(t-n)-\tfrac{1}{2}g(t-n)^2,$$

বা, $$\frac{u^2}{2g}=v\left(\frac{u}{g}-n\right)-\tfrac{1}{2}g\left(\frac{u}{g}-n\right)^2.$$

বা, $$u^2=2v(u-ng)-(u-ng)^2.$$
$$=(u-ng)(2v-u+ng)$$
$$=(u-ng)(2v-2u)+(u-ng)(u+ng)$$
$$=2(v-u)(u-ng)+u^2-g^2n^2,$$

বা, $$0=2(v-u)(u-ng)-g^2n^2$$

বা, $$2(v-u)(u-ng)=g^2n^2.$$

$$\therefore \quad v-u=\frac{g^2n^2}{2(u-ng)}.$$

উদা. 14. ভূ-পৃষ্ঠের একটি স্থানে h-উচ্চতা হইতে অবতরণ করিতে একটি কণার যে সময় লাগে অপর একটি স্থানে একই উচ্চতা হইতে অবতরণ করিতে উহার তাহা অপেক্ষা t সময় কম লাগে এবং প্রথম স্থানে ঐ একই উচ্চতা হইতে অবতরণ করিতে কণাটি সেকেণ্ডে v ফুট বেশী বেগ অর্জন করে। প্রমাণ কর যে, স্থান দুইটিতে g-র সাংখ্যমান দুইটির গুণোত্তরীয় মধ্যক $\frac{v}{t}$.

মনে কর স্থান দুইটিতে g-র সাংখ্যমান যথাক্রমে g_1 ও g_2. মনে কর প্রথম স্থানে h উচ্চতা অবতরণের জন্য কণাটির সময় লাগে t_1 সেকেণ্ড এবং বেগ হয় v_1 ফুট/সেকেণ্ড; এবং দ্বিতীয় স্থানে একই h উচ্চতা অবতরণের জন্য

কণাটির সময় লাগে t_2 সেকেণ্ড এবং বেগ হয় v_2 ফুট/সেকেণ্ড। সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $v_1-v_2=v$ এবং $t_2-t_1=t$ বা $t_2=t+t_1$.

এক্ষণে, $v_1=g_1t_1 \cdots\cdots (1)$

$v_2=g_2t_2=g_2(t+t_1) \cdots\cdots (2)$

$\therefore \quad v_1-v_2=g_1t_1-g_2(t+t_1)$

বা, $v=t_1(g_1-g_2)-g_2t \cdots\cdots (3)$

আবার, $h=\frac{1}{2}g_1t_1^2=\frac{1}{2}g_2t_2^2$

$\therefore \quad g_1t_1^2=g_2t_2^2=g_2(t+t_1)^2=g_2t_1^2+2g_2tt_1+g_2t^2$

বা, $t_1^2(g_1-g_2)=2g_2tt_1+g_2t^2 \cdots\cdots (4)$.

এক্ষণে, (3) হইতে পাই, $vt_1=t_1^2(g_1-g_2)-g_2tt_1$

$=2g_2tt_1+g_2t^2-g_2tt_1$ [(4) হইতে]

$=g_2tt_1+g_2t^2$

বা, $t_1(v-g_2t)=g_2t^2$ [পক্ষান্তর করিয়া]

$$\therefore \quad t_1=\frac{g_2t^2}{v-g_2t}.$$

t_1-এর এই মান সমীকরণ-(3)এ বসাইয়া পাই,

$$v=\frac{g_2t^2}{v-g_2t}(g_1-g_2)-g_2t.$$

$$=\frac{g_1g_2t^2-g_2^2t^2-g_2tv+g_2^2t^2}{v-g_2t}$$

$$=\frac{g_1g_2t^2-g_2tv}{v-g_2t}$$

বা, $v^2-vg_2t=g_1g_2t^2-g_2tv$, বা, $v^2=g_1g_2t^2$,

বা, $g_1g_2=\frac{v^2}{t^2}$, $\quad \therefore \quad \sqrt{g_1g_2}=\frac{v}{t}$,

সুতরাং g-এর সাংখ্যমান দুইটির গুণোত্তরীয় মধ্যক $\frac{v}{t}$.

প্রশ্নমালা 5

1. 200 ফুট চরম উচ্চতা লাভ করিতে পারে এমন বেগে একটি বল উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে ছোঁড়া হইল। বলটির প্রারম্ভিক প্রক্ষেপ বেগ নির্ণয় কর।

2. একটি বলকে স্থিরাবস্থায় 50 ফুট উচ্চতা হইতে ফেলিয়া দেওয়া হইল। বলটি যখন নিম্নদিকে অর্ধপথে, তখন উহার বেগ নির্ণয় কর।

3. একটি মিনারের শীর্ষ হইতে একটি প্রস্তরখণ্ড উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে সেকেণ্ডে 64 ফুট বেগে উৎক্ষিপ্ত হইল। 6 সেকেণ্ড পরে প্রস্তরখণ্ডটি মিনারের পাদদেশে পৌঁছিল। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

4. কোন একটি সেকেণ্ডে অভিকর্ষজ আকর্ষণে অবাধে পতনশীল একটি কণা 24·5 মিটার অতিক্রম করিল। ঐ সময় পর্যন্ত কণাটির অতিক্রান্ত মোট দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

5. স্থিরাবস্থা হইতে অভিকর্ষজ আকর্ষণে অবাধে পতনশীল একটি কণার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অতিক্রম কালে বেগ হইল 120 ফুট/সেকেণ্ড। ঐ বিন্দু হইতে কত উচ্চ স্থান হইতে ঐ কণাটিকে ফেলা হইয়াছিল।

6. একটি ক্রিকেট বল উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষিপ্ত হইল। উত্থানের শেষ অর্ধ সেকেণ্ডে বলটির অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

7. একটি মিনারের শীর্ষ হইতে অবাধে পতনশীল একটি বস্তু, উহার গতির শেষ সেকেণ্ডে মিনারটির উচ্চতার $\frac{9}{25}$ অংশ অতিক্রম করে। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

8. এক ব্যক্তি উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে একটি বলকে ছুঁড়িয়া দেওয়ার 7 সেকেণ্ড পরে আবার বলটিকে ধরিয়া ফেলিল। বলটি কি বেগে ছোঁড়া হইয়াছিল ?

9. ভূমি হইতে 200 ফুট উচ্চতা হইতে একটি প্রস্তরখণ্ডকে স্থিরাবস্থা হইতে নীচে ফেলা হইল। একই সময়ে একই উল্লম্বরেখায় একটি বলকে 80 ফুট/সেকেণ্ড বেগে উপর দিকে ছোঁড়া হইল। প্রমাণ কর যে, প্রস্তরখণ্ড ও বল মধ্যপথে মিলিত হইবে এবং মিলনের মুহূর্ত নির্ণয় কর।

10. উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষিপ্ত একটি কণার h-উচ্চতায় পৌঁছিতে t-সেকেণ্ড লাগিল। কণাটি আরও t'-সেকেণ্ড পরে ভূমিতে পৌঁছিল।

প্রমাণ কর যে, $h=\frac{1}{2}gtt'$. [C.U. 1963]

11. একটি বস্তুকে 384 ফুট উচ্চতা হইতে স্থিরাবস্থা হইতে ফেলা হইল এবং 4 সেকেণ্ড পরে ভূমি হইতে আর একটি বস্তু উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে 128 ফুট/সেকেণ্ড বেগে ছোঁড়া হইল। বস্তু দুইটি কোথায় এবং কখন মিলিত হইবে ?

12. একটি উল্লম্ব মিনারের শীর্ষ হইতে পতনশীল একটি প্রস্তরখণ্ড যখন x ফুট নামিয়াছে তখন মিনারের শীর্ষ হইতে y-ফুট নিম্নের একটি স্থান হইতে

আর একটি প্রস্তরখণ্ডকে ছাড়া হইল। প্রস্তরখণ্ড দুইটি স্থির অবস্থা হইতে ছাড়া হইলে, উহারা একই সঙ্গে ভূমিতে পৌঁছায়। প্রমাণ কর যে মিনারটির উচ্চতা $\frac{(x+y)^2}{4x}$ ফুট।

13. একটি প্রস্তরখণ্ডকে স্থির অবস্থা হইতে একটি কূপে ফেলা হইল এবং প্রস্তরখণ্ডটি জলে আঘাত করিবার শব্দ $3\frac{7}{10}$ সেকেণ্ড পরে শোনা গেল ; শব্দের বেগ সেকেণ্ডে 1120 ফুট হইলে কূপের গভীরতা নির্ণয় কর।

14. একটি কূপে একটি প্রস্তরখণ্ড স্থির অবস্থা হইতে ফেলা হইল এবং উহা 80 ফুট/সেকেণ্ড বেগে জলে আঘাত করিল এবং আঘাতের শব্দ প্রস্তরখণ্ডটিকে ফেলার $2\frac{7}{12}$ সেকেণ্ড পরে শোনা গেল। শব্দের বেগ নির্ণয় কর।

15. একটি অবাধে পতনশীল বস্তু 3 সেকেণ্ড পতনের পর এক টুকরা কাঁচের উপর পড়িল এবং কাঁচের টুকরাটি ভাঙ্গিয়া গেল। ফলে পতনশীল বস্তুটির বেগ এক-তৃতীয়াংশ হ্রাস পাইল। উহা 4 সেকেণ্ডে কি দূরত্ব যায়, তাহা নির্ণয় কর।

16. একটি প্রস্তরখণ্ডকে একটি h গভীর শূন্য খাদে স্থির অবস্থা হইতে ফেলা হইল এবং খাদটির তলায় প্রস্তরখণ্ডের আঘাতের শব্দ t সেকেণ্ড পরে শোনা গেল। প্রমাণ কর যে, শব্দের গতি সেকেণ্ডে v হইলে $2h\left(1+\frac{gt}{v}\right)=gt^2$, যেখানে h-এর তুলনায় v-এর মান এত বড় যে, $\left(\frac{h}{v}\right)^2$-কে অগ্রাহ্য করা যায়। [C. U. 1967]

17 একটি অবাধে পতনশীল কণা তাহার গতির শেষ সেকেণ্ডে এবং উহার পূর্ববর্তী সেকেণ্ডে যে দুইটি দূরত্ব অতিক্রম করিল তাহাদের অনুপাত 3 : 2. কণাটিকে স্থির অবস্থায় কোন্ উচ্চতা হইতে ফেলা হইয়াছিল ?

18. একটি কণাকে সেকেণ্ডে u ফুট বেগে উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে ছোঁড়া হইল : t সেকেণ্ড পরে আর একটি কণাকে একই স্থান হইতে একই প্রারম্ভিক বেগে একই রেখায় ও অভিমুখিতায় ছোঁড়া হইল। প্রমাণ কর যে কণা দুইটি $\left(\frac{t}{2}+\frac{u}{g}\right)$ সেকেণ্ড পরে $\frac{4u^2-g^2t^2}{8g}$ ফুট উচ্চতায় পরস্পরের সহিত মিলিত হইবে।

19. ঊর্ধ্বাভিমুখে গতিশীল একটি বেলুনের বেগ সেকেণ্ডে 32 ফুট। বেলুনটি হইতে ছাড়িয়া দেওয়া একটি প্রস্তরখণ্ড 17 সেকেণ্ডে ভূমিতে পৌঁছিল। প্রস্তরখণ্ডকে যখন ছাড়িয়া দেওয়া হয়, তখন বেলুনটি কত উচ্চে ছিল?

20. উল্লম্বরেখায় উত্থানরত একটি বেলুন যখন 1500 ফুট উচ্চে ছিল, তখন বেলুনটি হইতে একটি ঢিল ছাড়িয়া দেওয়া হইল। ঢিল 10 সেকেণ্ডে ভূমিতে পৌঁছিলে বেলুনটি আর কত উঁচুতে উঠিয়াছিল নির্ণয় কর।

21. f ত্বরণ সহ ঊর্ধ্বদিকে গতিশীল একটি লিফ্‌ট হইতে লিফ্‌টের সাপেক্ষে v ফুট/সেকেণ্ড বেগে একটি বল ছুঁড়িয়া দিয়া এক ব্যক্তি t সেকেণ্ড পরে বলটিকে পুনরায় ধরিয়া ফেলিল। প্রমাণ কর যে, $f+g=\frac{2v}{t}$. [C. U 1964]

22. তিনটি কণাকে h_1, h_2 ও h_3 উচ্চতা হইতে যুগপৎ যথাক্রমে v_1, v_2, v_3 বেগে উল্লম্বরেখায় নিম্নদিকে নিক্ষেপ করা হইল। কণা তিনটি একই মুহূর্তে ভূমিতে পৌঁছিলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{h_1-h_2}{v_1-v_2}=\frac{h_2-h_3}{v_2-v_3}=\frac{h_3-h_1}{v_3-v_1}.$$

সপ্তম অধ্যায়

প্রাস (Projectile)

§ 7·1. পূর্ববর্তী অধ্যায়ে, অভিকর্ষজ আকর্ষণের প্রভাবে বস্তুর ঋজুরৈখিক গতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। ঐ অধ্যায়ে বস্তুকণাটিকে উল্লম্বভাবে উপরদিকে বা নিম্নের দিকে উৎক্ষিপ্ত করা হইয়াছিল। এই অধ্যায়ের আলোচনায় বস্তুকণাটি যে কোনদিকে প্রক্ষিপ্ত করা হইবে। এখানে ধরিয়া লওয়া হইবে যে বস্তুকণার উপর অভিকর্ষজ আকর্ষণ ছাড়া অন্য কোন বল ক্রিয়াশীল নহে। বায়ুর ঘর্ষণ ইত্যাদির জন্য যে বাধা (resistance) তাহা উপেক্ষা করা হইবে, অর্থাৎ বায়ুহীন শূন্যে বস্তু কণাটির গতি আলোচনা করা হইবে। আরো ধরিয়া লওয়া হইবে যে বস্তুকণাটি সর্বদা প্রক্ষেপণ বিন্দুগামী একটি উল্লম্ব তলে থাকিবে।

শূন্যে যে কোনদিকে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণাকে **প্রাস** (projectile) বলে।

প্রাস যে পথে গমন করে অর্থাৎ প্রাসের গতিপথকে **প্রক্ষেপ পথ** (trajectory) বলে।

যে বিন্দু হইতে প্রাসটি প্রক্ষিপ্ত হয় তাহাকে **প্রক্ষেপ বিন্দু** (point of projection) বলে।

যে বেগে প্রাসটি প্রক্ষিপ্ত হয়, তাহাকে **প্রক্ষেপ বেগ** (velocity of projection) বলে।

প্রক্ষেপ বেগ অনুভূমিক দিকের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে **প্রক্ষেপ কোণ** (angle of projection) বলে।

দ্রষ্টব্য ঃ অনুভূমিক দিক হইতেছে প্রক্ষেপ বিন্দুগামী অনুভূমিক তল এবং প্রাসটি যে উল্লম্ব তলের উপর সর্বদা অবস্থান করে, এই দুই তলের দ্বারা ছেদিত সরল রেখা।

§ 7·2. **বায়ুহীন শূন্যে প্রাসের গতি সম্বন্ধে আলোচনা ঃ**

মনে কর, একটি কণা O বিন্দু হইতে অনুভূমিক দিকের সহিত α কোণে এবং u বেগে প্রক্ষিপ্ত হইয়াছে।

O বিন্দুগামী অনুভূমিক দিক এবং উল্লম্ব দিককে যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ লওয়া হইল। মনে কর এই অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে প্রক্ষেপ মুহূর্ত হইতে t সময় পরে কণাটির অবস্থান হইতেছে P (x, y) বিন্দুতে। P বিন্দু হইতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপর $\overline{PM}$ লম্ব অঙ্কন করা হইয়াছে। সুতরাং OM $= x$ এবং PM $= y$ হইবে।

এক্ষণে কণাটির অনুভূমিক গতি এবং উল্লম্বদিকে গতি পৃথক্‌ভাবে নির্ণয় করা যাক। যেহেতু বস্তুটির প্রক্ষেপ বেগ u অনুভূমিক দিকের সহিত α কোণে নত, সেজন্য অনুভূমিক দিকে কণাটির প্রক্ষেপ বেগের উপাংশ $u \cos \alpha$ এবং উল্লম্বদিকে উপাংশ $u \sin \alpha$.

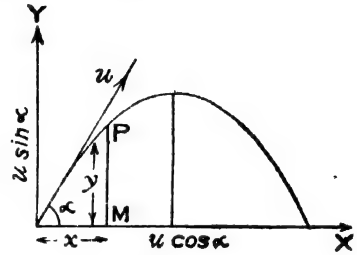
যেহেতু কণার উপর উল্লম্বভাবে নীচের দিকে অভিকর্ষজ আকর্ষণবল ছাড়া অন্য কোন বল ক্রিয়াশীল নহে, সেজন্য কণাটির উল্লম্বদিকে নিম্নের দিকে অভিকর্ষজ ত্বরণ g আছে, অনুভূমিক দিকে কোন ত্বরণ নাই।

এক্ষণে যেহেতু t সময়ে, অনুভূমিক এবং উল্লম্বদিকে সরণ হইতেছে যথাক্রমে x এবং y, সেজন্য অনুভূমিক এবং উল্লম্বদিকে ত্বরণের গাণিতিক প্রকাশ হইতেছে যথাক্রমে $\frac{d^2x}{dt^2}$ এবং $\frac{d^2y}{dt^2}$.

চিত্র 36

সুতরাং $\frac{d^2x}{dt^2}=0 \quad \cdots \quad \cdots (1)$

এবং $\frac{d^2y}{dt^2}=-g \cdots \quad \cdots (2)$

($\because$ $\frac{d^2y}{dt^2}$ হইতেছে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকের ত্বরণ এবং g হইতেছে উল্লম্বভাবে নিম্নদিকের ত্বরণ, $\therefore$ সমীকরণ (2)-এ ঋণাত্মক চিহ্ন লওয়া হইয়াছে)।

সমীকরণ (1)-এর দুই দিকে t-এর সাপেক্ষে সমাকলন লইয়া পাই,

$$\frac{dx}{dt}=c, \quad \text{যেখানে } c=\text{ধ্রুবক।}$$

এক্ষণে $\frac{dx}{dt}$ হইতেছে অনুভূমিক দিকে প্রক্ষেপ বেগের উপাংশ, এবং ইহা ধ্রুবক বলিয়া প্রারম্ভিক মান $u \cos \alpha$-র সমান।

$$\text{সুতরাং } \frac{dx}{dt}=u \cos \alpha \quad \cdots \quad \cdots (3)$$

উভয় দিককে t-এর সাপেক্ষে সমাকলন করিয়া পাওয়া যায়,

$$x=u \cos \alpha . t+c_1, \quad \text{যেখানে } c_1=\text{ধ্রুবক}$$

এখন যখন $t=0$, তখন $x=0 \quad \therefore \quad c_1=0.$

$$\therefore \quad x=u \cos \alpha . t \quad \cdots \quad \cdots (4)$$

সমীকরণ (2)-এর দুই দিকে t-এর সাপেক্ষে সমাকলন লইয়া পাই,

$$\frac{dy}{dt}=-gt+c_2, \quad \text{যেখানে } c_2=\text{ধ্রুবক।}$$

যখন $t=0$, তখন $\frac{dy}{dt}$=প্রক্ষেপ বেগের উল্লম্বদিকে উপাংশ$=u \sin \alpha$.

$\therefore \quad u \sin \alpha=-g.0+c_2=c_2$. c_2-এর মান বসাইয়া পাই

$$\frac{dy}{dt}=u \sin \alpha-gt \quad \cdots \quad \cdots(5)$$

উভয়দিকের সমাকলন করিয়া পাই

$$y=u \sin \alpha.t-g.\frac{t^2}{2}+c_3, \quad \text{যেখানে } c_3=\text{ধ্রুবক।}$$

এখন যখন $t=0$, তখন $y=0$. এইমান বসাইয়া পাই $c_3=0$.

c_3-এর মান বসাইয়া পাই, $y=u \sin \alpha.t-\frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots \quad \cdots(6)$.

মনে কর কণাটির **সর্বোচ্চ উচ্চতা** (greatest height) H এবং সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছাইতে T_1 সময় লাগে। এক্ষণে কণাটি উপরদিকে উঠিতে থাকিবে যতক্ষণ উপর দিকে উল্লম্ব বেগ থাকিবে। সুতরাং সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছাইলে কণাটির উল্লম্ব বেগ$=\frac{dy}{dt}=0$ হইবে।

অর্থাৎ $\frac{dy}{dt}=0$, যখন $t=T_1$

$\therefore$ বেগের এই মান (5)-এ বসাইয়া পাই,

$$0=u \sin \alpha-g.T_1, \quad \text{বা,} \quad T_1=\frac{u \sin \alpha}{g} \quad \cdots \quad \cdots(7)$$

T_1-এর এই মান (6)-এ বসাইয়া পাই,

$$H=u \sin \alpha.\frac{u \sin \alpha}{g}-\frac{1}{2}g\left(\frac{u \sin \alpha}{g}\right)^2$$

$$\therefore \quad \text{সর্বোচ্চ উচ্চতা, } H=\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad \cdots \quad \cdots(8)$$

মনে কর কণাটি T সময় পরে আবার ভূমিতে (অর্থাৎ প্রক্ষেপ বিন্দুগামী অনুভূমিক তলে) ফিরিয়া আসে। ভূমিতে ফিরিয়া আসিলে $y=0$ হইবে।

$\therefore$ (6) হইতে পাই, $0=u \sin \alpha.T-\frac{1}{2}gT^2$,

ইহা সমাধান করিয়া পাই $T=0$ বা $T=\frac{2u \sin \alpha}{g}$

$T=0$ হইল কণাটির প্রক্ষেপ ক্ষণ। সুতরাং কণাটির ভূমিতে ফিরিয়া আসিবার সময় হইতেছে, (অর্থাৎ মোট উড্ডয়ন কাল)

$$T=\frac{2u \sin \alpha}{g} \quad \cdots \quad \cdots(9)$$

(7) এবং (9) হইতে দেখা যাইতেছে, $T=2T_1$.

অতএব মোট উড্ডয়ন কাল হইতেছে সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছাইবার সময়ের দ্বিগুণের সমান। অতএব ভূমি হইতে সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছাইবার সময়, সর্বোচ্চ উচ্চতা হইতে পুনরায় ভূমিতে পৌঁছাইবার সময়ের সমান।

(6) এবং (4) হইতে t অপনয়ন করিয়া পাই,

$$y = x \tan \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u^2 \cos^2 \alpha} \quad \cdots \quad \cdots \quad (10)$$

এক্ষণে কণাটি যদি আবার অনুভূমিক তলে ফিরিয়া আসে তবে $y=0$ হইবে। ∴ (10) হইতে পাই

$$0 = \frac{x}{u^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{2} g \left(\frac{2u^2 \sin \alpha . \cos \alpha}{g} - x \right)$$

অর্থাৎ হয় $x=0$, অথবা, $x = \frac{2u^2 \sin \alpha . \cos \alpha}{g} = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$.

$x=0$ কণাটির O বিন্দুতে অবস্থান বুঝায়। x-এর অপর মানটি, কণাটি পুনরায় ভূমিতে আসিয়া যে বিন্দুতে পড়ে ঐ বিন্দুর প্রক্ষেপ বিন্দু হইতে দূরত্ব বুঝায়। এই দূরত্বকে প্রাসের **পাল্লা** বা প্রক্ষেপ সীমা (Range) বলে। সুতরাং প্রক্ষেপ বিন্দুগামী কোন তলে প্রাসের পাল্লা বলিতে বুঝায় প্রক্ষেপবিন্দু হইতে ঐ তলের যে বিন্দুতে কণাটি পুনরায় পতিত হয় সেই বিন্দুর দূরত্ব।

∴ অনুভূমিক তলের পাল্লা যদি R হয় তবে

$$R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \cdots \quad \cdots (11)$$

দ্রষ্টব্য : (i) সমীকরণ (11) নিম্নলিখিত ভাবে নির্ণয় করা যায়। যেহেতু অনুভূমিক দিকে কোন ত্বরণ নাই,

∴ পাল্লা $R = \frac{2u \sin \alpha}{g}$ সময়ে অনুভূমিক দিকে সরণ

$= \frac{2u \sin \alpha}{g} \times$ অনুভূমিক বেগ

$= \frac{2u \sin \alpha}{g} . u \cos \alpha = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$.

(ii) প্রদত্ত প্রক্ষেপ বেগ u-এর জন্য R-এর মান চরম হইবে যদি $\sin 2\alpha$-র মান চরম হয়। এখন $\sin 2\alpha$-র বৃহত্তম মান হইতেছে 1, সুতরাং প্রদত্ত প্রক্ষেপ বেগ u-এর জন্য R-এর চরম মান

অর্থাৎ, চরম পাল্লা $= \frac{u^2}{g} . 1 = \frac{u^2}{g}$, যখন

$\sin 2\alpha = 1$ অর্থাৎ $2\alpha = 90°$, বা, $\alpha = 45°$.

সুতরাং প্রক্ষেপ-কোণ 45° হইলে, প্রদত্ত প্রক্ষেপ বেগ u-এর জন্য চরম পাল্লা$=\frac{u^2}{g}$.

(iii) মনে কর একটি কণাকে u বেগে প্রক্ষিপ্ত করিয়া অনুভূমিক দিকে R দূরত্বে পাঠাইতে হইবে, অর্থাৎ কণাটির পাল্লা হইবে R.

এখন $R=\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$ সূত্রে R এবং u-এর মান প্রদত্ত।

$\therefore \quad \sin 2\alpha=\frac{Rg}{u^2}=\sin 2\theta$ (মনে কর), $\frac{Rg}{u^2}<1$ ধরিয়া

$\therefore \quad 2\alpha=2\theta$ বা $180°-2\theta \quad \therefore \quad \alpha=\theta$ বা $90°-\theta$.

অতএব প্রদত্ত প্রক্ষেপবেগ এবং পাল্লার জন্য দুইটি সম্ভাব্য প্রক্ষেপ কোণ আছে।

আবার যেহেতু 45° প্রক্ষেপ কোণের জন্য চরম পাল্লা পাই, এবং যেহেতু $45°-\theta=(90°-\theta)-45°$, সেজন্য আমরা বলিতে পারি যে সম্ভাব্য প্রক্ষেপ দিক দুইটি, যে দিকে প্রক্ষিপ্ত করিলে চরম পাল্লা পাওয়া যায় তাহার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

§ 7·3. প্রক্ষেপ পথের যে কোন বিন্দুতে কণার বেগ :

মনে কর প্রক্ষেপ পথের যে কোন বিন্দু $P(x, y)$-তে কণাটির বেগ v এবং ইহা অনুভূমিক দিকের সহিত θ কোণে নত। এক্ষণে,

$v \cos \theta=$ বেগের অনুভূমিক উপাংশ $=u \cos \alpha$,

($\because$ বেগের অনুভূমিক উপাংশ ধ্রুবক এবং সর্বদা $u \cos \alpha$-র সমান)

P বিন্দুতে বেগের উল্লম্ব দিকে উপাংশ হইতেছে $v \sin \theta$, এবং ইহার মান নিম্নলিখিত সমীকরণ হইতে পাই,

$v^2 \sin^2\theta=u^2 \sin^2 \alpha-2gy$, (কারণ এখানে কণাটির উচ্চতা $h=y$).

$$\therefore \quad v^2=v^2 \cos^2 \theta+v^2 \sin^2 \theta=u^2 \cos^2 \alpha+u^2 \sin^2 \alpha-2gy$$
$$=u^2-2gy\ ;$$

এবং অনুভূমিক দিকের সহিত বেগের নতি θ-র মান নিম্নলিখিত ভাবে প্রদত্ত হয়, $\tan \theta=\frac{v \sin \theta}{v \cos \theta}=\pm \frac{\sqrt{u^2 \sin^2 \alpha-2gy}}{u \cos \alpha}$.

$\tan \theta$-র মান ধনাত্মক লওয়া হয় যখন কণাটি ঊর্ধ্বগামী হয় এবং ঋণাত্মক মান লওয়া হয়, যখন কণাটির গতি নিম্নমুখী।

§ 7·4 বায়ুহীন শূন্যে প্রাসের গতিপথ অধিবৃত্তাকার :

অনুচ্ছেদ 7·2-এর সমীকরণ (4) এবং (6) হইতে পাই,

$x=u\cos\alpha.t$ ···(1) $y=u\sin\alpha.t-\frac{1}{2}gt^2$ ·· (2)

(1) এবং (2) হইতে t অপনয়ন করিয়া পাই,

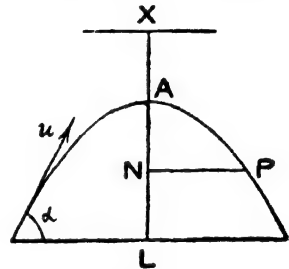
$$y=u\sin\alpha.\frac{x}{u\cos\alpha}-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\alpha}\right)^2,$$

বা, $$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} \quad \cdots\cdots(3)$$

সমীকরণ-(3) হইতেছে $y=Ax+Bx^2$ আকারের।

এক্ষণে এইরূপ আকারের সমীকরণ একটি অধিবৃত্তকে সূচিত করে।

∴ প্রাসের প্রক্ষেপ পথ অধিবৃত্তের আকারে।

বিকল্প প্রমাণ। মনে কর u বেগে একটি কণাকে অনুভূমিক দিকের সহিত α কোণে প্রক্ষিপ্ত করা হইয়াছে। মনে কর কণাটির গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দু A। মনে কর A বিন্দুতে আসিবার t সময় পরে (বা আগে) কণাটির অবস্থান P বিন্দুতে (চিত্রে P বিন্দুর অবস্থান A বিন্দুতে আসিবার t সময় পরে দেখান হইয়াছে, সুতরাং $t>0$). মনে কর $\overrightarrow{XL}$ হইতেছে A বিন্দুগামী উল্লম্ব রেখা। P বিন্দু হইতে $\overrightarrow{AL}$ এর উপর PN লম্ব টানা হইয়াছে।

চিত্র 37

∴ PN = A বিন্দু হইতে t সময়ে কণার অনুভূমিক সরণ। ∵ অনুভূমিক দিকে বেগ-এর পরিমাণ ধ্রুবক এবং $u\cos\alpha$-র সমান, $PN=u\cos\alpha.t$.

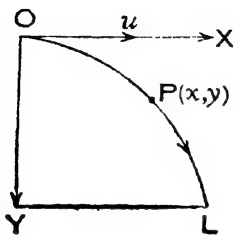
আবার AN = A বিন্দুতে t সময়ে কণার উল্লম্ব দিকে সরণ $=\frac{1}{2}gt^2$ (সর্বোচ্চ বিন্দু বলিয়া, A বিন্দুতে উল্লম্ব বেগ নাই)

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{AN}=\frac{(u\cos\alpha.t)^2}{\frac{1}{2}gt^2}=\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}=\text{ধ্রুবক } (t\text{-নিরপেক্ষ রাশি})।$$

অতএব অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, P বিন্দুর সঞ্চার পথ একটি অধিবৃত্ত যাহার শীর্ষবিন্দু A, অক্ষ AL এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}$.

∴ প্রাসের গতিপথ অধিবৃত্ত।

§ 7·5. ভূপৃষ্ঠ হইতে কিছু উচ্চে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে অনুভূমিক দিকে প্রক্ষিপ্ত কণার গতি সম্বন্ধে আলোচনা :

মনে কর ভূপৃষ্ঠ হইতে h উচ্চে অবস্থিত O বিন্দু হইতে একটি কণাকে u অনুভূমিক বেগে প্রক্ষিপ্ত করা হইয়াছে। O বিন্দুগামী উল্লম্ব রেখা, ভূমিকে Y বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এক্ষণে অনুভূমিক দিকে কোন ত্বরণ না থাকায় গতিপথের যে কোন বিন্দুতে কণাটিতে গতির অনুভূমিক উপাংশ সর্বদা u-এর সমান।

চিত্র 38

প্রারম্ভিক উল্লম্ব বেগ = 0. অতএব O-কে মূলবিন্দু এবং OY-কে y-অক্ষ, এবং O বিন্দুগামী অনুভূমিক দিকে x-অক্ষ ধরিয়া যদি P(x, y) কণাটির t-সময়ে অবস্থান হয়,

তবে, $x = u.t \cdots\cdots(1)$

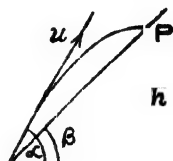
$$y = 0.t + \tfrac{1}{2}\,gt^2 = \tfrac{1}{2}gt^2 \cdots\cdots(2)$$

(1) এবং (2) হইতে t-অপনয়ন করিয়া পাই,

$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{gx^2}{2u^2}$. ইহা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ যাহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2u^2}{g}$. আবার কণাটির ভূমিতে পৌঁছাইতে যদি T সময় লাগে, তবে $h = \frac{1}{2}gT^2$, বা, $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

কণাটি যদি ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত L বিন্দুতে আসিয়া পতিত হয়, তবে কণাটির প্রক্ষেপ-সীমা বা অনুভূমিক পাল্লা $= YL = u.T = u\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

§ 7·6. নততলে ঊর্ধ্বাভিমুখে প্রক্ষিপ্ত কণার গতি সম্বন্ধে আলোচনা :

মনে কর OP একটি নততল এবং ইহা অনুভূমিক তলের সহিত β কোণে নত। মনে কর একটি কণা A বিন্দু হইতে অনুভূমিক দিকের সহিত α কোণ করিয়া u বেগে প্রক্ষিপ্ত হইয়াছে। মনে কর কণাটি নততলে P বিন্দুতে আসিয়া পতিত হইয়াছে। অতএব AP = R (মনে কর) হইতেছে নততলে কণাটির পাল্লা (Range).

চিত্র 39

কণাটির গতিকে নততলের সর্বোচ্চ ঢালের দিকে বিশ্লেষণ করিয়া পাই, নততলের দিকে প্রারম্ভিক বেগের উপাংশ $= u\cos(\alpha - \beta)$.

এবং নততলের লম্বের দিকে প্রারম্ভিক বেগের উপাংশ $= u \sin(\alpha-\beta)$. আবার এই দুই দিকে অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর উপাংশ যথাক্রমে $-g \sin\beta$ এবং $-g\cos\beta$.

নততলের লম্ব দিকে যদি t সময়ে y সরণ হয়, তবে

$y = u\sin(\alpha-\beta).\,t - \frac{1}{2}g\cos\beta\, t^2$......(1)

[$s = ut + \frac{1}{2}gt^2$ সূত্র ব্যবহার করিয়া]

যখন কণাটি নততলে পতিত হইবে, তখন $y=0$ হইবে। T সময় পরে যদি কণাটি নততলে পতিত হয়, অর্থাৎ উড্ডয়ন কাল $=$ T হয়, তবে সমীকরণ···(1) হইতে পাই, $0 = u\sin(\alpha-\beta)\,T - \frac{1}{2}g\cos\beta\, T^2$

বা, $T = \dfrac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$·······(2)

অনুরূপে t সময়ে নততলের দিকে সরণ x হইলে,

$x = u\cos(\alpha-\beta).\,t - \frac{1}{2}g\sin\beta.\,t^2$····· (3)

($\because$ নততলের ঊর্ধ্বদিকে g-এর উপাংশ $-g\sin\beta$)

সমীকরণ (3)-এ, $t = T$ বসাইয়া নততলে কণাটির পাল্লা, R-এর মান পাওয়া যাইবে।

$\therefore \quad R = u\cos(\alpha-\beta).T - \frac{1}{2}g\sin\beta.T^2$

$$= u\cos(\alpha-\beta).\frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta} - \frac{1}{2}g\sin\beta\frac{4u^2\sin^2(\alpha-\beta)}{g^2\cos^2\beta}$$

$$= \frac{2u^2\sin(\alpha-\beta)}{g\cos^2\beta}\left[\cos(\alpha-\beta).\cos\beta - \sin(\alpha-\beta).\sin\beta\right]$$

$$= \frac{2u^2\sin(\alpha-\beta)}{g\cos^2\beta}.\cos\alpha.$$

$$= \frac{u^2}{g\cos^2\beta}\left[\sin(2\alpha-\beta) - \sin\beta\right].$$

বিকল্প পদ্ধতি :

$\because$ অনুভূমিক বেগ $= u\cos\alpha =$ ধ্রুবক

$ON = u\cos\alpha.T$, এবং $R\cos\beta = ON = u\cos\alpha.T$

$$\therefore \quad R = \frac{u\cos\alpha}{\cos\beta}.T = \frac{2u^2\cos\alpha.\sin(\alpha-\beta)}{g\cos^2\beta}$$

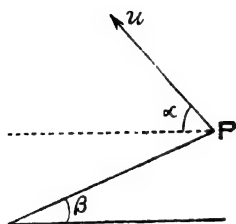
$$= \frac{u^2}{g\cos^2\beta}\left[\sin(2\alpha-\beta) - \sin\beta\right]$$

দ্রষ্টব্য : প্রদত্ত বেগের জন্য প্রক্ষেপ সীমা বা নততলে পাল্লা বৃহত্তম হইবে যখন $\sin(2\alpha-\beta)$-র মান বৃহত্তম অর্থাৎ যখন

$$\sin(2\alpha-\beta)=1=\sin\frac{\pi}{2}. \quad \text{বা,}\quad 2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2} \quad \text{বা,}\quad \alpha=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right).$$

R-এর চরম মান হইবে $\dfrac{u^2}{g\cos^2\beta}(1-\sin\beta)=\dfrac{u}{g(1+\sin\beta)}$

§ 7·7. নততলে নিম্ন দিকে প্রক্ষিপ্ত কণার গতি সম্বন্ধে আলোচনা :

মনে কর একটি কণা P বিন্দু হইতে নততলের নিম্ন দিকে, u বেগে অনুভূমিক তলের সহিত α কোণ করিয়া প্রক্ষিপ্ত হইয়াছে। এখানে অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর উপাংশ, নততলের নিম্নদিকে $g\sin\beta$ এবং প্রক্ষেপ বেগ u-এর, নততলের নিম্নদিকে এবং নততলের লম্বের দিকে উপাংশদ্বয় যথাক্রমে $u\cos(\alpha+\beta)$ এবং $u\sin(\alpha+\beta)$. § 7·6-এর ন্যায় অগ্রসর হইয়া আমরা পাই যে যদি T′ সময় বাদে কণাটি পুনরায় নততলে পতিত হয় তবে,

চিত্র 40

$$0=u\sin(\alpha+\beta).T'-\tfrac{1}{2}g\cos\beta T'^2$$

$$\text{বা,}\quad T'=\frac{2u\sin(\alpha+\beta)}{g\cos\beta}.$$

অনুরূপ ভাবে নততলে কণাটির পাল্লা R′ হইলে,

$$R'=\frac{2u^2}{g\cos^2\beta}\cos\alpha.\sin(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{u^2}{g\cos^2\beta}[\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta].$$

দ্রষ্টব্য : (i) R′-এর চরম মান $=\dfrac{u^2}{g\cos^2\beta}(1+\sin\beta)$,

যখন $2\alpha+\beta=90°$

$$=\frac{u^2}{g(1-\sin\beta)},\quad \text{যখন}\quad \alpha=45°-\frac{\beta}{2}.$$

(ii) R′ এবং T′-এর মান § 7·6-এর R এবং T-এর মানে β স্থলে $-\beta$ বসাইয়া পাওয়া যায়।

উদাহরণমালা

উদা. 1. একটি কণা ভূমির সহিত 45° কোণে সেকেণ্ডে 60 ফুট বেগে প্রক্ষিপ্ত হইল। কণাটির সর্বোচ্চ উচ্চতা এবং পাল্লা বাহির কর।

এখানে প্রক্ষেপ বেগ $=u=60$ ফু./সে. ; $\alpha=45°$, $g=32$ ফু./সে^{2}

$$\therefore \quad \text{পাল্লা, } R=\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}=\frac{60\times 60\times \sin 90°}{32}=\frac{3600}{32}=112.5 \text{ ফুট}$$

$$\text{সর্বোচ্চ উচ্চতা, } H=\frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}=\frac{60\times 60\times (\sin 45°)^2}{2\times 32}$$

$$=\frac{3600\times \frac{1}{2}}{2\times 32}=28.125 \text{ ফুট}$$

উদা. 7. অনুভূমিক দিকের সহিত $\sin^{-1}\frac{4}{5}$ কোণে নত, সেকেণ্ডে 30 মিটার বেগে একটি বলকে নিক্ষেপ করা হইয়াছে। দুই সেকেণ্ড বাদে বলটির অবস্থান এবং গতিবেগ নির্ণয় কর।

এখানে $\alpha=\sin^{-1}\frac{4}{5}$, $\therefore$ $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $u=30$.

$\therefore$ প্রারম্ভিক বেগের অনুভূমিক দিকে উপাংশ $=30\times\cos\alpha$

$=30\sqrt{1-\sin^2\alpha}=30.\frac{3}{5}=18$ মি./সে.

এবং প্রারম্ভিক বেগের উল্লম্ব দিকে উপাংশ $=30\sin\alpha$

$=30\times\frac{4}{5}=24$ মি./সে.

মনে কর দুই সেকেণ্ড বাদে বলটির অনুভূমিক সরণ এবং উল্লম্ব সরণ হইতেছে যথাক্রমে x এবং y এবং উহার বেগ হইতেছে অনুভূমিক দিকের সহিত θ কোণ করিয়া v মি./সে.

$\because$ অনুভূমিক দিকে কোন ত্বরণ নাই,

$\therefore$ $v\cos\theta=u\cos\alpha=18$ মি./সে.

এবং $x=u\cos\alpha.2=18.2=36$ মি.

উল্লম্ব দিকে গতির জন্য, প্রারম্ভিক গতি $=24$ মি./সে.। অভিকর্ষজ ত্বরণ হইতেছে নীচের দিকে 9.80 সে. মি./সে^{2}. বা উপর দিকে -9.80 মি./সে^{2}.

$\therefore$ $y=24.2-\frac{1}{2}\times 9.8\times 2^2=48-19.6=28.4$ মি.

($s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র ব্যবহার করিয়া)

আবার উল্লম্ব দিকে বেগ $v\sin\theta-gt=24-9.8\times 2=4.4$ মি./সে.

$\therefore$ 2 সেকেণ্ড বাদে গতিবেগ $=v$

$=\sqrt{v^2\cos^2\theta+v^2\sin^2\theta}=\sqrt{(4.4)^2+18^2}=18.53$ মি./সে.

এবং এই গতির অনুভূমিক দিকের সঙ্গে নতি

$$\theta=\tan^{-1}\frac{v\sin\theta}{v\cos\theta}=\tan^{-1}\frac{4.4}{18}=\tan^{-1}\frac{11}{45}.$$

উদা 3. অনুভূমিক দিকে সেকেণ্ডে 96 ফুট বেগে গতিশীল একটি বেলুন হইতে একটি প্রস্তরখণ্ড নিক্ষিপ্ত হইল এবং ইহা 4 সেকেণ্ড বাদে ভূমিতে পৌঁছাইল। বেলুনটির উচ্চতা কত এবং কি বেগে প্রস্তর খণ্ডটি ভূমিতে পতিত হয় তাহা নির্ণয় কর।

এখানে প্রস্তর খণ্ডটির প্রারম্ভিক বেগ, বেলুনটির বেগের সমান হইবে। সুতরাং প্রস্তরটির প্রারম্ভিক বেগের অনুভূমিক উপাংশ $=96$ ফু./সেকেণ্ড এবং উল্লম্ব উপাংশ $=0$. বেলুনটি h উচ্চতায় থাকিলে প্রস্তরটি 4 সেকেণ্ড সময়ে h ফুট পড়ে।

সুতরাং $h=0.t+\frac{1}{2}gt^2=16\,4^2=256$ ফুট।

$\therefore$ বেলুনটির উচ্চতা $=256$ ফুট।

আবার প্রস্তর খণ্ডটি θ নতিতে v বেগে যদি ভূমিতে পতিত হয়, তবে

$v\cos\theta=u=96$ ফুট./সে.

এবং $v\sin\theta=0+g.t=32\times4=128$ ফু./সে.

$\therefore\quad v=\sqrt{96^2+128^2}=160$ ফু./সে.

এবং $\tan\theta=\frac{128}{96}=\frac{4}{3}$.

সুতরাং প্রস্তর খণ্ডটি অনুভূমিক দিকের সহিত $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ কোণে 160 ফু./সে. বেগে ভূমিতে পতিত হয়।

উদা. 4. একটি ক্রিকেট বল 7 ফুট উঁচু হইতে অনুভূমিক দিকের সহিত 30° নতিতে 60 ফু./সে বেগে ছোঁড়া হইল এবং ইহাকে একজন খেলোয়াড় ভূমি হইতে 3 ফুট উচ্চে ধরিল। দুইজন খেলোয়াড়ের মধ্যে দূরত্ব কত?

প্রথমে বলের উল্লম্ব দিকে গতি সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক্।

উল্লম্ব দিকে প্রারম্ভিক বেগ $=u\sin\alpha=60\sin30^\circ$ ফু./সে. $=30$ ফু./সে.

যেহেতু বলটি 7 ফুট উচ্চতা হইতে 3 ফুট উচ্চতায় নামে,

$\therefore$ উল্লম্ব দিকে সরণ $=(7-3)$ ফু. $=4$ ফুট, (নীচের দিকে)

এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ $=32$ ফু./সে^{2} (নীচের দিকে)

$\therefore$ বলটির যদি প্রথম খেলোয়াড় হইতে অপর খেলোয়াড়ের নিকট পৌঁছাইতে t সেকেণ্ড সময় লাগে,

$4=-30.t+\frac{1}{2}.32.t^2$ [$s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ ব্যবহার করিয়া]

বা, $16t^2-30t-4=0$, বা, $8t^2-15t-2=0$

বা, $(t-2)(8t+1)=0$ $\therefore$ $t=2$ বা $-\frac{1}{8}$.

$\because$ ঋণাত্মক সময় অর্থহীন, $\therefore\ t=2$ সেকেণ্ড.

এক্ষণে অনুভূমিক দিকে প্রারম্ভিক বেগ $=60.\cos30^\circ=30\sqrt{3}$.

$\therefore$ এই দুই সেকেণ্ড সময়ে অনুভূমিক দিকে সরণ

$=30\sqrt{3}\times2$ ফুট $=60\sqrt{3}$ ফুট.

$\therefore$ খেলোয়াড় দুইজনের মধ্যে দূরত্ব $=60\sqrt{3}$ ফুট।

উদা. 5. কোন একটি বন্দুক হইতে $\tan^{-1} \frac{1}{20}$ নতিতে, ঐ বন্দুকটির সহিত একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত কোন ব্যক্তির দিকে গুলি ছোঁড়া হইল। যদি গুলি এবং গুলির শব্দ ব্যক্তিটির নিকট একই সময় পৌঁছায়, তবে গুলিটির পাল্লা বাহির কর, দেওয়া আছে শব্দের বেগ 1120 ফু./সে.

$\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{20}$, $\therefore \tan \alpha = \frac{1}{20}$

যদি গুলিটির ব্যক্তিটির নিকট পৌঁছাইতে T সময় লাগে, তবে u প্রক্ষেপ বেগ হইলে, $T = \frac{2u \sin \alpha}{g}$, ...(i).

আবার পাল্লা $= R$ হইলে

$R = 1120.T$ (শব্দের গতি হইতে)

$= u \cos \alpha . T$ (গুলির গতি হইতে)

$\therefore \quad u \cos \alpha = 1120 \cdots\cdots(2)$

$\therefore \quad R = 1120.T = 1120 \times \frac{2u \sin \alpha}{g}$ [(i) হইতে]

$= \frac{1120 \times 2}{32} \times u \cos \alpha . \tan \alpha$

$= \frac{1120 \times 2}{32} \times 1120 \times \frac{1}{20}$ [(2) হইতে এবং $\tan \alpha$-র মান বসাইয়া]

$= 3920$ ফুট।

উদা 6. 19·6 মিটার উচ্চতা হইতে অনুভূমিক দিকে ছোঁড়া একটি কণা 100 মিটার অনুভূমিক দূরত্বে গিয়া ভূতলে পতিত হইল। কণাটির প্রক্ষেপ বেগ নির্ণয় কর ($g = 980$ সে.মি./সে^{2}.) [C. U. 1957]

মনে কর, কণাটির প্রারম্ভিক অনুভূমিক বেগ $= u$.

কণাটির প্রারম্ভিক উল্লম্ব বেগ $= 0$ (দেওয়া আছে).

যদি t সময় পরে কণাটি ভূতলে আসিয়া পৌঁছায়, তবে উল্লম্ব দিকের গতি হইতে পাই,

$$19 \cdot 6 = 0.t + \tfrac{1}{2} \times 9 \cdot 80 . t^2$$

বা, $t^2 = \frac{2 \times 19 \cdot 6}{9 \cdot 80} = 4$, $\therefore \quad t = 2$ সেকেণ্ড।

$\because$ অনুভূমিক বেগ ধ্রুবক,

$\therefore$ অনুভূমিক দিকে সরণ $= u\,t = 2u = 100$ (দেওয়া আছে)

$\therefore \quad u = 50$ মি./সে.

উদা. 7. একটি কণা u বেগে অনুভূমিক তলের সহিত α কোণে প্রক্ষিপ্ত হইয়াছে। যদি কণাটির পাল্লা R, উড্ডয়ন কাল T, এবং চরম উচ্চতা H হয়, তবে প্রমাণ কর,

$$g^2T^4-4T^2u^2+4R^2=0$$

এবং $16gH^2-8Hu^2+gR^2=0$ [C. U. '45]

আমরা জানি, $H=u^2\sin^2\alpha/2g$ ... ...(i)

$R=u^2\sin 2\alpha/g$ ... ...(ii)

$T=2u\sin\alpha/g$ ... ...(iii)

(ii) হইতে পাই, $R^2=(u^2.2\sin\alpha\cos\alpha/g)^2$

$$=\frac{4u^4\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{g^2}=\frac{4u^4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}{g^2} \quad \cdots \quad \cdots(iv)$$

(iii) হইতে পাই, $T^2=4u^2\sin^2\alpha/g^2$

$$\therefore \quad \sin^2\alpha=\frac{T^2g^2}{4u^2} \quad \cdots \quad \cdots(v)$$

(iv) এবং (v) হইতে $\sin^2\alpha$ অপনয়ন করিয়া পাই,

$$R^2=\frac{4u^4T^2g^2}{g^2.4u^2}\left(1-\frac{T^2g^2}{4u^2}\right)$$

$$=u^2T^2.\ \frac{4u^2-T^2g^2}{4u^2}=\frac{4u^2T^2-T^4g^2}{4}$$

$$g^2T^4-4u^2T^2+4R^2=0 \quad [\text{প্রমাণিত}]$$

দ্বিতীয় সমীকরণ পাইতে হইলে, (i) এবং (ii) হইতে α-অপনয়ন করিতে হইবে।

(i) হইতে পাই, $\sin^2\alpha=\dfrac{2Hg}{u^2}$.

এই মান (iv)-এ বসাইয়া পাই,

$$R^2=\frac{4u^4}{g^2}.\frac{2Hg}{u^2}\left(1-\frac{2Hg}{u^2}\right)=\frac{8H}{g}(u^2-2Hg)$$

$$16\,gH^2-8u^2H+gR^2=0 \quad [\text{প্রমাণিত}].$$

উদা. 8. একটি বস্তু এমনভাবে প্রক্ষিপ্ত হইয়াছে যে, উহা প্রক্ষেপ বিন্দু হইতে অনুভূমিক দিকে x ফুট দূরত্বে এবং উল্লম্ব দিকে y ফুট দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু দিয়া যায়। যদি প্রক্ষেপ বিন্দুগামী অনুভূমিক তলে ইহার পাল্লা R হয়, তবে দেখাও যে ইহার প্রক্ষেপ কোণ হইতেছে $\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}.\dfrac{R}{R-x}\right)$. [C. U.]

মনে কর বস্তুটি u বেগে অনুভূমিক দিকের সহিত α নতিতে প্রক্ষিপ্ত

হইয়াছে। (x, y) হইতেছে বস্তুটির প্রক্ষেপ-পথের একটি বিন্দু। সুতরাং § 7·4 হইতে পাই, $y = x \tan \alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \alpha}$ ..... (i)

আবার, আমরা জানি $R = \dfrac{2u^2 \cos \alpha . \sin \alpha}{g}$ ..... (ii)

(i) এবং (ii) হইতে u অপনয়ন করিয়া পাই,

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{Rg \cot \alpha}$$

$$[\because \; 2u^2 \cos^2 \alpha = 2u^2 \cos \alpha . \sin \alpha . \cot \alpha = Rg \cot \alpha]$$

বা, $y = x \tan \alpha - \dfrac{x^2 \tan \alpha}{R} = x \tan \alpha \left(1 - \dfrac{x}{R}\right)$,

$$\therefore \quad \tan \alpha = \frac{y}{x\left(1 - \frac{x}{R}\right)} = \frac{yR}{x(R - x)}.$$

$$\therefore \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x} . \frac{R}{R - x}\right).$$

উদা. 9. একটি রাইফেলের গুলির সর্ববৃহৎ পাল্লা হইতেছে 1200 গজ। যদি লক্ষ্যের দিকে ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে গতিশীল একটি ট্রাক হইতে একই উন্নতিতে রাইফেল হইতে গুলি ছোঁড়া হয়, তবে দেখাও যে, গুলির পাল্লা 110 গজ বৃদ্ধি পাইবে। [C U. 1963]

মনে কর গুলির প্রক্ষেপ বেগ $= u$ এবং প্রক্ষেপ কোণ $= \alpha$.

$\therefore$ গুলির অনুভূমিক পাল্লা $R = \dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$.

R এর মান সর্ববৃহৎ হইলে, $\sin 2\alpha = 1$ হইবে, বা $\alpha = 45°$. তখন $R = \dfrac{u^2}{g} = 1200 \times 3$ ফুট (দেওয়া আছে)

$\therefore \quad u^2 = 1200 \times 3 \times 32, \quad \therefore \quad u = \sqrt{3600 \times 32} = 240\sqrt{2}$ ফু./সে.

যেহেতু $45°$ উন্নতিতে গুলিটি ছোঁড়া হইয়াছে,

$\therefore$ প্রারম্ভিক অনুভূমিক বেগ $= 240\sqrt{2} \cos 45° = 240$ ফু./সে.

যদি লক্ষ্যের দিকে 15 মা./ঘ. বা 22 ফু./সে. বেগে গতিশীল ট্রাক হইতে গুলি ছোঁড়া হয়, তবে প্রারম্ভিক অনুভূমিক বেগ 22 ফু./সে. বাড়িয়া যাইবে, অর্থাৎ প্রারম্ভিক অনুভূমিক বেগ হইবে $240 + 22 = 262$ ফু./সে. কিন্তু প্রারম্ভিক উলম্ব বেগ একই থাকিবে অর্থাৎ

$240\sqrt{2} \sin 45° = 240$ ফু./সে. থাকিবে। সুতরাং গুলিটির উড্ডয়নকাল হইবে, $T = \dfrac{2 \times \text{প্রারম্ভিক উলম্ব বেগ}}{g} = \dfrac{2 \times 240}{32}$ সে. $= 15$ সেকেণ্ড।

∴ নূতন পাল্লা $R' = 262 \times 15$ ফু. $= 3930$ ফুট $= 1310$ গজ,

∴ অনুভূমিক পাল্লার বৃদ্ধির পরিমাণ হইবে

$R' - R = (1310 - 1200)$ গজ $= 110$ গজ।

উদা. 10. একটি কণাকে অনুভূমিক দিকের সহিত 45° কোণ করিয়া 64 ফু./সে. বেগে ছোঁড়া হইল। অনুভূমিক তলের সহিত 30° নতিতে অবস্থিত একটি নততলে কণাটির পাল্লা এবং উড্ডয়ন কাল বাহির কর যদি কণাটি নততলের (i) ঊর্ধ্বাভিমুখে (ii) নিম্নাভিমুখে প্রক্ষিপ্ত হয়। উপরোক্ত দুইটি ক্ষেত্রে চরম পাল্লার মান বাহির কর।

নততলের ঊর্ধ্বাভিমুখী গতির জন্য,

$$\text{পাল্লা } R = \frac{u^2}{g \cos^2\beta} \left[\sin(2\alpha - \beta) - \sin\beta\right]$$

এখানে $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $u = 64$ ফু./সে.

$$\therefore \quad R = \frac{64 \times 64}{32 \times \cos^2 30°} \left[\sin(90° - 30°) - \sin 30°\right]$$

$$= \frac{64 \times 64}{32} \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{256}{3}(\sqrt{3} - 1) = 62.63 \text{ ফুট (প্রায়)।}$$

$$\text{উড্ডয়নকাল } T = \frac{2u}{g} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta} = \frac{2 \times 64}{32} \cdot \frac{\sin(45° - 30°)}{\cos 30°}$$

$$= 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \text{ সেকেণ্ড}$$

আবার R-এর চরম মান হইবে যখন $\sin(2\alpha - \beta)$-র মান চরম (u এবং β প্রদত্ত ধরিয়া) অর্থাৎ যখন $2\alpha - \beta = 90°$ বা $2\alpha = 90° + \beta$. এখানে $\beta = 30°$. ∴ R-এর মান চরম হইবে যখন $2\alpha = 90° + 30° = 120°$ বা $\alpha = 60°$.

$$\therefore \quad \text{R-এর চরম মান } R_{max} = \frac{u^2}{g}\left[\frac{1 - \sin\beta}{\cos^2\beta}\right] = \frac{64 \times 64}{32} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$$

$$= 85.33 \text{ ফুট. (প্রায়)।}$$

যখন কণাটি নিম্নাভিমুখে প্রক্ষিপ্ত হয়, তখন

$$\text{পাল্লা } R' = \frac{u^2}{g \cos^2\beta} \left[\sin(2\alpha + \beta) + \sin\beta\right]$$

$$=\frac{64\times 64}{32\times \cos^2 30^\circ}[\sin(90^\circ+30^\circ)+\sin 30^\circ]$$

$$=\frac{256}{3}(\sqrt{3}+1)=233\cdot30 \text{ ফুট (প্রায়)।}$$

উড্ডয়নকাল $T'=\frac{2u}{g}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}=\frac{2\times 64}{32}\cdot\frac{\sin(45^\circ+30^\circ)}{\cos 30^\circ}$

$=2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$ সে,

R'-এর চরম মান $R'_{max}=\frac{u^2}{g(1-\sin\beta)}=\frac{64\times 64}{32(1-\sin 30^\circ)}$

$=\frac{64\times 64\times 2}{32}$ ফুট $=256$ ফুট।

উদা. 11. 30° নতিতে অবস্থিত একটি নততলের পাদদেশ হইতে একটি বলকে প্রতি সেকেণ্ডে 28 ফুট বেগে নততলের উর্ধ্বাভিমুখে ছোঁড়া হইয়াছে। বলটি নততলে লম্বভাবে আসিয়া পতিত হইল। নততলে বলটির পাল্লা বাহির কর।

মনে কর, প্রক্ষেপ কোণ $=\alpha$. এক্ষণে নততল এবং উহার লম্বের দিকে বিশ্লেষণ করিয়া পাই, প্রারম্ভিক বেগ u-এর নততলের দিকে বিশ্লেষিতাংশ $u\cos(\alpha-\beta)$ এবং উহার লম্বের দিকে বিশ্লেষিতাংশ $u\sin(\alpha-\beta)$। ত্বরণ g এর নততলে এবং উহার লম্বদিকে বিশ্লেষিতাংশদ্বয় যথাক্রমে $-g\sin\beta$ এবং $-g\cos\beta$. যদি t সময় পরে নততলের দিকে এবং উহার লম্বাভিমুখে কণাটির সরণ যথাক্রমে x এবং y হয়,

তবে $x=u\cos(\alpha-\beta).t-\frac{1}{2}g\sin\beta.t^2\cdots\cdots(i)$

$y=u\sin(\alpha-\beta)t-\frac{1}{2}g\cos\beta t^2\cdots\cdots(ii)$

t সময়ে যদি নততলে এবং উহার লম্বাভিমুখে কণাটির বেগের বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে v_x এবং v_y হয়, তবে

$v_x=u\cos(\alpha-\beta)-g\sin\beta t\cdots(iii)$

$v_y=u\sin(\alpha-\beta)-g\cos\beta t\cdots\cdots(iv)$

এক্ষণে যেহেতু কণাটি লম্বভাবে নততলে পতিত হয়,

সেজন্য যখন $y=0$, তখন $v_x=0$ হইবে।

$\therefore$ (ii) এবং (iii) হইতে পাই,

$u\sin(\alpha-\beta)t-\frac{1}{2}g\cos\beta t^2=0\cdots\cdots(v)$

$u\cos(\alpha-\beta)-g\sin\beta t=0\quad\cdots\quad\cdots(vi)$

(vi) হইতে পাই, $t=\frac{u\cos(\alpha-\beta)}{g\sin\beta}$......(vii)

(v) হইতে পাই, $t=\frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$......(viii)

(vii) এবং (viii) হইতে পাই, $\frac{u\cos(\alpha-\beta)}{g\sin\beta}=\frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$.

বা, $2\tan(\alpha-\beta)=\cot\beta=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$,

[নততলের নতি $\beta=30^\circ$ দেওয়া আছে]

$\therefore\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$......(ix)

এক্ষণে (i) এবং (vii) হইতে পাই,

$x=u\cos(\alpha-\beta).\frac{u\cos(\alpha-\beta)}{g\sin\beta}-\frac{1}{2}g\sin\beta\frac{u^2\cos^2(\alpha-\beta)}{g^2\sin^2\beta}$.

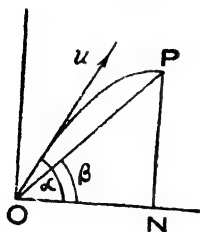
$=\frac{u^2\cos^2(\alpha-\beta)}{2g\sin\beta}=\frac{u^2\cos^2(\alpha-\beta)}{g}$ [$\because\quad \sin\beta=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$].

এখন (ix) হইতে পাই $\cos^2(\alpha-\beta)=\frac{1}{1+\tan^2(\alpha-\beta)}=\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=\frac{4}{7}$.

$\therefore\quad x=\frac{u^2}{g}\times\frac{4}{7}=14$ ফুট ($\because\quad u=28$ ফু. সে.)

$\therefore$ নততলে কণাটির পাল্লা হইতেছে 14 ফুট।

উদা. 12. কোণ এক স্থান হইতে h ফুট উচ্চতা বিশিষ্ট পাহাড়ের উপর অবস্থিত শত্রুর ঘাঁটির কৌণিক উন্নতি β. দেখাও যে, ঐ অবস্থানে গোলা বর্ষণ করিতে হইলে গোলার প্রারম্ভিক বেগ $\sqrt{gh(1+\operatorname{cosec}\beta)}$-অপেক্ষা কম হইতে পারিবে না। [C. U. 1946]

মনে কর O স্থান হইতে OP পাহাড়ের উপর অবস্থিত শত্রুর ঘাঁটি P-তে আঘাত হানিতে হইলে গোলাকে u বেগে α নতিতে ছুঁড়িতে হইবে।

চিত্র 41

$\therefore$ গোলার পাল্লা $R=OP=h\operatorname{cosec}\beta$

$=\frac{2u^2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta}$

[নততলে পাল্লার সূত্র হইতে]

$$u^2=\frac{gh\operatorname{cosec}\beta.\cos^2\beta}{2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}=\frac{gh\operatorname{cosec}\beta.\cos^2\beta}{\sin(2\alpha-\beta)-\sin\beta}.$$

g, h, β-র মান প্রদত্ত বলিয়া, u-এর মান সর্বনিম্ন হইবে যখন

$\sin(2\alpha-\beta)-\sin\beta$-র মান সর্ব বৃহৎ হইবে, অর্থাৎ যখন $\sin(2\alpha-\beta)$-র মান সর্ব বৃহৎ হইবে, (কারণ $\sin\beta$-র মান প্রদত্ত)। একণে $\sin(2\alpha-\beta)$-র সর্বোচ্চ মান 1.

∴ u^2-এর সর্ব নিম্ন মান হইতেছে,

$$u^2_{min}=\frac{gh\operatorname{cosec}\beta.\cos^2\beta}{1-\sin\beta}=\frac{gh\operatorname{cosec}\beta\,(1-\sin^2\beta)}{1-\sin\beta}$$

$$=gh\operatorname{cosec}\beta\,(1+\sin\beta)=gh(1+\operatorname{cosec}\beta)$$

∴ $u_{min}=\sqrt{gh(1+\operatorname{cosec}\beta)}$.

∴ শত্রুর ঘাঁটিতে আঘাত হানিতে গেলে গোলার প্রারম্ভিক বেগ $\sqrt{gh(1+\operatorname{cosec}\beta)}$র চেয়ে কম হইতে পারিবে না।

প্রশ্নমালা 6

1. একটি বলকে অনুভূমিক দিকের সহিত 45° নতিতে 200 ফু./সে. বেগে ছোঁড়া হইয়াছে। বলটির সর্বাধিক উচ্চতা এবং সমগ্র উড্ডয়ন কাল নির্ণয় কর।

2. একটি বালক উল্লম্ব দিকে একটি বলকে 40 গজ উচ্চে উঠাইতে পারে। দেখাও যে, সে অনুভূমিক দিকে সর্বাধিক 240 ফুট দূরে বলটিকে পাঠাইতে পারে।

3. একটি বলকে ভূমির সহিত $\cos^{-1}\frac{3}{5}$ নতিতে 100 ফু./সে. বেগে প্রক্ষেপ করা হইল। দুই সেকেণ্ড পরে প্রক্ষেপ বিন্দু হইতে বলটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

4. একটি পাথরকে সেকেণ্ডে 50 ফুট বেগে অনুভূমিক দিকের সহিত 30° কোণ করিয়া ছোঁড়া হইয়াছে। পাথরটির গতিপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। পাথরটি কতক্ষণ শূন্যে থাকিবে তাহা নির্ণয় কর।

5. দেখাও যে যখন চরম পাল্লা 100 কিলোমিটার, তখন উড্ডয়ন কাল হইতেছে প্রায় 2 মিনিট 23 সেকেণ্ড।

6. একটি ফুটবলে এমন ভাবে লাথি মারা হইয়াছে যে উহা 20 ফুট দূরে অবস্থিত 12 ফুট উচ্চতা বিশিষ্ট একটি গোলপোষ্টের ঠিক শীর্ষ ঘেঁষিয়া চলিয়া যায়। লাথি মারিবার ফলে যদি ফুটবলটিতে 40 ফু./সে. বেগ সঞ্চারিত হয়, তবে বলটিকে কোন্ দিকে লাথি মারা হইয়াছিল তাহা নির্ণয় কর।

7. অনুভূমিক তলে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে প্রক্ষিপ্ত একটি প্রাস, ঐ বিন্দু হইতে 64 গজ দূরে অনুভূমিক তলের উপর অবস্থিত একটি বিন্দুতে 4 সেকেণ্ড পরে ফিরিয়া আসে। প্রাসটির প্রক্ষেপ বেগ এবং প্রক্ষেপ কোণ নির্ণয় কর।

8. R পাল্লা বিশিষ্ট একটি বন্দুকের গুলির উড্ডয়ন কাল T হইলে প্রমাণ কর যে, উহা যে দিকে প্রক্ষিপ্ত হইয়াছিল সেই দিক অনুভূমিক দিকের সহিত $\tan^{-1}\left(\frac{gT^2}{2R}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে।

9. ভূমি হইতে 19·6 মিটার উচ্চতা হইতে অনুভূমিক দিকে প্রক্ষিপ্ত একটি প্রাস 100 মিটার (অনুভূমিক) দূরত্বে ভূমিতে আসিয়া পতিত হয়। প্রাসটির প্রক্ষেপ বেগ এবং প্রক্ষেপ কোণ নির্ণয় কর। [$g=980$ সে. মি./(সে.)^2]
[C. U. 1967]

10. অনুভূমিক দিকে ঘণ্টায় 100·8 কিলোমিটার বেগে গতিশীল একটি বেলুন হইতে একটি প্রস্তর খণ্ড ছাড়িয়া দেওয়া হইল এবং উহা $5\frac{5}{7}$ সেকেণ্ড বাদে ভূমিতে আসিয়া পৌঁছাইল। বেলুনটির উচ্চতা বাহির কর এবং প্রস্তর খণ্ডটি কি বেগে ভূমিতে পৌঁছাইলে তাহা নির্ণয় কর।

11. 96 ফুট উচ্চ একটি বাড়ির শীর্ষদেশ হইতে একটি বলকে অনুভূমিক তলের সহিত 30° নতিতে 80 ফু./সে. বেগে ছোঁড়া হইয়াছে। কখন, কোথায় এবং কি বেগে বলটি ভূমিতে পড়িবে তাহা নির্ণয় কর।

12. একটি মিনারের শীর্ষদেশ হইতে অনুভূমিক দিকের সহিত 30° নতিতে 30 ফু./সে. বেগে একটি কণাকে ছোঁড়া হইলে উহা 4 সেকেণ্ড বাদে ভূমিতে পৌঁছায়। মিনারটির উচ্চতা কত ?

13. একজন একটি ক্রিকেট বল 6 ফুট উঁচু হইতে অনুভূমিক দিকের সহিত 30° নতিতে 60 ফু./সে বেগে ছুঁড়িল এবং ইহাকে একজন খেলোয়াড় ভূমি হইতে 2 ফুট উপরে ধরিল। খেলোয়াড় দুইজনের মধ্যে দূরত্ব কত ছিল ?

14 272 ফুট উচ্চ স্তম্ভের শীর্ষ হইতে ছোঁড়া একটি বন্দুকের গুলি 17 সেকেণ্ড পরে স্তম্ভের পাদবিন্দু হইতে 4352 ফুট দূরে পতিত হয়। প্রক্ষেপ বেগ এবং প্রক্ষেপ কোণ নির্ণয় কর।

15. দেখাও যে একটি প্রাসের উড্ডয়ন পথের সমীকরণকে

$y=x\tan\alpha.\frac{R-x}{R}$, আকারে লিখা যায়, যেখানে R হইতেছে অনুভূমিক [পাল্ল]া, এবং α হইতেছে প্রক্ষেপ কোণ। [C. U. 1962]

16. প্রদত্ত পাল্লা R-এর জন্য প্রদত্ত বেগে প্রক্ষিপ্ত একটি প্রাসের দুইটি গতিপথের সর্বোচ্চ উচ্চতা হইতেছে h এবং h'. প্রমাণ কর যে $R=4\sqrt{hh'}$.

17. একটি বস্তুকে অনুভূমিক দিকের সহিত α নতিতে এমন ভাবে উৎক্ষেপ করা হইয়াছে যে, উহা পরস্পরের সহিত $2a$ দূরত্বে অবস্থিত a উচ্চতা বিশিষ্ট দুইটি দেওয়ালের উপর ঘেঁষিয়া যায়। দেখাও যে বস্তুটির পাল্লা হইতেছে $2a\cot\frac{\alpha}{2}$.

18. একটি কণাকে অনুভূমিক দিকের সহিত 60° নতিতে 32 ফু./সে. বেগে প্রক্ষেপ করা হইয়াছে। অনুভূমিক তলের সহিত 30° নতিতে অবস্থিত নততলে কণাটির পাল্লা এবং উড্ডয়ন কাল নির্ণয় কর যখন কণাটি নততলের (i) ঊর্ধ্বদিকে (ii) নিম্নাভিমুখে প্রক্ষিপ্ত হয়। উভয় ক্ষেত্রেই কণাটির চরম পাল্লা নির্ণয় কর।

19. সমুদ্র পৃষ্ঠে অবস্থিত একটি কামান হইতে গোলা ছোঁড়া হইল। এখন কামানটিকে সমুদ্র পৃষ্ঠ হইতে h ফুট উচ্চতায় লইয়া গিয়া অনুভূমিক দিকের সহিত একই নতি α করিয়া গোলা ছোঁড়া হইল। দেখাও যে গোলার পাল্লার বৃদ্ধি হইবে $\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{2gh}{u^2 \sin^2 \alpha}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]$.

20. একটি বলকে অনুভূমিক দিকের সহিত α কোণ করিয়া, প্রক্ষেপ বিন্দুগামী এবং β নতিতে অবস্থিত একটি নততলের উপর দিকে প্রক্ষিপ্ত করা হইয়াছে। দেখাও যে যখন বলটি নততলে পতিত হয় তখন উহার গতি যদি

(i) অনুভূমিক দিকে হয়, তবে $\tan \alpha = 2 \tan \beta$.

(ii) নততলের অভিলম্বের দিকে হয়, তবে $\tan \alpha = 2 \tan \beta + \cot \beta$.

21. একটি কণাকে প্রারম্ভিক u বেগে প্রক্ষেপ করা হইয়াছে। যদি কণাটির সর্বোচ্চ উচ্চতা H হয় এবং প্রক্ষেপ বিন্দুগামী অনুভূমিক তলে পাল্লা R হয়, তবে দেখাও যে, $R=4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g}-H\right)}$. [C. U. 1940]

22. সমুদ্রপৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতাবিশিষ্ট পাহাড়ের উপর একটি দুর্গ আছে। দেখাও যে কোন একটি জাহাজস্থ কামান হইতে ঐ দুর্গে কামান দাগিতে হইলে, জাহাজের সর্বাধিক অনুভূমিক দূরত্ব হইবে $2\sqrt{k(k-h)}$, যেখানে $\sqrt{2gk}$ হইতেছে গোলার প্রক্ষেপ বেগ। [C. U. 1964]

23. অনুভূমিক তলের সহিত 30° নতিতে অবস্থিত একটি নততলের পাদদেশ হইতে একটি কণাকে অনুভূমিক দিকের সহিত 60° কোণ করিয়া সেকেণ্ডে 3·27 মিটার বেগে প্রক্ষেপ করা হইয়াছে। কত বেগে কণাটি নততলে আসিয়া আঘাত করিবে তাহা নির্ণয় কর।

24. v বেগে প্রক্ষিপ্ত একটি কণা, প্রক্ষেপ বিন্দুগামী এবং অনুভূমিক তলের সহিত β নতিতে অবস্থিত একটি নততলে লম্ব ভাবে পতিত হয়। দেখাও যে, যে বিন্দুতে কণাটি নততলে পতিত হয়, প্রক্ষেপ বিন্দুগামী অনুভূমিক তল হইতে সেই বিন্দুর উচ্চতা হইতেছে $2v^2 \sin^2\beta/\{g(1+3\sin^2\beta)\}$ এবং কণাটির উড্ডয়ন কাল হইতেছে $2v/\{g\sqrt{1+3\sin^2\beta}\}$.

অষ্টম অধ্যায়

সরল সমঞ্জস গতি

(Simple Harmonic Motion)

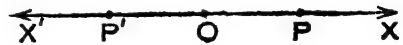
§ 8·1. **সরল সমঞ্জস গতি :** সরল সমঞ্জস গতি দোলন গতির সহজতম উদাহরণ। প্রাকৃতিক এবং যান্ত্রিক সমস্যাসমূহে ইহার ব্যাপক ব্যবহার হয়।

একটি সরল দোলকের পিণ্ডটির গতি, স্থিতিস্থাপক তন্তুর প্রান্তদেশে বাঁধা একটি কণার তন্তুর দৈর্ঘ্য বরাবর প্রসারিত দোলন্ গতি, প্রভৃতি সরল সমঞ্জস গতির উদাহরণ।

সংজ্ঞা : যদি কোন কণা একটি সরলরেখায় এমনভাবে চলে যে, (i) উহার ত্বরণ সর্বদা ঐ রেখাস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর অভিমুখী হয় (ii) ত্বরণের পরিমাণ ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কণাটির দূরত্বের সমানুপাতিক হয়, তবে বলা হয়, কণাটির একটি সরল সমঞ্জস গতি আছে।

§ 8·2. বৈশ্লেষিক পদ্ধতিতে সরল সমঞ্জস গতির আলোচনা :

মনে কর, $\overleftrightarrow{XX'}$ সরলরেখায় কণাটি এমনভাবে গতিশীল যে সর্বদা উহার ত্বরণ রেখাস্থ O বিন্দুর অভিমুখী এবং O বিন্দু হইতে কণার দূরত্বের সমানুপাতিক।

মনে কর যাত্রার t সময় পরে কণাটির অবস্থান হইতেছে P বিন্দুতে। মনে কর $OP = x$. কণাটি O বিন্দুর ডানদিকে থাকিলে $x > 0$ এবং O বিন্দুর বামদিক থাকিলে $x < 0$ হইবে। এখন কণাটির ত্বরণ f হইতেছে O বিন্দু হইতে P বিন্দুর দূরত্বের সমানুপাতিক এবং O বিন্দুর অভিমুখী। এক্ষণে O হইতে P-এর দূরত্ব হইতেছে $|x|$; [কারণ P বিন্দু O বিন্দুর ডানদিকে থাকিলে $x > 0$ সুতরাং দূরত্ব $= x$ এবং O বিন্দুর বামদিকে থাকিলে $x < 0$, সুতরাং দূরত্ব $= -(x)$.]

চিত্র 42

$\therefore$ ত্বরণ f-এর পরিমাপ $\propto |x|$ এবং O অভিমুখী,

বা, f-এর পরিমাণ $= \mu^2 |x|$, এবং O অভিমুখী,

যেখানে $\mu^2 =$ ধ্রুবক।

যদি $x > 0$ হয়, তবে $f = \mu^2 |x|$, O অভিমুখী

$$= +\mu^2 x, \overrightarrow{PO} \text{ অভিমুখী}$$

$$= -\mu^2 x, \overrightarrow{OX} \text{ অভিমুখী}$$

যদি $x<0$ হয়, তবে $f=\mu^2\,|\,x\,|$, O অভিমুখী

$$=-\mu^2 x,\ \overrightarrow{P'O} \text{ অভিমুখী} \quad (\text{ চিত্র দেখ })$$

$$=-\mu^2 x,\ \overrightarrow{OX} \text{ অভিমুখী}$$

$$(\because \quad |\,x\,|=-x. \quad \text{যখন } x<0)$$

$\therefore$ P-এর যে-কোন অবস্থানের জন্য,

$\overrightarrow{OX}$ অভিমুখী ত্বরণের মান $f=-\mu^2 x$ ....(1)

কিন্তু আমরা জানি $\overrightarrow{OX}$ অভিমুখী ত্বরণ f-এর গাণিতিক রূপ হইতেছে $\frac{d^2x}{dt^2}$. সুতরাং কণাটির গতির সমীকরণ হইতেছে,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu^2 x \ \cdots \quad \cdots(2)$$

উভয় পক্ষকে $2\frac{dx}{dt}$ দিয়া গুণ করিয়া পাই,

$$2\ \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu^2.2x.\frac{dx}{dt}$$

বা, $$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-\mu^2\frac{d}{dt}(x^2)\cdots \quad \cdots(3)$$

(3)-এর উভয়পক্ষের t-এর সাপেক্ষে সমাকল লইয়া পাই,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-\mu^2x^2+c, \quad \text{যেখানে } c=\text{ধ্রুবক}, \ \cdots \quad \cdots(4)$$

এক্ষণে, মনে করা যাক কণাটি সাম্যাবস্থাতে O বিন্দু হইতে a দূরত্বে অবস্থিত A বিন্দু হইতে যাত্রা আরম্ভ করিয়াছে।

সুতরাং যখন $t=0$, $x=a$ এবং কণাটির বেগ $=\frac{dx}{dt}=0$.

$\therefore$ (4) হইতে পাই, $0=-\mu^2a^2+c \quad \therefore \quad c=\mu^2a^2 \ \cdots \quad \cdots(5)$

(4) এ এই মান বসাইয়া পাই, $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\mu^2(a^2-x^2)$

বা, $$\frac{dx}{dt}=\pm\mu\sqrt{a^2-x^2} \ \cdots \quad \cdots(6)$$

O বিন্দু হইতে x দূরত্বে অবস্থিত (উভয়দিকে) বিন্দুতে কণাটির বেগ (6) হইতে পাওয়া যায়। যখন কণাটি $x=a$ বিন্দুতে (অর্থাৎ A বিন্দুতে) পৌঁছায়, উহার বেগ শূন্য, কিন্তু ত্বরণ μ^2a(O বিন্দুর দিকে)। অতএব তখন কণাটি O বিন্দুর দিকে যাইবে এবং উহার বেগ ক্রমশ বাড়িবে। O বিন্দুটিতে কণাটি সর্বোচ্চ বেগ μa প্রাপ্ত হয়, এই বিন্দুতে ত্বরণ শূন্য হইবে। বেগ μa থাকার ফলে কণাটি

O বিন্দুর বাম দিকে যাইবে, এবং ইহার ত্বরণ ক্রমশ বাড়িবে (বেগের বিপরীত দিকে)। এইভাবে $x=-a$ হইলে, অর্থাৎ O বিন্দুর বামদিকে A′ বিন্দুতে পৌঁছাইলে কণাটির বেগ পুনরায় শূন্য হইবে (সমীকরণ-(6) হইতে) কিন্তু ত্বরণ হইবে μ^2a(O বিন্দুর দিকে)। সুতরাং কণাটি আবার O বিন্দুর দিকে যাত্রা করিবে এবং ইহার বেগ ক্রমশঃ বাড়িবে কিন্তু ত্বরণ কমিবে। যখন কণাটি আবার O বিন্দুতে পৌঁছাইবে ইহার ত্বরণ হইবে শূন্য কিন্তু বেগ হইবে $\mu a(\overrightarrow{OX}$ অভিমুখী)। অতএব কণাটি O বিন্দুকে অতিক্রম করিয়া $\overrightarrow{OX}$ বরাবর যাইবে, যতক্ষণ না ইহার বেগ শূন্য হয়, অর্থাৎ A বিন্দু পর্যন্ত যায়। আবার A বিন্দুতে কণাটির O অভিমুখে μ^2a ত্বরণ থাকার ফলে, পূর্বের ন্যায় O বিন্দুকে অতিক্রম করিয়া ইহার বামপার্শ্বে অবস্থিত A′ বিন্দুতে গিয়া থামিবে এবং সেইখান হইতে পুনরায় A বিন্দুতে ফিরিয়া আসিবে। এইরূপে কণাটি O বিন্দুর দুইদিকে অবস্থিত $x=a$ এবং $x=-a$ বিন্দুর মধ্যে দোলায়মান হইবে।

এক্ষণে, সমীকরণ -(6) হইতে পাই,

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\pm\mu dt \quad \text{বা,} \quad -\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\mp\mu dt$$

উভয় পক্ষের সমাকলন করিয়া পাই, $\cos^{-1}\frac{x}{a}=\pm\mu t+c_1$, ...(7)

যেখানে c_1 হইতেছে একটি ধ্রুবক।

যেহেতু যখন $t=0$, তখন $x=a$, (7) হইতে পাই,

$$\cos^{-1}\frac{a}{a}=\pm\mu.0+c_1 \quad \text{বা,} \quad c_1=\cos^{-1}1=0$$

(7)-এ, c_1-এর মান বসাইয়া পাই, $\cos^{-1}\frac{x}{a}=\pm\mu t$

বা, $\frac{x}{a}=\cos(\pm\mu t)=\cos\mu t$

বা, $x=a\cos\mu t$ ... ...(8)

সমীকরণ-(8) হইতেছে সরল সমঞ্জস গতিশীল একটি কণার গতিপথের সমীকরণ।

(8) হইতে পাই x-এর সর্বোচ্চ মান a এবং $\frac{dx}{dt}$-র সর্বোচ্চ মান μa.

যখন $x=0$, অর্থাৎ যখন কণাটি O বিন্দুতে আসিবে,

তখন $\cos\mu t=0$ বা, $\mu t=\frac{\pi}{2}$, $\therefore$ $t=\frac{\pi}{2\mu}$.

$\therefore$ কণাটির A বিন্দু হইতে O বিন্দুতে আসিতে $\frac{\pi}{2\mu}$ সময় লাগে। অনুরূপে কণাটির O বিন্দু হইতে A′ বিন্দুতে যাইতে, বা A′ বিন্দু হইতে O বিন্দু আসিতে কিংবা O বিন্দু হইতে A বিন্দুতে যাইতে একই সময় $\frac{\pi}{2\mu}$ লাগিবে।

সুতরাং A বিন্দু হইতে যাত্রা শুরু করিয়া কণাটির A বিন্দুতে ফিরিয়া আসিতে যে সময় লাগে, অর্থাৎ কণাটির সম্পূর্ণ দোলন কাল T হইল,

T = A হইতে O পর্যন্ত যাইবার সময়ের চার গুণ

$$= 4 \times \frac{\pi}{2\mu} = \frac{2\pi}{\mu}.$$

দ্রষ্টব্য : সমীকরণ-(2)-এর সাধারণ সমাধান হইতেছে,

$$x = a \cos(\mu t + \epsilon) \cdots\cdots (iv)$$

স্পষ্টত: t-এর মান পরিবর্তনের জন্য, $\cos(\mu t + \epsilon)$-এর মান পর্যায়ক্রমে $+1$ এবং -1-এর মধ্যে পরিবর্তিত হইবে, এবং সেইহেতু x-এর মান $+a$ হইতে $-a$-র মধ্যে পর্যায়ক্রমে পরিবর্তিত হইবে। সুতরাং কণাটির গতি দোলায়মান হইবে। মূল বিন্দুর ডান দিকে কণাটির সর্বোচ্চ সরণ হইতেছে a, ইহাকে দোলনের **বিস্তার** বা আয়াস বলা হয়,

t-এর মান $\frac{2\pi}{\mu}$ পরিমাণ বাড়িলে, x-এর মান হইবে,

$$x' = A \cos\left\{\mu\left(t + \frac{2\pi}{\mu}\right) + \epsilon\right\},$$

$$= A \cos\{\mu t + 2\pi + \epsilon\} = A \cos(\mu t + \epsilon)$$

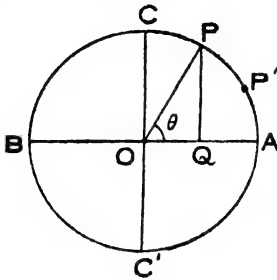
$\therefore$ x-এর মান অপরিবর্তিত থাকিবে।

অনুরূপে, $\frac{dx}{dt} = -\mu A \sin(\mu t + \epsilon)$-এর মান t-এর মানের $\frac{2\pi}{\mu}$ বৃদ্ধির জন্য অপরিবর্তিত থাকিবে। $\frac{2\pi}{\mu}$ সময় কালকে **পর্যায়কাল** বা **দোলনকাল** বলা হয়।

ϵ-কে বলা হয় **ইপক্** (epoch) বা যাত্রাকালীন দশা। $\mu t + \epsilon$ কোণকে বলা হয় আর্গুমেণ্ট বা কৌণিক অবস্থান। অনেক সময় এই কোণকে ফেইজ্ বা দশা বলা হয়। সাধারণতঃ দশা হইল পর্যায় কালের $\frac{\mu t + \epsilon}{2\pi}$ গুণ। কণাটি স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিলে $\epsilon = 0$ হইবে।

§ 8·3. সরলসমঞ্জস গতি এবং সমবৃত্তীয় গতি :

যদি একটি বিন্দু P, ω সমকৌণিক বেগে একটি বৃত্তীয় পথে ভ্রমণ করে, এবং যদি ঐ বৃত্তের একটি নির্দিষ্ট ব্যাসের উপর P বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ Q হয়,

তবে Q বিন্দুর গতি হইবে সরল সমঞ্জস গতি। ইহার প্রমাণ নিম্নে দেওয়া হইল।

চিত্র 43

মনে কর P বিন্দু যে বৃত্ত রচনা করে তাহার কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ a. মনে কর, AB একটি নির্দিষ্ট ব্যাস এবং $t=0$ সময়ে P বিন্দুর অবস্থান A বিন্দুতে। মনে কর, যে কোন সময় t-তে বিন্দুটির অবস্থান P হইলে $m\angle AOP=\theta$, যেহেতু w সমকৌণিক বেগে বিন্দুটি t সময়ে θ কোণ রচনা করে, $\theta=wt$.

এক্ষণে O বিন্দুকে কেন্দ্র, $\overrightarrow{OA}$ রেখাকে x-অক্ষ ধরা হইল। মনে কর $OQ=x$.

$$\therefore \quad x=OQ=OP\cos\theta=a\cos wt \cdots\cdots (1)$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=-aw\sin wt\cdots\cdots(2)$$

এবং $$\frac{d^2x}{dt^2}=-aw^2\cos wt$$

$$=-w^2x, \quad [\,(1) \text{ হইতে}\,]$$

এক্ষণে, $\frac{d^2x}{dt^2}$ হইতেছে Q বিন্দুর $\overrightarrow{OA}$-অভিমুখী ত্বরণ।

∴ Q-এর ত্বরণ সর্বদা O বিন্দু অভিমুখী এবং $|x|$ অর্থাৎ O বিন্দু হইতে Q বিন্দুর দূরত্বের সঙ্গে সমানুপাতিক।

∴ সংজ্ঞানুসারে, Q-এর গতি হইতেছে সরল সমঞ্জস গতি। এই গতির কেন্দ্র O, পর্যায় কাল $\frac{2\pi}{w}$ এবং বিস্তার a.

দ্রষ্টব্য : P বিন্দুটির যাত্রা-বিন্দু P′ হইলে এবং $m\angle AOP'=\theta'$ হইলে, θ'-কে **ইপক্** (epoch) বা যাত্রাকালীন দশা বলা হয়. এইক্ষেত্রে $=\theta wt+\theta'$.

§ 8·4. সরল দোলক (Simple pendulum) :

একটি স্থির বিন্দু হইতে হাল্কা অপ্রসার্য রজ্জুর দ্বারা ঝোলান অবস্থায় উল্লম্ব তলে দোলায়মান, একটি ভারী বস্তু কণাকে, সরল দোলক বলা হয়।

মনে কর, O হইতেছে স্থির বিন্দুটি (অর্থাৎ প্রলম্ব বিন্দু) এবং P হইতেছে যে কোন সময় t-তে ভারী বস্তুটির অবস্থান। মনে কর. A হইতেছে O বিন্দুর নিম্নে উল্লম্ব দিকে কণাটির অবস্থান। মনে কর, $m\angle AOP=\theta$ এবং কণাটির ভর m.

যেহেতু কণাটি একটি বৃত্ত চাপে ভ্রমণ করে,
OA = OP = দোলকের দৈর্ঘ্য $= l$, (মনে কর) এবং $s =$ AP চাপ $= l\theta$.

এক্ষণে কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বলগুলি হইল, (i) $\overrightarrow{PO}$ অ   রজ্জুর টান T এবং (ii) উল্লম্ব দিকে নিম্নাভিমুখী কণাটির ওজন mg. যেহেতু $\overrightarrow{PO}$ বরাবর কণাটির কোন গতি নাই, এই দিকের বলসমূহ পরস্পরকে অপসারিত করে অর্থাৎ $\overrightarrow{PO}$ অভিমুখী টান T, $\overrightarrow{OP}$ দিকে কণাটির ভার mg-এর বিশ্লেষিতাংশ $mg \cos\theta$-এর দ্বারা অপসারিত হয়। সুতরাং কণাটির উপর একমাত্র ক্রিয়াশীল বল হইল, ভার mg-এর AP চাপের P বিন্দুতে স্পর্শকের অভিমুখে বিশ্লেষিতাংশ $mg \sin\theta$.

চিত্র 41

∴ কণাটির গতির সমীকরণ হইল,

$$m.\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin\theta \cdots\cdots(1)$$

যেহেতু $s = l\theta$, $\frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

এক্ষণে θ-র মান ক্ষুদ্র হইলে

$\sin\theta = \theta$ মনে করা যায়, (θ রেডিয়ান্ এককে মাপা হইলে)

∴ (1) হইতে পাই, $ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\theta$

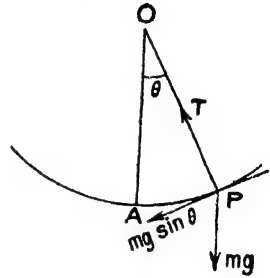
বা, $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,\theta$

এই সমীকরণটি § 8·1-এর সমীকরণ-(2) অর্থাৎ $\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 x$-এর আকারের। ঐ সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করিয়া পাই,

$$\mu^2 = \frac{g}{l} \quad \text{বা,} \quad \mu = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

এক্ষণে § 8·1-এর সমীকরণ-(2) হইতেছে কোন কণার সরল সমঞ্জস গতির সমীকরণ। সুতরাং সরল দোলকের গতি হইতেছে সরল সমঞ্জস গতি। এই গতির পর্যায় কাল অর্থাৎ সরল দোলকের দোলনকাল হইল

$$T = \frac{2\pi}{\mu} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

দ্রষ্টব্য : (i) সরল দোলকের দোলনকাল উহার দৈর্ঘ্য l-এর বর্গমূলের সহিত সরলভেদে এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর বর্গমূলের সহিত ব্যস্তভেদে থাকে।

সুতরাং একটি ঘড়ি দ্রুত বা মন্দ যাইবে যদি দোলকের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে বাড়ান বা কমান হয় অথবা যদি g-এর মান যথাক্রমে হ্রাসপ্রাপ্ত বা বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়।

(ii) সেকেণ্ড-দোলক হইল একটি সরল দোলক যাহার দোলনকাল 2 সেকেণ্ড অর্থাৎ যাহার স্থিতাবস্থা হইতে স্থিতাবস্থায় যাইতে এক সেকেণ্ড সময় লাগে।

যদি সেকেণ্ড দোলকের দৈর্ঘ্য l হয়, তবে

$$2=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{বা,} \quad l=\frac{g}{\pi^2}.$$

$g=980$ সে. মি./(সে.)^2 লইয়া পাই

$$l=99{\cdot}39 \text{ সে. মি.} \quad \text{বা,} \quad 39{\cdot}12 \text{ ইঞ্চি (প্রায়)।}$$

(iii) সরল দোলকের দ্বারা যে কোন জায়গায় g-এর মান নির্ণয় করা যায়।

l দৈর্ঘ্যযুক্ত সরল দোলকের দোলনকাল

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ হইতে পাই, } g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

এক্ষণে l-এর মান মাপিয়া এবং T-এর মান পরীক্ষার দ্বারা বাহির করিয়া উপরোক্ত সমীকরণ হইতে g-এর মান বাহির করা যায়।

উদাহরণমালা

উদা. 1. সরল সমঞ্জস গতিশীল একটি কণা, গতির কেন্দ্র হইতে 5 সে.মি. দূরে অবস্থিত একটি বিন্দু হইতে 1 সে. মি./সেকেণ্ড বেগে যাত্রা আরম্ভ করে, এবং উহার পর্যায় কাল 11 সেকেণ্ড। সর্বোচ্চ বেগ এবং ত্বরণ বাহির কর।

সরল সমঞ্জস গতির সাধারণ সমাধান হইতেছে,

$$x=a\cos(\mu t+\epsilon) \quad \cdots \quad \cdots(1).$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=-\mu a\sin(\mu t+\epsilon) \quad \cdots \quad \cdots(2)$$

যেহেতু পর্যায়কাল 11 সেকেণ্ড

$$\frac{2\pi}{\mu}=11 \quad \text{বা,} \quad \mu=\frac{2\pi}{11} \quad \cdots \quad \cdots(3)$$

এক্ষণে যখন $t=0$, $x=5$, $\frac{dx}{dt}=1$.

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে পাই,

$$5=a\cos\epsilon, \text{ এবং } 1=-a\mu\sin\epsilon$$

ϵ অপনয়ন করিয়া পাই,

$$(a\cos\epsilon)^2+(a\sin\epsilon)^2=5^2+\left(\frac{1}{\mu}\right)^2$$

বা, $a^2=25+\frac{121}{4\pi^2}=28{\cdot}09$ $\therefore$ $a=\sqrt{28{\cdot}09}=5{\cdot}3$ সে. মি.

$\therefore$ সর্বোচ্চ বেগ $=\mu a=\frac{2\pi}{11}\times 5{\cdot}3=3{\cdot}03$ সে. মি./সেকেণ্ড

এবং সর্বোচ্চ ত্বরণ $=\mu^2 a=\frac{4\pi^2}{121}\times 5{\cdot}3=1{\cdot}73$ সে. মি./(সে.)^2.

উদা. 2. x-অক্ষ বরাবর গতিশীল একটি কণার বেগ v সে. মি./সে. হইলে

$$v^2=12-2x-2x^2, \text{ (} x \text{ সে. মি. দূরত্বে বেগ)}$$

দেখাও যে, গতিটি হইতেছে সরল সমঞ্জস গতি এবং ইহার বিস্তার ও পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $v^2=12-2x-2x^2$ ... .(1)

উভয়দিকের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$2v.\frac{dv}{dx}=-2-4x$$

বা, $2\frac{d^2x}{dt^2}=-2-4x$, $\left[\because \quad f=\frac{d^2x}{dt^2}=v.\frac{dv}{dx}\right]$.

বা, $\frac{d^2x}{dt^2}=-2(x+\frac{1}{2})$. ....(2)

$z=x+\frac{1}{2}$ ধরিয়া পাই, $\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}$.

$\therefore$ (2) হইতে পাই, $\frac{d^2z}{dt^2}=-2z$ ... ...(3)

ইহা একটি সরল সমঞ্জস গতির সমীকরণ যাহার কেন্দ্র $z=0$, অর্থাৎ $x=-\frac{1}{2}$, অর্থাৎ x-অক্ষের উপর মূলবিন্দুর বামদিকে $\frac{1}{2}$ সে মি. দূরে অবস্থিত বিন্দুটি।

আবার (3) হইতে পাই, $\mu^2=2$ $\therefore$ $\mu=\sqrt{2}$

$\therefore$ পর্যায়কাল$=\frac{2\pi}{\mu}=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}=\pi\sqrt{2}$ সেকেণ্ড।

এক্ষণে, যেহেতু $v^2=12-2x-x^2$,

অতএব যখন $v=0$ তখন $12-2x-x^2=0$, বা, $x^2+x-6=0$

বা, $(x-2)(x+3)=0$, বা, $x=2, -3$.

$\therefore$ কণাটির বিস্তার$=\frac{2+3}{2}=2{\cdot}5$ সে. মি.

উদা. 3. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে 'a' দূরত্বে অবস্থিত বিন্দু হইতে একটি কণাকে v বেগে সরাসরি ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুর বিপরীত দিকে প্রক্ষিপ্ত করা

হইয়াছে। যদি কণাটির ত্বরণ ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখী হয় এবং উহার পরিমাপ হয়, n^2x (ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কণাটির দূরত্ব), তাহা হইলে সরল সমঞ্জস গতিটির বিস্তার বাহির কর।

সরল সমঞ্জস গতির সাধারণ সমাধান হইতেছে,

$$x = A\cos(\mu t + \epsilon)$$

দেওয়া আছে, $\dfrac{dx}{dt} = v$, যখন $x = a$, $t = 0$, এবং $\mu = n$.

এক্ষণে, $\dfrac{dx}{dt} = -\mu A\sin(\mu t + \epsilon)$ $\therefore$ $v = -nA\sin\epsilon$, এবং

$a = A\cos\epsilon$. ϵ-অপনয়ন করিয়া পাই,

$$\left(\frac{v}{n}\right)^2 + a^2 = A^2, \quad \text{বা,} \quad A^2 = \left(\frac{v}{n}\right)^2 + a^2$$

$$\therefore \quad \text{বিস্তার} = \sqrt{a^2 + \frac{v^2}{n^2}}.$$

উদা. 4. একটি সরল সমঞ্জসগতিশীল কণার গতির কেন্দ্র হইতে সর্বোচ্চ দূরত্বে ত্বরণ হইতেছে 4 ফুট/(সে)^2. এবং সর্বোচ্চ বেগ হইতেছে 8 ফু./সে. কণাটির আয়াস এবং কেন্দ্র হইতে 8 ফুট দূরত্বে বেগ বাহির কর।

x দূরত্বে কণারটি ত্বরণ হইতেছে $f = -\mu^2 x$, কণাটির বৃহত্তম দূরত্ব a হইলে, বিস্তার$=a$ এবং তখন কণাটির ত্বরণ হইতেছে $\mu^2 a$. আবার বৃহত্তম বেগ$=\mu a$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত হইতে পাই, $\mu^2 a = 4$

$\mu a = 8.$

$$\therefore \quad \mu = \frac{\mu^2 a}{\mu a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad \text{এবং} \quad a = \frac{8}{\mu} = 16.$$

$\therefore$ বিস্তার$=16$ ফুট।

এক্ষণে x-দূরত্বে কণাটির বেগ, $v = \mu\sqrt{a^2 - x^2}$.

$\therefore$ $x = 8$ দূরত্বে অর্থাৎ কেন্দ্র হইতে 8 ফুট দূরত্বে কণাটির বেগ হইতেছে, $\frac{1}{2}\sqrt{16^2 - 8^2} = 4\sqrt{3}$ ফু./সে.

উদা. 5. সরল সমঞ্জসগতিশীল একটি কণার গতি-কেন্দ্র হইতে x_1 এবং x_2 দূরত্বে বেগ হইতেছে যথাক্রমে v_1 এবং v_2. যদি কণাটির পর্যায়কাল T হয়, তবে $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$ [C. U. 1969]

x দূরত্বে কণাটির বেগ v হইলে, $v = \mu\sqrt{a^2 - x^2}$.

প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী, $v_1 = \mu\sqrt{a^2 - x_1^2}$, $v_2 = \mu\sqrt{a^2 - x_2^2}$.

'a' অপনয়ন করিয়া পাই,

$$\frac{v_2^2}{\mu^2}-\frac{v_1^2}{\mu^2}=(a^2-x_2^2)-(a^2-x_1^2)=x_1^2-x_2^2$$

$$\therefore \quad \mu^2=\frac{v_2^2-v_1^2}{x_1^2-x_2^2},$$

$$\text{পর্যায়কাল, } T=\frac{2\pi}{\mu}=2\pi\sqrt{\frac{x_1^2-x_2^2}{v_2^2-v_1^2}}.$$

উদা. 6. যদি একটি সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য উহার দৈর্ঘ্যের $\frac{1}{100}$ গুণ বাড়াইয়া দেওয়া হয়, তবে দোলকটি প্রতিদিন কত সেকেণ্ড মন্দ যাইবে ?

মনে কর, দোলকের দৈর্ঘ্য প্রথমে ছিল l, এবং তখন পর্যায়কাল $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. যখন দৈর্ঘ্য l', তখন পর্যায় কাল $T'=2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$.

$$\therefore \quad \frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{l'}{l}}=\sqrt{\frac{l+\frac{l}{100}}{l}}=\sqrt{1+\frac{1}{100}}$$

$$=(1+\tfrac{1}{100})^{\frac{1}{2}}=1.005 \text{ (আসন্ন)}$$

$\therefore \quad T'=1.005.T.$

$\therefore$ প্রতি সেকেণ্ডে $\cdot005$ সেকেণ্ড মন্দ যাইবে।

এক্ষণে একদিনে $24\times60\times60=86400$ সেকেণ্ড।

$\therefore$ প্রতি দিন দোলকটি $86400\times\cdot005=432$ সেকেণ্ড মন্দ যাইবে।

উদা. 7. একটি সেকেণ্ড দোলক প্রতিদিন 36 সেকেণ্ড দ্রুত যায়। ভূ-পৃষ্ঠ হইতে কত উচ্চে উহা সঠিক সময় রাখিবে ?

(দেওয়া আছে পৃথিবীর ব্যাসার্ধ=4000 মাইল)।

কোন স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর মান ঐ স্থল হইতে ভূকেন্দ্রের দূরত্বের বর্গের সহিত ব্যস্ত অনুপাতিক। সুতরাং যদি ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান g' হয় এবং ভূ পৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতায় ঐ মান g হয় তবে,

$$\frac{g'}{g}=\frac{(4000+h)^2}{(4000)^2}=\left(1+\frac{h}{4000}\right)^2=\left(1+\frac{2h}{4000}\right) \text{ (আসন্ন),}$$

$\frac{h^2}{(4000)^2}$ উপেক্ষা করিয়া।

এক্ষণে, যেহেতু দোলকটি ভূ-পৃষ্ঠে দিনে 36 সেকেণ্ড দ্রুত যায়, অতএব ভূ-পৃষ্ঠে উহার অর্ধদোলনকাল $T'=\frac{86400}{86436}$ সেকেণ্ড।

মনে কর, ভূ-পৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতায় উহা সঠিক সময় দেয়, অর্থাৎ উহার অর্ধ-দোলককাল T=1 সেকেণ্ড।

$$\therefore \quad \frac{T}{T'}=\frac{1 \text{ সেকেণ্ড}}{\frac{86400 \text{ সেকেণ্ড}}{86436}}=\frac{86436}{86400}$$

এক্ষণে, $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, $T'=2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$

$$\therefore \quad \frac{T}{T'}=\sqrt{\frac{g'}{g}}. \quad \text{বা,} \quad \frac{T^2}{T'^2}=\frac{g'}{g}=\left(1+\frac{2h}{4000}\right)$$

$$\therefore \quad 1+\frac{2h}{4000}=\left(\frac{86436}{86400}\right)^2=1+\frac{2\cdot 36}{86400} \text{ (আসন্ন)}$$

বা, $\frac{2h}{4000}=\frac{72}{86400}$ $\quad\therefore\quad h=\frac{4000\times 72}{2\times 86400}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$ মাইল।

উদা. 8. দেখাও যে, যে সময় l দৈর্ঘ্যযুক্ত একটি দোলক n দোলন সমাধা করে, দোলকটির দৈর্ঘ্য বাড়াইয়া $l+x$ করা হইলে ঐ সময় উহা $\frac{nx}{2l}$ সংখ্যক দোলন কম করে।

মনে কর, দোলকের দৈর্ঘ্য যখন l এবং $l+x$, তখন উহার দোলন কাল যথাক্রমে T এবং T'.

$$\therefore \quad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{এবং} \quad T'=2\pi\sqrt{\frac{l+x}{g}}.$$

$$\therefore \quad \frac{T'^2}{T^2}=\frac{l+x}{l}=1+\frac{x}{l}. \quad \therefore \quad \frac{T'}{T}=\left(1+\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{x}{2l} \text{ (আসন্ন)}$$

$$\therefore \quad T'=T.\left(1+\frac{x}{2l}\right)$$

মনে কর, l দৈর্ঘ্যের দোলক t_0 সময়ে n দোলন সমাধা করে, এবং $l+x$ দৈর্ঘ্যের দোলক t_0 সময়ে n' দোলন সমাধা করে।

$$\therefore \quad t_0=nT \quad \text{এবং} \quad t_0=n'T'$$

$$\therefore \frac{n'}{n}=\frac{T}{T'}=\left(1+\frac{x}{2l}\right)^{-1} \quad \therefore \; n'=n\left(1+\frac{x}{2l}\right)^{-1}=n\left(1-\frac{x}{2l}\right) \text{ (আসন্ন)}$$

[$\left(\frac{x}{l}\right)^2$ ইত্যাদি পদ বর্জন করিয়া]

$$\therefore \quad n-n'=\frac{nx}{2l}.$$

অতএব দোলকটির ঐ সময়ে $\frac{nx}{2l}$ সংখ্যক দোলন কম হয়

প্রশ্নমালা 7

1. সরল সমঞ্জস গতি সম্পাদনরত একটি কণার পর্যায়কাল 11 সেকেণ্ড। গতির কেন্দ্র হইতে 7 সে. মি. দূরত্বে কণাটির ত্বরণ নির্ণয় কর।

2. সরল সমঞ্জস গতিরত একটি কণার কেন্দ্র হইতে 6 ফুট এবং $2\frac{1}{2}$ ফুট দূরত্বে বেগ যথাক্রমে 5 ফু./সে. এবং 12 ফু./সে.। কণাটির বৃহত্তম বেগ পর্যায়কাল, এবং কেন্দ্র হইতে বৃহত্তম দূরত্বে ত্বরণ নির্ণয় কর।

3. সরল সমঞ্জস গতিরত একটি কণা গতির কেন্দ্র হইতে 14 ফুট দূরত্বে যাত্রা আরম্ভ করে, এবং বৃহত্তম বেগ 22 ফু./সে. হয়। কণাটির পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

4. একটি সরল সমঞ্জস গতির পর্যায়কাল 8 সেকেণ্ড এবং বিস্তার 4 ফুট। সর্বোচ্চ গতিবেগ এবং কেন্দ্র হইতে 2 ফুট দূরত্বে কণাটির বেগ নির্ণয় কর।

5. x-অক্ষে ভ্রমণরত একটি কণার বেগ v ফু./সে. হইলে

$$v^2 = -9x^2 + 18x + 27,$$

(যখন মূলবিন্দু হইতে কণাটির দূরত্ব x ফুট)

প্রমাণ কর যে, গতিটি সরল সমঞ্জস ; গতিটির কেন্দ্র, বিস্তার ও পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

6. সরল রেখায় সমঞ্জস গতি সম্পাদনরত একটি কণার দুইটি অবস্থানে বেগ এবং ত্বরণ যথাক্রমে v_1, v_2 এবং f_1, f_2. যদি অবস্থান দুইটির দূরত্ব d হয় তবে দেখাও যে,

$$d = \frac{v_1^2 - v_2^2}{f_1 + f_2}.$$

7. একটি গতিশীল কণার t সময়ের দূরত্ব x যদি

$x = \alpha \cos nt + \beta \sin nt$, (যেখানে α, β, n ধ্রুবক) সমীকরণের সাহায্যে দেওয়া থাকে, তবে প্রমাণ কর যে কণাটির গতি সরল-সমঞ্জস।

8. দেখাও যে, সরল সমঞ্জস গতির সাধারণ সমাধানকে

$x = A \cos \mu t + B \sin \mu t$ আকারে লেখা যায়।

9. একটি সেকেণ্ড-দোলক দিনে 15 সেকেণ্ড মন্দ যায়। সঠিক সময় রাখিতে হইলে উহার দৈর্ঘ্যের কি পরিবর্তন করিতে হইবে তাহা নির্ণয় কর।

10. একটি সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য ·05 ইঞ্চি বাড়ান হইয়াছে। দিনে কত সেকেণ্ড সময় ইহা মন্দ যাইবে ?

11. সমুদ্র-পৃষ্ঠে একটি সেকেণ্ড-দোলক সঠিক সময় রাখে। যদি সমুদ্র-পৃষ্ঠ হইতে 2 মাইল উচ্চে ইহাকে লইয়া যাওয়া হয়, তবে সঠিক সময় রাখিতে হইলে ইহার দৈর্ঘ্যের কত পরিবর্তন করিতে হইবে ? (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ=4000 মাইল)।

12. বিষুবরেখায় এক সেকেণ্ড-দোলনকালবিশিষ্ট একটি দোলককে মেরু-প্রদেশে লইয়া গেলে ইহা দিনে 5 মিনিট সময় দ্রুত যায়। দুইটি জায়গার g-এর মানের তুলনা কর।

13. যদি ভূ-পৃষ্ঠে এবং ভূ-পৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতায় একটি সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে L এবং l হয়, তবে দেখাও যে পৃথিবীর ব্যাসার্ধ হইতেছে,

$$\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{L}-\sqrt{l}}.h$$

উত্তরমালা

গতিবিদ্যা

প্রশ্নমালা 1

1. গড় দ্রুতি $=44$ মি./সে., গড় বেগ $=0$.

2. 17 মিটার।

3. (i) 0, 24 মি./সেকেণ্ড ; (ii) 50 কি.মি./ঘণ্টা, $50\sqrt{3}$ কি.মি./ঘণ্টা ;
(iii) $5\sqrt{2}$ সে.মি./সেকেণ্ড, $5\sqrt{2}$ সে.মি./সেকেণ্ড।

4. প্রথম বেগের অভিমুখিতার সহিত $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ কোণে নত
$5\sqrt{7}$ মি./সেকেণ্ড।

5. (i) 25 কি.মি./ঘণ্টা ; (ii) 7 সে.মি./সেকেণ্ড।
(iii) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)$ মি./মিনিট (iv) $60°$.

6. না। 7. $135°, 105°, 120°$.

8. প্রথম উপাংশের সহিত $\cos^{-1}(-\frac{3}{5})$ কোণে নত 25 মি./সেকেণ্ড।

11. $25\sqrt{2}$ মি., $135°$.

12. $3\sqrt{5}$; $\tan^{-1}\frac{1}{2}$. 14. 150 মি.

16. পূর্বদিকের সহিত $\tan^{-1}\frac{9}{41}$ (আসন্ন) কোণে নতদিকে যাত্রাস্থান হইতে 210 মিটার (আসন্ন) দূরে। 17. 34·6 মিটার/সেকেণ্ড।

18. $\dfrac{s}{t_1 t}\sqrt{t_1^2-t^2}$. 19. প্রথম উপাংশের ক্রিয়ারেখায় 2 মি./সেকেণ্ড।

20. 3·7 ঘণ্টা ; $28°35'$ পশ্চিমদিকের দক্ষিণে। 22. $60°$.

প্রশ্নমালা 2

1. (i) 22 ফু./সেকেণ্ড ; (ii) 110 ফু./সেকেণ্ড।

2. 36 কি.মি./ঘণ্টা। 3. 36 সেকেণ্ড।

4. উল্লম্বরেখায় $8\sqrt{3}$ কি.মি./ঘণ্টা।

5. দক্ষিণ-পূর্বদিকে 10 কি.মি./ঘণ্টা।

6. 5 কি.মি./ঘণ্টা ; 25 কি.মি.।

7. $6\sqrt{2}$ কি.মি./ঘণ্টা, উল্লম্বের দিকে $45°$ কোণে নত।

8. 1 ঘণ্টা 36 মি. ; 150 কি.মি.। 9. পূর্বাভিমুখে, প্রশ্নে প্রথম লাইনে উত্তর-পূর্বদিক স্থলে উত্তরদিক পড়।

10. $\frac{10}{9}\sqrt{34}$ মি./সেকেণ্ড ; ট্রেনের গতির দিকের সহিত $\tan^{-1}\frac{3}{5}$ কোণে নত দিকে হইতে।

11. $17\frac{1}{2}$ মি./ঘণ্টা ; 202 গজ, 36·7 গজ।

12. $u(\sqrt{5-4\cos\alpha})$.

13. $\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{5}$ উত্তরদিকের পশ্চিমে।

14. গন্তব্যস্থলের দিকের সহিত $\sin^{-1}\left(\frac{V}{v}\sin\,\theta\right)$ কোণে।

15. (i) উত্তরদিকের 40°30′ পূর্ব হইতে।
 (ii) দক্ষিণদিকের 35°40′ পূর্ব হইতে।

16. (i) উত্তরাভিমুখে (ii) ·15 ঘণ্টা।

18. উত্তরদিকের 34°49′ পূর্বে, 3 ঘণ্টা 5 মি. 45 সেকেণ্ড, 31·44 মাইল উত্তরে।

19. 12·5 মিটার/সেকেণ্ড, ট্রেনের গতির দিকের সহিত $\tan^{-1}(-\frac{3}{4})$ কোণে।

20. উত্তরদিকের সহিত পূর্বদিকে 60° কোণে নত।

21. 39 কি. মি./ঘণ্টা। উত্তরদিকের $\tan^{-1}\frac{5}{12}$ পূর্বে।

22. 6 মাইল/ঘণ্টা। (প্রশ্নে 8 কি. মি. স্থলে 8 মাইল পড়)

প্রশ্নমালা 3

1. 24 সে.মি./সেকেণ্ড ; 104 সে.মি./সেকেণ্ড^2।

3. 14 সে.মি./সেকেণ্ড^2। 6. $\sqrt{\frac{\mu}{c}}$.

7. (i) যখন $0\leqslant t\leqslant 1$, তখন কণাটি সমত্বরণে এবং যখন $t>1$. তখন কণাটি সমবেগে গতিশীল হয়।

8. কণাটি 4 সেকেণ্ড পরে স্থির হইবার পূর্বে মূলবিন্দুকে অতিক্রম করে।

9. (i) 16·5 সে. মি. ; (ii) 40 ফুট, 13 ফুট/সেকেণ্ড ;
 (iii) 53·28 কি.মি./ঘণ্টা ; (iv) 1 সে.মি./সেকেণ্ড^2 ; 1 সেকেণ্ড।

10. 300 মিটার। 11. 12 মি./সেকেণ্ড ; 90 মিটার।

12. $\frac{4}{5}$ মাইল। 13. আরও $\frac{1}{3}$ ইঞ্চি।

15. ·0008 সেকেণ্ড ; 1020 ফুট/সেকেণ্ড (আসন্ন)।

16. 5 সেকেণ্ড ; 150 সে. মি. (আসন্ন)।

23. 729 ফুট। 28. 10 মি. 59·25 সেকেণ্ড।

প্রশ্নমালা 4

1. $1{\cdot}419 \times 10^9$ পাউণ্ড ফুট/সেকেণ্ড।
2. 10 পাউণ্ডাল $= \frac{5}{8}$ পাউণ্ড ভার।
3. 625 ফুট। 4. 12 সেকেণ্ড। 5. 1600 ফুট/সেকেণ্ড^2।
6. $3{\cdot}125 \times 10^4$ পাউণ্ডাল, ·002 সেকেণ্ড। 7. 16 পাউণ্ড।
8. 80 সে.মি. ; 10 সে.মি./সেকেণ্ড। 9. $10778\frac{1}{3}$ পাউণ্ড ভার।
10. 1120 ফুট/সেকেণ্ড। 12. 3 ফুট ; $\frac{3}{40}$ সেকেণ্ড।
13. $1{\cdot}12 \times 10^5$ গ্রাম ভার $= 1{\cdot}098 \times 10^8$ ডাইন।
14. $\sqrt{\frac{\mu}{c}}$. 16. $\frac{g}{13}$. 17. 16·1 ফুট.

প্রশ্নমালা 5

1. $80\sqrt{2}$ ফুট/সেকেণ্ড। 2. 40 ফুট/সেকেণ্ড।
3. 192 ফুট। 4. 44·1 মি. 5. 225 ফুট।
6. 4 ফুট। 7. 36 ফুট। 8. 196 ফুট ; 112 ফু./সেকেণ্ড।
9. 2·5 সেকেণ্ড। 11. ভূমির উপরের 60 ফুট ; যাত্রায় $\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড পরে।
13. 144 ফুট। 14. 1200 ফুট/সেকেণ্ড।
15. 224 ফুট/সেকেণ্ড। 17. 196 ফুট।
19. 4080 ফুট। 20. $1\frac{9}{16}$ ফুট।

প্রশ্নমালা 6

1. $78\frac{1}{8}$ ফুট ; $\frac{25}{8}\sqrt{2}$ সেকেণ্ড। 3. 153·7 ফুট।
4. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{32}{7500}x^2$, $T = 1\frac{9}{16}$ সেকেণ্ড।
6. 45° বা $\tan^{-1} 4$ অনুভূমিক দিকের সহিত।
7. 80 ফু./সেকেণ্ড, $\alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3}$। 9. 50 মি./সেকেণ্ড।
10. 160 মি., $28\sqrt{5}$ মি./সেকেণ্ড ; $\alpha = \tan^{-1} 2$.
11. 4 সেকেণ্ড ; ভূমি হইতে $160\sqrt{3}$ ফুট, 112 ফুট/সেকেণ্ড, ভূমির সহিত $\tan^{-1}\frac{11}{5\sqrt{3}}$ কোণে।
12. 196 ফুট। 13. $60\sqrt{3}$ ফুট।

14. $256\sqrt{2}$ ফুট/সেকেণ্ড, $\alpha=45°$ ।

18. $\frac{64}{3}$ ফুট, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ সে., $\frac{128}{3}$ ফু., $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ সে., $\frac{64}{3}$ ফু., 64 ফু. ।

23. $109\sqrt{3}$ সে. মি./সে. ।

প্রশ্নমালা 7

1. $2\frac{2}{7}$ সে. মি./সেকেণ্ড^2 । **2.** 13 ফুট/সেকেণ্ড, 26 ফুট/সেকেণ্ড^2

3. 4 সেকেণ্ড । **4.** π ফুট/সেকেণ্ড, $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ ফুট/সেকেণ্ড ।

5. $x=1, 2$ ফুট, $\frac{2\pi}{3}$. **9.** ·013 ইঞ্চি হ্রস্ব হইতে হইবে ।

10. 55. **11.** ·099 সে. মি. হ্রস্ব করিতে হইবে ।

12 143 : 144.

• স্থিতিবিদ্যা •

(STATICS)

প্রথম অধ্যায়

প্রাথমিক আলোচনা

§ 1·1. সংজ্ঞা : **গতিবিদ্যা** অংশে বস্তুর গতি ও স্থিতি, বল ইত্যাদি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। স্থিতিবিদ্যার আলোচনা পূর্ণাঙ্গ করিবার জন্য বস্তুর স্থিতি ও বল সম্বন্ধে বর্তমান অধ্যায়ে পুনরালোচনা করা হইতেছে।

স্থিতি (Rest) : কোন বস্তু অবস্থান পরিবর্তন না করিলে বস্তুটি স্থিরাবস্থায় (at rest) আছে বলা হয়। কিন্তু এই নিখিল বিশ্বে কোন বস্তুই প্রকৃত স্থির অবস্থায় নাই। পৃথিবী নিজ মেরুদণ্ডের উপর আবর্তন করিতে করিতে সূর্যকে পরিক্রমণ করিতেছে। সুতরাং পার্থিব যাবতীয় বস্তুর সহিত পৃথিবীর গতি যুক্ত হওয়ায় বস্তুগুলিও গতিশীল হইতেছে। তাহা হইলে, কোন বস্তুর স্থিরাবস্থা বলিতে কি বোঝায়? কোন বস্তু যদি তাহার পারিপার্শ্বিকের (অর্থাৎ চতুর্দিকস্থ বস্তুসমূহের) সাপেক্ষে অবস্থান পরিবর্তন না করে, তবে বস্তুটি **স্থিরাবস্থায়** আছে বলা হয়। এই স্থিরাবস্থাকে **আপেক্ষিক স্থিরাবস্থা** (relative rest) বলে। এই পুস্তকে আমরা বস্তুর স্থিরাবস্থা বলিতে পৃথিবীর সাপেক্ষে তাহার আপেক্ষিক স্থিরাবস্থা বুঝিব। অতঃপর আপেক্ষিক বিশেষণটির আর উল্লেখ করা হইবে না।

বল (Force) : নিউটনের প্রথম গতিসূত্র হইতে বলের নিম্নলিখিত সংজ্ঞা পাওয়া যায়।

কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত হইয়া যাহা বস্তুটির স্থিরাবস্থার অথবা সমবেগে সরলরেখায় গতিশীল অবস্থার পরিবর্তন করে অথবা পরিবর্তন করিতে চেষ্টা করে, তাহাকে **বল** বলে।

সাম্যাবস্থা (Equilibrium) : একাধিক বলের প্রয়োগে কোন বস্তুর স্থির অবস্থা বা গতীয় অবস্থায় পরিবর্তন না হইলে, বলসমূহ **সাম্যাবস্থায়** আছে বলা হয়। কোনও বস্তু স্থিরাবস্থায় থাকিলে, উহার উপর প্রযুক্ত বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকে।

স্থিতিবিদ্যা (Statics) : বস্তুর এবং বলসমূহের সাম্যাবস্থা সম্বন্ধে **বলবিদ্যার** যে শাখায় আলোচনা করা হয়, তাহাকে **স্থিতিবিদ্যা** (Statics) বলে।

§ 1·2. বলের পরিমাপ (Measurement of Forces) : গতিবিদ্যা অংশে বলের পরিমাপের একক সম্বন্ধে বলা হইয়াছে (নিউটনের দ্বিতীয়

গতি-সূত্র)। কিন্তু গতিবিদ্যায় বস্তুর গতিশীল অবস্থায় আলোচনা করা হয় আর স্থিতিবিদ্যায় আলোচ্য বস্তুর স্থিরাবস্থা। সুতরাং স্থিতিবিদ্যায় একক বলের সংজ্ঞা বস্তুর স্থিরাবস্থার পরিপ্রেক্ষিতে দেওয়া প্রয়োজন। স্থিতিবিদ্যায় বলের পরিমাপ সাধারণতঃ কোন নির্দিষ্ট ভরের ভার হিসাবে প্রকাশ করা হয়। সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একক 'এক গ্রাম-ভার' (one gramme-weight)। এক গ্রাম ভরের বস্তুকে ধরিয়া রাখিবার জন্য উর্ধ্বমুখী যে বলের প্রয়োগ করিতে হয়, তাহাই 'এক গ্রাম-ভার' বল। যদিও অভিকর্ষজ ত্বরণ সর্বত্র সমান নয়, তথাপি স্থিতিবিদ্যায় একগ্রাম ভরের ভার কোন নির্দিষ্ট স্থানে ধ্রুবক বলিয়া, 'এক গ্রাম-ভার'কে বলের একক ধরায় কোন অসুবিধা হয় না। 'এক গ্রাম-ভার' বলকে সাধারণতঃ সংক্ষেপে 'এক গ্রাম-বল' বলা হয়। এফ. পি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একক 'এক পাউণ্ড-ভার' বা 'এক পাউণ্ড-বল'। অধুনা প্রচলিত এম্. কে. এস্. (মিটার-কিলোগ্রাম-সেকেণ্ড) পদ্ধতিতে বলের একক 'এক কিলোগ্রাম ভার' বা 'এক কে.জি. ভার' বা 'এক কে.জি. বল'। 15 কে.জি. ভরের বস্তুকে ধরিয়া রাখিবার জন্য উর্ধ্বমুখী যে বলের প্রয়োগ করিতে হয় তাহাই 15 কে. জি.-ভার বল। দুইটি সমান বল বলিতে দুইটি সমান পরিমাপের বলকে বুঝান হইবে।

§ 1·3. **নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশ দ্বারা বলের প্রকাশ** (Representation of a force by a directed-line-segment.):

একটি বলকে সম্পূর্ণরূপে জানিতে হইলে বলটি সম্বন্ধে নিম্নলিখিত চারিটি বিষয় জানা প্রয়োজন; যথা, (i) **প্রয়োগ বিন্দু** (Point of application); (ii) **পরিমাপ** (magnitude); (iii) **দিক্** (direction); ও (iv) **অভিমুখিতা** (sense).

(i) কোন বস্তুর যে বিন্দুতে কোন বল প্রয়োগ করা হয়, বস্তুটির সেই বিন্দুকে বলটির **প্রয়োগ বিন্দু** বলা হয়।

(ii) বলের পরিমাপ সম্বন্ধে পূর্ব অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হইয়াছে।

(iii) কোনও বল যে দিকে প্রয়োগ করা হয়, তাহাই বলের **দিক**। কোন বল যদি কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$-র সমান্তরাল দিকে প্রযুক্ত হয়, তবে $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার দিকই বলের দিক।

(iv) কোন বলের দিক $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার দিক বলিলে বুঝা যায় না যে, বলটি A বিন্দু হইতে B বিন্দুর দিকে না B বিন্দু হইতে A বিন্দুর দিকে প্রযুক্ত।

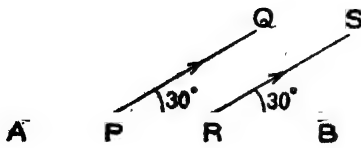
$\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার দিকে প্রযুক্ত বলসমূহের অভিমুখিতা A বিন্দু হইতে B বিন্দুর দিকে অথবা B বিন্দু হইতে A বিন্দুর দিকে হইতে পারে। সুতরাং একই দিকে প্রযুক্ত বলসমূহের অভিমুখিতা দুই প্রকারের হইতে পারে।

যে কোন সরলরেখাংশের প্রান্তবিন্দু দুইটির একটিকে **প্রারম্ভ বিন্দু** (Initial point) ও অপরটিকে **অন্তিম বিন্দু** (Terminal point) ধরিয়া সরলরেখাংশটিকে **নিয়ন্ত্রিত** (directed) করা যায়। নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশকে প্রকাশের জন্য আমরা নিম্নলিখিত প্রথা অনুসরণ করিব। A ও B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশকে $\overline{AB}$ দ্বারা নির্দেশ করা হইবে। $\overline{AB}$ নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশের প্রারম্ভ বিন্দু A ও অন্তিম বিন্দু B এবং $\overline{BA}$ নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশের প্রারম্ভ বিন্দু B ও অন্তিম বিন্দু A.

কোন সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যই উহার পরিমাপ এবং উহা কোন নির্দিষ্ট দিক্‌কে নির্দেশ করে। নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশের অভিমুখিতা উহার প্রারম্ভ বিন্দু হইতে অন্তিম বিন্দুর দিকে। অতএব যে সকল বৈশিষ্ট্য জানা থাকিলে একটি বলকে সম্পূর্ণরূপে জানা যায়, নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশেরও সেই সকল বৈশিষ্ট্য বর্তমান। সুতরাং নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশ দ্বারা বলের প্রকাশ করা যাইতে পারে। সরলরেখাংশ দ্বারা বলের প্রকাশ করিতে হইলে প্রথমেই স্কেল (scale) নির্দিষ্ট করিতে হয়।

স্কেল (Scale): যদি একাধিক বলকে একই চিত্রে প্রকাশ করিতে হয়, তবে বলগুলির পরিমাপ ও যে সকল সরলরেখাংশ উহাদের প্রকাশ করিবে, তাহাদের দৈর্ঘ্যগুলির সমানুপাতিক হওয়া প্রয়োজন। এই সমানুপাতই বল প্রকাশের স্কেল। মনে কর 1 সে. মি.=1 কে. জি.-ভার বল। সুতরাং 5 কে. জি.-ভার বলকে 5 সে. মি. দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশ দ্বারা এবং 12 কে.জি.-ভার বলকে 12 সে.মি. দীর্ঘ নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে। মনে কর $\overleftrightarrow{AB}$ একটি জ্ঞাত সরলরেখা অর্থাৎ $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার অবস্থান ও সুতরাং উহার দিক জানা আছে। চিত্রে $\overline{PQ}$ রেখাংশের দৈর্ঘ্য 4 সে. মি. এবং $m\angle QPB=30°$.

মনে কর, স্কেল: 1 সে. মি.=5 কে. জি. ভার। সুতরাং নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{PQ}$, 4×5 কে. জি. ভার=20 কে. জি.-ভার বলকে নির্দেশ করিবে। এই বলের দিক প্রদত্ত $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার সহিত 30° কোণে নত

অর্থাৎ $m\angle QPB = 30°$. এই বলের অভিমুখিতা যে P হইতে Q-এর দিকে, তাহা চিত্রে তীর চিহ্ন দ্বারা দেখান হইয়াছে। সুতরাং নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশ $\overline{PQ}$, 20 কে. জি.-ভার বলটি সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করে। নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশ $\overline{QP}$ একই স্কেলে একই দিকে বিপরীতমুখী 20 কে. জি.-ভার বলকে প্রকাশ করিবে। আবার $\overline{PQ}$ ও $\overline{RS}$, নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশ দুইটি সমান ও সমান্তরাল এবং একই অভিমুখিতাবিশিষ্ট।

চিত্র 1

সুতরাং একই স্কেলে $\overline{RS}$ ও $\overline{PQ}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশদ্বয় একই বলকে প্রকাশ করিবে; এবং ইহা $\overline{PQ}$এর সমান, সমান্তরাল ও একই অভিমুখিতাবিশিষ্ট সকল নিয়ন্ত্রিত রেখাংশের পক্ষেই সত্য। সুতরাং নীচের গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্তটি পাওয়া গেল।

সিদ্ধান্ত: সমান, সমান্তরাল ও একই অভিমুখিতাবিশিষ্ট সকল নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশ একই স্কেলে একই বলকে প্রকাশ করে।

উদাহরণ 1. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 12 সে. মি. ও 5 সে. মি.। 12 সে. মি. দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বাহুটি 60 গ্রাম বলকে প্রকাশ করে। একই স্কেলে সমকোণী ত্রিভুজটির অতিভুজটি কি পরিমাপের বলকে প্রকাশ করিবে ?

সমকোণী ত্রিভুজটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য $\sqrt{12^2+5^2}=13$ সে. মি.

যেহেতু 12 সে. মি. দৈর্ঘ্য 60 গ্রাম বলকে প্রকাশ করে, সুতরাং স্কেল : 1 সে. মি.$=\frac{60}{12}=5$ গ্রাম বল।

অতএব 13 সে. মি. দৈর্ঘ্য, $13\times5=65$ গ্রাম বলকে প্রকাশ করিবে অর্থাৎ, সমকোণী ত্রিভুজটির অতিভুজ 65 গ্রাম বলকে প্রকাশ করিবে।

উদাহরণ 2. ABCD সামান্তরিকের $\overline{AB}$ ও $\overline{DC}$ বাহুদ্বয় একই স্কেলে একই বলকে প্রকাশ করে।

যেহেতু ABCD একটি সামান্তরিক, অতএব $\overline{AB}$ ও $\overline{DC}$ নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশ দুইটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল এবং উহাদের একই অভিমুখিতা। সুতরাং $\overline{AB}$ ও $\overline{DC}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ দুইটি একই স্কেলে একই বলকে প্রকাশ করে।

উদাহরণ 3. 3 গ্রাম, 4 গ্রাম ও 8 গ্রাম পরিমাণের তিনটি বলকে একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা প্রকাশ করা যায় না।

মনে কর স্কেল : 1 গ্রাম বল $=l$ সে. মি.।

সুতরাং প্রদত্ত বল তিনটির পরিমাপকে $3l$, $4l$ ও $8l$ সে. মি. দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট তিনটি নিয়ন্ত্রিত সরলরেখাংশ প্রকাশ করিবে। এক্ষণে যেহেতু $8l > 3l + 4l$ এবং ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর (অথবা সমান), সুতরাং $3l$, $4l$ ও $8l$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট তিনটি রেখাংশ একটি ত্রিভুজের বাহু হইতে পারে না।

সুতরাং প্রদত্ত বল তিনটিকে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা প্রকাশ করা যাইবে না।

§ 1·4. বলের সঞ্চালন নীতি (Principle of Transmissibility of Forces) :

বলের সঞ্চালন নীতি সম্বন্ধে আলোচনার পূর্বে নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধটি জানা প্রয়োজন।

স্বতঃসিদ্ধ : কোন দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত দুইটি বিপরীতমুখী সমান বলের একই ক্রিয়ারেখা হইলে, বস্তুটির অবস্থার পরিবর্তন হয় না।

বলের সঞ্চালন নীতি : কোন দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত কোন বলের প্রয়োগবিন্দু, ঐ বলের ক্রিয়ারেখার অপর কোন বিন্দুতে (বিন্দু দুইটি দৃঢ়সংযুক্ত) স্থানান্তরিত হইলে বস্তুটির অবস্থার পরিবর্তন হইবে না।

প্রমাণ : মনে কর একটি দৃঢ় বস্তুর O বিন্দুতে প্রযুক্ত একটি বল Fএর ক্রিয়া-রেখা $\overrightarrow{OX}$ এবং O′, $\overleftrightarrow{OX}$ রেখার এরূপ একটি বিন্দু যে, O এবং O′ বিন্দুদ্বয় দৃঢ়ভাবে সংযুক্ত। এক্ষণে, বস্তুটির উপর O′ বিন্দুতে $\overleftrightarrow{OX}$ রেখা বরাবর দুইটি বিপরীত বল F, F প্রয়োগ কর। এই অনুচ্ছেদে উল্লেখিত স্বতঃসিদ্ধ অনুযায়ী এই দুইটি বলের প্রয়োগের ফলে বস্তুটির অবস্থার কোন পরিবর্তন হইবে না। এখানে O বিন্দুতে প্রযুক্ত বল F এবং O′ বিন্দুতে প্রযুক্ত বিপরীতমুখী বল F পরস্পরকে অপসারিত (Cancell বা Balance) করে। সুতরাং এক্ষণে, বস্তুটির উপর ঐ তিনটি বল F-এর স্থলে ক্রিয়মাণ রহিল O′ বিন্দুতে প্রযুক্ত একটি মাত্র

চিত্র 2

বল F, যাহার মান, ক্রিয়ারেখা ও অভিমুখিতা O বিন্দুতে প্রযুক্ত প্রদত্ত বল F-এর সহিত অভিন্ন। সুতরাং O বিন্দুতে প্রযুক্ত F বলের পরিবর্তে উহার ক্রিয়ারেখার O′ বিন্দুতে প্রযুক্ত F বল গ্রহণ করা যায়।

§. 1·5. **বলের শ্রেণীবিভাগ** (Classification of forces)

বলসমূহকে প্রধানতঃ তিনটি শ্রেণীতে বিভক্ত করা যায়, যথা (ক) আকর্ষণ ও বিকর্ষণ (খ) ঘাত ও টান এবং (গ) প্রতিক্রিয়া ও ঘর্ষণ।

(ক) **আকর্ষণ ও বিকর্ষণ** (Attraction and Repulsion)

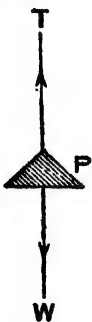
দুইটি বস্তু পরস্পরের সংস্পর্শে না থাকিলে, উহাদের একটি যখন কোন মাধ্যমের সাহায্য ব্যতিরেকেই অপরটির উপর বলপ্রয়োগ করিয়া উহাকে কাছে আনিতে চেষ্টা করে, তখন বলটিকে **আকর্ষণ বল** বলে। আর একটি বস্তুকে যখন অপরটি দূরে সরাইয়া দেয় অথবা দূরে সরাইয়া দিতে চেষ্টা করে তখন বলটিকে **বিকর্ষণ বল** বলে।

পৃথিবী প্রত্যেক বস্তুকে তাহার কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে এবং এই আকর্ষণের পরিমাপই যে বস্তুটির **ভার** (weight) তাহা গতিবিদ্যা অংশে বলা হইয়াছে।

(খ) **ঘাত ও টান** (Thrust and Tension)

কোনও বস্তুকে ধাক্কা দিয়া বস্তুটির উপর বল প্রয়োগ করা হইলে প্রযুক্ত বলকে **ঘাত** (Thrust) বা **ধাক্কা** (Push) বলে। একটি ফুটবলে যখন কিক্ করা হয় অথবা ধাক্কা দিয়া যখন কোন দরজা খোলা হয়, তখন ঘাতের প্রয়োগ হয়।

স্থিতিবিদ্যায় টানের আলোচনা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। নীচের পরীক্ষাটির সাহায্যে টান কাহাকে বলে তাহা ব্যাখ্যা করা হইতেছে।

পরীক্ষা: একটি ছোট কিন্তু ভারী বস্তু একটি দড়ির একপ্রান্তে বাঁধিয়া অপর প্রান্তটি আঙুল দ্বারা চাপিয়া ঝুলাইয়া দাও। বস্তুটির ভার বা ওজন W বস্তুটিকে নীচের দিকে টানিতে চেষ্টা করিবে। এখন বস্তুটির ভার Wএর বস্তুটিকে নীচের দিকে টানিবার প্রচেষ্টা প্রতিরোধ করিয়া বস্তুটিকে স্থির অবস্থায় রাখিবার জন্য তুমি তোমার আঙুল এবং হাতের মাংসপেশীর সাহায্যে বিপরীতদিকে (অর্থাৎ উপরেরদিকে) বলপ্রয়োগ করিবে।

T

P

W

চিত্র 3

মনে কর এই বল T. দেখা যাইবে যে,

$T > W$ হইলে, বস্তুটির ঊর্ধ্বগতি হইবে।

T = W হইলে, বস্তুটি স্থিরাবস্থায় থাকিবে।

এবং T < W হইলে, বস্তুটির নিম্নগতি হইবে।

প্রকৃতপক্ষে বলের সঞ্চালন নীতি অনুযায়ী তোমার আঙুল ও বাহুর মাংসপেশীর দ্বারা প্রযুক্ত বল T দড়িটির দ্বারা বস্তুটির উপর সঞ্চালিত হয় এবং বস্তুর ভারও দড়ির দ্বারা তোমার আঙুলের উপর সঞ্চালিত হয়। ফলে দড়িটির প্রত্যেক বিন্দুতে দুইটি বিপরীতমুখী বল ক্রিয়মাণ হয় এবং বলা হয় দড়িটির উপর **টান** T (Tension) প্রযুক্ত হইয়াছে। এই টান দড়ির প্রত্যেক বিন্দুতে সমান।

সুতরাং বস্তুর ভার যত বাড়িবে, T-এর মানও তত অধিক হইবে। কিন্তু প্রত্যেক দড়িতে সঞ্চালিত টানের একটি ঊর্ধ্বসীমা থাকে, অর্থাৎ এই টানের পরিমাপের একটি বৃহত্তম মান থাকে। এই বৃহত্তম মান দড়িটির গঠনের উপর নির্ভর করে এবং বিভিন্ন দড়ির জন্য টানের এই বৃহত্তম মান বিভিন্ন হয়। যখন বস্তুটির ভার দড়ির টানের এই বৃহত্তম মান অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তখন বস্তুটি দড়ি হইতে ছিঁড়িয়া পড়ে।

দ্রষ্টব্য : 1. কোন দড়ির টানের বৃহত্তম মান দড়িটি কোন্ পদার্থের দ্বারা প্রস্তুত, তাহার উপর নির্ভর করে।

2. দড়ির টানের বৃহত্তম মান দড়িটির প্রস্থচ্ছেদের উপর নির্ভরশীল।

3. দড়ির টানের বৃহত্তম মান, দড়ির দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভরশীল নয়।

4. দড়িটি দীর্ঘ হইলে বল প্রয়োগ অধিকাংশ ক্ষেত্রে সুবিধাজনক হয়।

5. একাধিক দড়িকে বাঁধিয়া একটি দীর্ঘ দড়ি প্রস্তুত করিলে, বিভিন্ন অংশের টান সমান নাও হইতে পারে।

(গ) প্রতিক্রিয়া ও ঘর্ষণ (Reaction and Friction)

প্রতিক্রিয়া ও ঘর্ষণ সম্বন্ধে 'গতিবিদ্যা অংশে' সম্যক আলোচনা করা হইয়াছে।

প্রশ্নমালা 1

1. 15 কে. জি. পরিমাপের একটি বল 3 সে. মি. দীর্ঘ একটি নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ দ্বারা প্রকাশিত হইলে স্কেল নির্ণয় কর।

2. প্রশ্ন 1-এ নির্ণীত স্কেলে পরস্পর সমকোণে নত 50 কে. জি. ও 40 কে. জি. পরিমাপের দুইটি বলকে নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ কর।

3. ABCD সামান্তরিকের $\overline{AB}$ ও $\overline{DC}$ দুইটি বিপরীত বাহু। নীচের কোন্‌টি সত্য ? একই স্কেলে, $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ দুইটি

(i) একই বলকে প্রকাশ করে।

(ii) দুইটি সমপরিমাপের বিপরীত অভিমুখিতাবিশিষ্ট বলকে প্রকাশ করে।

(iii) (i) ও (ii)-এর কোনটিই সত্য নহে।

4. একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের সহিত যথাক্রমে 30° ও 45° কোণে নত 50 কে. জি. ও 75 কে. জি. বলকে নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ কর।

(স্কেল : 1 সে. মি.=5 কে. জি.)

5. 100 গ্রাম, 200 গ্রাম ও 250 গ্রাম ভারবিশিষ্ট তিনটি বলকে একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা কি প্রকাশ করা যায় ? তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

দ্বিতীয় অধ্যায়

একাধিক সমবিন্দু বলের লব্ধি নির্ণয় ও বলের বিশ্লেষণ

§ 2·1. **লব্ধি** (Resultant) : একাধিক বল একটি বস্তুর এক বা একাধিক বিন্দুতে প্রযুক্ত হইল, যদি এরূপ একটি বল R পাওয়া যায় যে, বস্তুটির উপর ঐ একাধিক বলের সম্মিলিত ক্রিয়া এবং R বলের ক্রিয়া সমান হয়, তবে R বলকে ঐ একাধিক বলসমূহের **লব্ধি বল** (Resultant Force) বলে।

একাধিক বলের লব্ধি বলের পরিমাপ শূন্য হইলে, ঐ বলগুলির মোট ফল শূন্য এবং বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকে। কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত একাধিক বলকে, তাহাদের লব্ধি বলের **উপাংশ** (components) বলা হয়।

বর্তমান অধ্যায়ে আমরা একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত বলসমূহ সম্বন্ধে আলোচনা করিব। একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত একাধিক বলকে **সমবিন্দু বল** (concurrent forces) বলা হয়।

§ 2·2. **বলের সামান্তরিক সূত্র** (Parallelogram of Forces) :

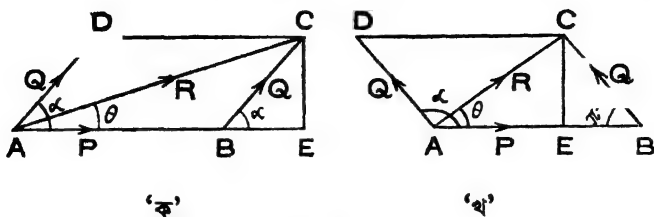
একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বলের মান, দিক্ ও অভিমুখিতা জানা থাকিলে, বলের সামান্তরিক সূত্র হইতে ঐ বল দুইটির লব্ধি বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা জানা যায়। সূত্রটির সত্যতা পরীক্ষার দ্বারা প্রমাণ করা যায়। নীচে সূত্রটি বিবৃত করা হইল।

বলের সামান্তরিক সূত্র : একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু [ছেদবিন্দু হইতে অপসারি (divergent) অভিমুখিতায়] দ্বারা প্রকাশ করা গেলে, ঐ বল দুইটির লব্ধি বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা সামান্তরিকটির ঐ বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইতে অঙ্কিত কর্ণদ্বারা প্রকাশিত হইবে।

মনে কর, দুইটি বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা ABCD সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত বাহু $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ দ্বারা প্রকাশিত। উহাদের লব্ধি বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা সামান্তরিকটির $\overline{AC}$ কর্ণদ্বারা প্রকাশিত হইবে। (চিত্র 4 দেখ)

§ 2·3: একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বল P ও Q পরস্পরের সহিত α-কোণে নত। বল দুইটির লব্ধি বলকে P, Q ও α দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে।

একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বল P ও Q, ABCD সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত বাহু $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ দ্বারা প্রকাশিত এবং P ও Q পরস্পরের সহিত α-কোণে নত। সুতরাং $m\angle BAD=\alpha$ এবং সামান্তরিকটির $\overline{AC}$ কর্ণ P ও Q-এর লব্ধি বল R-এর

'ক' 'খ'

চিত্র 4

মান, দিক ও অভিমুখিতা প্রকাশ করে। যেহেতু $\overline{AD}$ ও $\overline{BC}$ পরস্পর সমান ও সমান্তরাল, অতএব $\overline{AD}$ ও $\overline{BC}$ উভয়েই একই বলকে প্রকাশ করিবে। সুতরাং $\overline{BC}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ প্রদত্ত Q বলকে প্রকাশ করে। C হইতে CE, AB-র উপর লম্ব অঙ্কন কর, CE চিত্র (ক)-এ বর্ধিত ABকে এবং চিত্র (খ)-এ ABকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

এক্ষণে চিত্র (ক)-এ, $m\angle CBE=$ অনুরূপ $m\angle DAB=\alpha$.

এবং চিত্র (খ)-এ, $m\angle CBE+$ বিপরীত $m\angle DAB=\pi$

$\therefore \quad m\angle CBE=\pi-$ বিপরীত $m\angle DAB$

$=\pi-\alpha.$

আবার চিত্র (ক)-এ $CE=BC.\frac{CE}{BC}=Q\sin\alpha.$

এবং $BE=BC.\frac{BE}{BC}=Q\cos\alpha$

চিত্র (খ)-এ $CE=BC.\frac{CE}{BC}=Q\sin(\pi-\alpha)=Q\sin\alpha$

এবং $BE=BC.\frac{BE}{BC}=Q\cos(\pi-\alpha)=-Q\cos\alpha.$

সুতরাং চিত্র (ক)-এ, $AE=AB+BE=P+Q\cos\alpha$

এবং চিত্র (খ)-এ, $AE=AB-BE=P-(-Q\cos\alpha)$

$=P+Q\cos\alpha.$

এক্ষণে উভয়চিত্রে সমকোণী ত্রিভুজ CAE হইতে পাই,

$CA^2=AE^2+CE^2.$

বা, $R^2=(P+Q\cos\alpha)^2+(Q\sin\alpha)^2$

$$=P^2+2PQ\cos\alpha+Q^2\cos^2\alpha+Q^2\sin^2\alpha$$
$$=P^2+2PQ\cos\alpha+Q^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$$
$$=P^2+2PQ\cos\alpha+Q^2$$
$$\therefore \quad R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}.$$

এক্ষণে, লব্ধি বল R, P বলের সহিত θ কোণে নত হইলে,

উভয়চিত্রে, $\tan\theta=\frac{CE}{AE}=\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

$$\therefore \quad \theta=\tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

সুতরাং লব্ধি বলের পরিমাপ $R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$ এবং দিক, P বলের সহিত $\theta=\tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ কোণে নত। বলটির অভিমুখিতা A হইতে C-র দিকে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. P এবং Q প্রদত্ত হইলে, R-এর মান বৃহত্তম হইবে যখন $\cos\alpha$-র মান বৃহত্তম। আমরা জানি $\cos\alpha$-র বৃহত্তম মান 1 যখন $\alpha=0°$. সুতরাং R-এর বৃহত্তম মান $\sqrt{P^2+Q^2+2PQ.1}=\sqrt{(P+Q)^2}$ $=P+Q$ এবং তখন P ও Q, 0° কোণে নত হয় অর্থাৎ বল দুইটির দিক ও অভিমুখিতা অভিন্ন।

অনুসিদ্ধান্ত 2. P এবং Q প্রদত্ত হইলে, R-এর মান ক্ষুদ্রতম হইবে যখন $\cos\alpha$-র মান ক্ষুদ্রতম। আমরা জানি $\cos\alpha$-র ক্ষুদ্রতম মান -1 যখন $\alpha=180°$.

সুতরাং R এর ক্ষুদ্রতম মান $\sqrt{P^2+Q^2+2PQ(-1)}=\sqrt{(P-Q)^2}$ $=P-Q$ এবং তখন P ও Q, 180° কোণে নত অর্থাৎ বল দুইটি একই সরলরেখায় পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে। এইক্ষেত্রে বল দুইটি সমান হইলে, উহাদের লব্ধি বলের পরিমাপ শূন্য এবং বল দুইটি সাম্যাবস্থায় থাকে। সুতরাং কোন কণার উপর প্রযুক্ত দুইটি সমপরিমাপের বলের একই ক্রিয়ারেখা কিন্তু বিপরীত অভিমুখিতা হইলে বল দুইটি সাম্যাবস্থায় থাকে।

উদাহরণ ঃ প্রদত্ত পরিমাপের দুইটি সমবিন্দু বলের বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি যথাক্রমে 12 কে. জি. ও 2 কে. জি.। বল দুইটির পরিমাপ নির্ণয় কর।

মনে কর বল দুইটি P ও Q $(P>Q)$. সুতরাং প্রশ্নানুসারে, উহাদের বৃহত্তম লব্ধি $P+Q=12$ কে. জি.……(1)

এবং উহাদের ক্ষুদ্রতম লব্ধি $P-Q=2$ কে. জি.……(2)

(1) ও (2) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই

$P=7$ কে. জি. ও $Q=5$ কে. জি.।

অনুসিদ্ধান্ত 3. $\alpha=90°$ হইলে অর্থাৎ বল দুইটি পরস্পর সমকোণে নত হইলে, $\cos\alpha=\cos 90°=0$.

সুতরাং $R^2=P^2+Q^2$ বা, $R=\sqrt{P^2+Q^2}$.

অনুসিদ্ধান্ত 4. যদি বল দুইটির পরিমাপ সমান হয়, অর্থাৎ $P=Q$ হয়,

$R^2=P^2+P^2+2P.P.\cos\alpha=2P^2+2P^2\cos\alpha$

$$=2P^2(1+\cos\alpha)=2P^2.2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \therefore \quad R=2P\cos\frac{\alpha}{2}$$

উদাহরণ: দুইটি সমান পরিমাপের বল 2α কোণে নত হইলে উহাদের লব্ধি বল হয় R, আবার বল দুইটি যখন 2β কোণে নত হয়, তখন উহাদের লব্ধি বল হয় 2R. প্রমাণ কর যে, $\cos\beta=2\cos\alpha$.

মনে কর বল দুইটি প্রত্যেকটির পরিমাপ P.

সুতরাং উহারা যখন 2α কোণে নত, তখন উহাদের লব্ধি বল

$R=2P\cos\frac{2\alpha}{2}=2P\cos\alpha$……(1)

আবার বল দুইটি যখন 2β কোণে নত, তখন উহাদের লব্ধি বল

$2R=2P\cos\frac{2\beta}{2}=2P\cos\beta$……(2)

(2) কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$2=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \quad \therefore \quad \cos\beta=2\cos\alpha$$

অনুসিদ্ধান্ত 5. লব্ধি বল বৃহত্তর বলের অধিকতর নিকটবর্তী হয়।

মনে কর $P>Q$,

$\therefore$ চিত্র 4-এ, $AB>BC$, সুতরাং $m\angle CAB<m\angle ACB$.

অর্থাৎ $m\angle CAB<m\angle DAC$.

অনুসিদ্ধান্ত 6. যেহেতু $R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$ এবং α-র বৃদ্ধি হইলে $\cos\alpha$-র হ্রাস হয়, সুতরাং দুইটি বলের অন্তর্গত কোণ বৃদ্ধি পাইলে উহাদের লব্ধি বলের পরিমাণ হ্রাস পাইবে।

§ 2·8. (a) ভেক্টর চিহ্ন (Vector-notation)

চিত্র 4-এ যেহেতু $\overline{AD}$ ও $\overline{BC}$ দুইটি সমান নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ (AD ও BC সমান ও সমান্তরাল), সুতরাং উহারা একই বলকে প্রকাশ করিবে। এক্ষণে, সামান্তরিক সূত্র হইতে পাই, $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ দ্বারা প্রকাশিত বল দুইটির লব্ধি বল $\overline{AC}$ দ্বারা প্রকাশিত। সুতরাং $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$ দ্বারা প্রকাশিত দুইটি বলের লব্ধি বল $\overline{AC}$ দ্বারা প্রকাশিত হইবে। অতএব একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বল কোন ত্রিভুজ ABC-র ক্রমানুসারে গৃহীত দুইটি বাহু $\overline{AB}$ এবং $\overline{BC}$ দ্বারা প্রকাশিত হইলে, বিপরীতক্রমে গৃহীত তৃতীয় বাহু $\overline{AC}$ তাহাদের লব্ধি বলকে প্রকাশ করিবে। ভেক্টর চিহ্নে উপরের তথ্যটিকে $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ লেখা হয়।

উদা. 1. দুইটি P পরিমাপের সমবিন্দু সমান বলের লব্ধি বলের পরিমাপও P হইলে, বল দুইটির অন্তর্ভূত কোণটি নির্ণয় কর। [P. U. 1930]

মনে কর নির্ণেয় কোণের পরিমাণ α.

$\therefore\quad R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$ সূত্র হইতে পাই

$P^2=P^2+P^2+2P.P\cos\alpha$ [এখানে P, Q, R প্রত্যেকটিই P]

$=2P^2(1+\cos\alpha)$

বা, $\dfrac{P^2}{2P^2}=1+\cos\alpha$, বা, $1+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ $\therefore\ \cos\alpha=-\dfrac{1}{2}=\cos 120^\circ$

$\therefore\quad \alpha=120^\circ$.

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি সমান বলের লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা সমান বল দুইটির ক্রিয়ারেখা দুইটির অন্তর্ভূত কোণটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

মনে কর সমান বল দুইটির পরিমাপ P এবং উহাদের ক্রিয়ারেখা দুইটির অন্তর্গত কোণটির পরিমাপ α. এক্ষণে, যদি বল দুইটির লব্ধি বল যে কোন একটি বল P-এর সহিত θ-কোণে নত হয়, তবে

$$\tan\theta=\frac{P\sin\alpha}{P+P\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}$$

$\therefore\quad \theta=\dfrac{\alpha}{2}$. সুতরাং লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা, সমান বল দুইটির ক্রিয়া-রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উদা. 3. যদি দুইটি সমান বলের লব্ধির বর্গ ঐ বলদ্বয়ের গুণফলের দ্বিগুণ হয়, তবে উহাদের অন্তর্গত কোণটি নির্ণয় কর। [H. S. '72]

মনে কর, সমান বল দুইটির পরিমাপ P. সুতরাং উহাদের লব্ধি বলের পরিমাপ R হইলে, প্রশ্নানুসারে $R^2 = 2P^2$.

মনে কর, বল দুইটির অন্তর্গত কোণ α. $\therefore \quad R = 2P \cos \frac{\alpha}{2}$.

সুতরাং $2P^2 = R^2 = 4P^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, $\quad \therefore \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2P^2}{4P^2} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45°$, $\quad \therefore \quad \frac{\alpha}{2} = 45°$ বা, $\alpha = 90°$

সুতরাং নির্ণেয় কোণ 90°.

উদা. 4. দুইটি বলের একটির পরিমাপ অপরটির দ্বিগুণ এবং উহাদের লব্ধি বল ক্ষুদ্রতর বলটির সহিত সমকোণে নত। বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণটির পরিমাপ নির্ণয় কর।

মনে কর বল দুইটি P ও 2P.

[এই প্রশ্নে $\tan \theta = \frac{Q \sin \alpha}{P + Q \cos \alpha}$ সূত্রের প্রয়োগ করিতে হইবে। এখানে $\theta = 90°$, $P = P$, $Q = 2P$; α নির্ণয় করিতে হইবে।]

প্রশ্নানুসারে, $\tan 90° = \frac{2P \sin \alpha}{P + 2P \cos \alpha}$

যেহেতু $\tan 90°$ অসংজ্ঞেয়, $\quad \therefore \quad P + 2P \cos \alpha = 0$

বা, $2P \cos \alpha = -P$ বা, $\cos \alpha = -\frac{P}{2P} = -\frac{1}{2} = \cos 120°$

$\therefore \quad \alpha = 120°$ অর্থাৎ বল দুইটি 120° কোণে নত।

উদা. 5. একটি কণার উপর ক্রিয়মাণ দুইটি বল P ও Q যখন α কোণে নত, তখন উহাদের লব্ধি বলের পরিমাপ $(2K+1)\sqrt{P^2+Q^2}$. আবার বল দুইটি যদি $90° - \alpha$ কোণে নত হয়, তখন লব্ধি বলের পরিমাপ হয়, $(2K-1)\sqrt{P^2+Q^2}$.

প্রমাণ কর যে, $\tan \alpha = \frac{K-1}{K+1}$. [B. H. U. 1946]

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$ সূত্র হইতে পাই,

প্রথম ক্ষেত্রে, $\{(2K+1)\sqrt{P^2+Q^2}\}^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$

বা, $(2K+1)^2(P^2+Q^2) = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$

বা, $(P^2+Q^2)\{(2K+1)^2 - 1\} = 2PQ \cos \alpha$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $(P^2+Q^2)(4K^2+4K+1-1)=2PQ \cos \alpha$

বা, $(P^2+Q^2)4K(K+1)=2PQ \cos \alpha \cdots\cdots(1)$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $\{(2K-1)\sqrt{P^2+Q^2}\}^2=P^2+Q^2+2PQ \cos (90^\circ-\alpha)$

বা, $(2K-1)^2(P^2+Q^2)=P^2+Q^2+2PQ \sin \alpha$

বা, $(P^2+Q^2)\{(2K-1)^2-1\}=2PQ \sin \alpha$

বা, $(P^2+Q^2)(4K^2-4K)=2PQ \sin \alpha$

বা, $(P^2+Q^2)4K(K-1)=2PQ \sin \alpha \cdots\cdots(2)$

সমীকরণ-(2) কে, সমীকরণ-(1) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$$\frac{K-1}{K+1}=\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \text{বা,} \quad \tan \alpha=\frac{K-1}{K+1}.$$

উদা. 6. P এবং Q পরিমাপের দুইটি সমবিন্দু বলের লব্ধি বল $\sqrt{3}Q$ এবং উহা P বলের সহিত 30° কোণে নত। দেখাও যে $P=Q$ অথবা $P=2Q$.

ত্রিকোণমিতি হইতে আমরা জানি, $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

এক্ষণে, $\triangle ABC$ হইতে পাই,

$$\cos A=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC.AB} \quad [\text{ চিত্র 4 দেখ }]$$

এক্ষণে, $A=30^\circ$, $AC=\sqrt{3}Q$, $AB=P$ এবং $BC=Q$

$\therefore \quad \cos 30^\circ=\dfrac{3Q^2+P^2-Q^2}{2\sqrt{3}Q.P}$, বা, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{P^2+2Q^2}{2\sqrt{3}PQ}$

বা, $P^2+2Q^2=3PQ$, বা, $P^2-3PQ+2Q^2=0$.

বা, $(P-Q)(P-2Q)=0$. $\therefore \quad P=Q$, বা, $P=2Q$.

উদা. 7. দুইটি সমবিন্দু বলের ক্ষুদ্রতম লব্ধির পরিমাপ 31 কে. জি. এবং উহারা যখন সমকোণে নত থাকে, তখন উহাদের লব্ধির পরিমাণ হয় 49 কে. জি.। বল দুইটির পরিমাপ নির্ণয় কর।

মনে কর বল দুইটির পরিমাপ P কে. জি. ও Q কে. জি. এবং $P>Q$.

সুতরাং উহাদের ক্ষুদ্রতম লব্ধি $P-Q=31\cdots\cdots(1)$

আবার, বল দুইটি যখন সমকোণে নত থাকে, তখন উহাদের লব্ধি বল $\sqrt{P^2+Q^2}=41$, বা, $P^2+Q^2=41^2\cdots\cdots(2)$

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $(P-Q)^2=31^2$

বা, $P^2+Q^2-2PQ=31^2$

বা, $41^2-2PQ=31^2$ [(2) হইতে]

বা, $2PQ = 41^2 - 31^2 = (41+31)(41-31) = 720.$

$\therefore \quad (P+Q)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ = 41^2 + 720$
$= 1681 + 720 = 2401$

$\therefore \quad P+Q = \sqrt{2401} = 49 \cdots\cdots (3)$ [লব্ধি বলের পরিমাপ ঋণাত্মক হইতে পারে না বলিয়া ঋণাত্মক চিহ্ন অগ্রাহ্য হইল।]

এক্ষণে, (1) ও (3)-সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাই,
$P = 40$ এবং $Q = 9$.

সুতরাং বল দুইটির পরিমাপ 40 কে. জি. ও 9 কে. জি.।

উদা. 8. একটি কণায় সমকোণে ক্রিয়ারত দুইটি বলের ক্ষুদ্রতরটি 8 পাউণ্ড ভার এবং উহাদের লব্ধি ও বৃহত্তর বলের সমষ্টি 288 পাউণ্ড ভার। লব্ধি ও বৃহত্তর বলটি নির্ণয় কর। [H. S. '67 Comp.]

মনে কর বৃহত্তর বলটি P ও লব্ধি বল R.

সুতরাং প্রশ্নানুসারে $P + R = 288 \cdots\cdots (1)$

আবার যেহেতু P বল ও 8 পাউণ্ড ভার বলের লব্ধি R,

$\therefore \quad R^2 = P^2 + 8^2$, বা, $(288 - P)^2 = P^2 + 8^2$ [(1) হইতে]

বা, $288^2 + P^2 - 2.288P = P^2 + 8^2$, বা, $288^2 - 8^2 = 2.288.P$

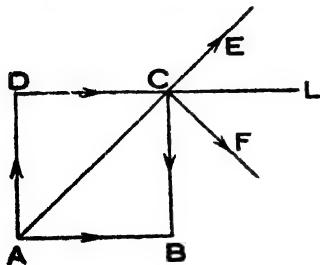
বা, $(288+8)(288-8) = 2.288.P$ বা, $296.280 = 2.288.P$

$P = \frac{296.280}{2.288} = 143\frac{8}{9} \qquad \therefore \quad R = 288 - 143\frac{8}{9} = 144\frac{1}{9}.$

আবার লব্ধি বল R, P বলের অভিমুখিতার সহিত θ কোণে নত হইলে,

$\tan\theta = \frac{Q}{P} = \frac{8}{144\frac{1}{9}} = \frac{72}{1297} \qquad \therefore \quad \theta = \tan^{-1}\frac{72}{1297}$

সুতরাং নির্ণেয় লব্ধি বল $144\frac{1}{9}$ পাউণ্ড ভার এবং বৃহত্তর বলটি $143\frac{8}{9}$ পাউণ্ড ভার।

উদা. 9. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র; $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{DC}$ বাহু বরাবর সমান বল P ক্রিয়াশীল; ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর। [U. P. 1954]

চিত্র 4

$\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ রেখায় ক্রিয়াশীল দুইটি সমান বল P-এর লব্ধি বল $\overrightarrow{AC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল $P\sqrt{2}$ পরিমাপের বল।

আবার $\overrightarrow{DC}$ এবং $\overrightarrow{CB}$ রেখায় ক্রিয়াশীল দুইটি সমানবল P-এর লব্ধি বল বর্ধিত

$\overrightarrow{DC}$ ও $\overrightarrow{CB}$ রেখার অন্তর্বর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক $\overrightarrow{CF}$ রেখায় ক্রিয়াশীল $P\sqrt{2}$ পরিমাপের বল।

এক্ষণে, $\angle ECF$ সমকোণ এবং নির্ণেয় লব্ধি C বিন্দুতে $\overrightarrow{CE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ রেখায় ক্রিয়াশীল দুইটি $P\sqrt{2}$ পরিমাপের সমান বলের লব্ধি।

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় লব্ধি} = 2P\sqrt{2}.\cos 45° = 2P\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2P.$$

এই লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা $\angle ECF$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে অর্থাৎ লব্ধিবল বর্ধিত $\overrightarrow{DC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল হইবে।

উদা. 10. দুইটি সমান দৈর্ঘ্যের দড়ির সাহায্যে একটি বস্তুকে ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। দড়ি দুইটি একই অনুভূমিক রেখার উপর দুইটি বিন্দুতে সংলগ্ন আছে। দেখাও যে দড়ি দুইটির দৈর্ঘ্য সমপরিমাণে বৃদ্ধি করিলে তাহাদের টান হ্রাস পায়।

মনে কর, দড়ি দুইটির প্রত্যেকটিতে টান T এবং তাহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ α. যেহেতু বস্তুটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং বস্তুটির ভার W = টান দুইটির লব্ধিবলের পরিমাপ $= 2T\cos\frac{\alpha}{2}$, $\quad \therefore \quad T = \frac{W}{2}\sec\frac{\alpha}{2}$.

দড়ির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করিলে উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাপ অর্থাৎ α হ্রাস পায়, সুতরাং $\sec\frac{\alpha}{2}$ হ্রাস পায়। সুতরাং দড়ির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করিলে দড়ির টান হ্রাস পাইবে।

উদা. 11. P_1 ও Q_1 পরিমাপের দুইটি বলের লব্ধি বল, P_1 বলের সহিত সমকোণে নত। P_2 ও Q_2 পরিমাপের দুইটি বলের ক্রিয়ারেখা যথাক্রমে P_1 ও Q_1 বল দুইটির ক্রিয়ারেখা এবং উহাদের লব্ধি বল, Q_2 বলের সহিত সমকোণে নত। প্রমাণ কর যে, $P_1P_2 = Q_1Q_2$.

মনে কর P_1 ও Q_1 বা, P_2 ও Q_2-র অন্তর্ভুক্ত কোণটির পরিমাপ α.

$$\text{সুতরাং প্রথমক্ষেত্রে } \tan 90° = \frac{Q_1 \sin\alpha}{P_1 + Q_1\cos\alpha} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\text{এবং দ্বিতীয়ক্ষেত্রে } \tan 90° = \frac{P_2 \sin\alpha}{Q_2 + P_2\cos\alpha} \quad \cdots\cdots(2)$$

(1) হইতে পাই, $P_1+Q_1\cos\alpha=0$, বা, $P_1=-Q_1\cos\alpha$.

(2) হইতে পাই, $Q_2+P_2\cos\alpha=0$, বা, $P_2\cos\alpha=-Q_2$.

$\therefore$ গুণ করিয়া পাই $P_1P_2\cos\alpha=(-Q_1\cos\alpha)(-Q_2)$

$=Q_1Q_2\cos\alpha$ $\quad\therefore\quad P_1P_2=Q_1Q_2$.

উদা. 12. ধ্রুবক মানবিশিষ্ট দুইটি বলের লব্ধি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান যথাক্রমে F ও G. প্রমাণ কর বল দুইটি পরস্পর 2α কোণে নত দুইটি সরলরেখায় ক্রিয়াশীল হইলে উহাদের লব্ধি বলের পরিমাপ হয়

$\sqrt{(F^2\cos^2\alpha+G^2\sin^2\alpha)}$ [G. U. '67]

মনে কর বল দুইটির পরিমাপ P ও Q ($P>Q$).

সুতরাং উহাদের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির পরিমাপ যথাক্রমে $P+Q$ ও $P-Q$.

$\therefore\quad F=P+Q$ এবং $G=P-Q$.

এক্ষণে, $F^2\cos^2\alpha+G^2\sin^2\alpha=(P+Q)^2\cos^2\alpha+(P-Q)^2\sin^2\alpha$

$=(P^2+Q^2)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+2PQ(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$=P^2+Q^2+2PQ\cos2\alpha$.

আবার, যখন বল দুইটি 2α কোণে নত হয়, তখন তাহাদের লব্ধি বলের পরিমাপ R হইলে $R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos2\alpha$,

$\therefore\quad R^2=F^2\cos^2\alpha+G^2\sin^2\alpha$, $\therefore\ R=\sqrt{F^2\cos^2\alpha+G^2\sin^2\alpha}$.

প্রশ্নমালা 2A

1. α-কোণে নত P ও Q পরিমাপের দুইটি সমবিন্দু বলের লব্ধি বলের পরিমাপ R.

(i) যদি $P=6$ কে. জি., $Q=10$ কে. জি. এবং $\alpha=0^\circ$ হয়, তবে R নির্ণয় কর।

(ii) যদি $P=22$ পাউণ্ড, $Q=9$ পাউণ্ড এবং $\alpha=90^\circ$ হয়, তবে R নির্ণয় কর।

(iii) যদি $P=10$ কে. জি., $Q=6$ কে. জি. এবং $R=14$ কে. জি. হয়, তবে α নির্ণয় কর।

(iv) যদি $P=28$ কে. জি., $R=53$ কে. জি. এবং $\alpha=90^\circ$ হয়, তবে Q নির্ণয় কর।

2. (a) দুইটি সমান বল একটি কণার উপর প্রয়োগ করা হইল ; বল দুইটির লব্ধি বলের বর্গ, বল দুইটির গুণফলের 3 গুণের সমান হইলে বল দুইটির অন্তর্ভূ'ত কোণটির পরিমাপ নির্ণয় কর। [P. U. 1930]

(b) একটি কণায় ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি বল উহাদের একটির উপর লম্ব হইলে এবং ইহার পরিমাপ অপর বলটির পরিমাপের এক-তৃতীয়াংশ হইলে, প্রমাণ কর যে, বৃহত্তর বলটির ক্ষুদ্রতর বলটির সহিত অনুপাত $3 : 2\sqrt{2}$.

[U. P. 1944]

(c) যদি দুইটি সমান বলের লব্ধির বর্গ ঐ বলদ্বয়ের গুণফলের দ্বিগুণ হয়, তবে উহাদের অন্তর্গত কোণটি নির্ণয় কর। [H. S. '72]

(d) P এবং Q বল দুইটির লব্ধি বল R. যদি P-এর অভিমুখিতা বিপরীত হয়, তবে নূতন লব্ধি R-এর উপর লম্ব হয়। দেখাও যে P = Q পরিমাণে।

[H. S. '64]

(e) একটি কণায় ক্রিয়াশীল দুইটি বলের একটি দ্বিগুণিত হইলে উহাদের লব্ধি বলও দ্বিগুণিত হয় ; দেখাও যে, বল দুইটির অন্তর্গত কোণটির পরিমাপ $\cos^{-1}\left(-\frac{3Q}{4P}\right)$.

(f) দুইটি বল পরস্পর লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করিলে তাহাদের লব্ধি বলের পরিমাপ হয় $\sqrt{10}$ পা. ভার। যদি তাহারা 60° কোণে ক্রিয়া করে, তাহা হইলে লব্ধি $\sqrt{13}$ পা. ভার হয়। বল দুইটির মান নির্ণয় কর।

[U. P. B. 1950]

3 দুইটি প্রদত্ত পরিমাপের সমবিন্দু বলের ক্ষুদ্রতম লব্ধির পরিমাপ 34 কে. জি. এবং বল দুইটি পরস্পর সমকোণে নত হইলে উহাদের লব্ধির পরিমাপ হয় 50 কে. জি.। বল দুইটির পরিমাপ নির্ণয় কর।

4 দুইটি প্রদত্ত পরিমাপের সমবিন্দু বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির পরিমাপ যথাক্রমে 100 কে. জি. ও 58 কে. জি.। বল দুইটির পরিমাপ নির্ণয় কর।

5. (a) দুইটি প্রদত্ত পরিমাপের সমবিন্দু বলের বৃহত্তম লব্ধির পরিমাপ 17 কে. জি.। বল দুইটি সমকোণে নত হইলে, উহাদের লব্ধির পরিমাপ হয় 13 কে. জি.। বল দুইটির পরিমাপ নির্ণয় কর।

(b). একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বলের ক্ষুদ্রতম লব্ধির পরিমাপ 4 একক এবং বল দুইটি পরস্পর সমকোণে নত হইলে উহাদের লব্ধি বলের পরিমাপ হয় 20 একক। প্রমাণ কর যে, বল দুইটির বৃহত্তম লব্ধি 28 একক।

বল দুইটি যখন পরস্পরের সহিত 60° কোণে নত, তখন উহাদের লব্ধি বলের পরিমাপ নির্ণয় কর।

(*c*). দুইটি বল P এবং Q-এর লব্ধি P-এর লম্বাভিমুখে ; একই কোণ করিয়া আছে এমন দুইটি বল P এবং Q′-এর লব্ধি Q′-এর লম্বাভিমুখে। প্রমাণ কর যে, $P^2 = QQ'$.

6. 3P ও 2P পরিমাপের দুইটি সমবিন্দু বলের লব্ধিবলের পরিমাপ R. যদি প্রথম বলটির পরিমাপ দ্বিগুণিত করা হয়, তবে লব্ধিবলের পরিমাপও দ্বিগুণিত হয়। বল দুইটির অন্তর্ভুর্ত কোণটি নির্ণয় কর। [C. U. 1932]

7. একটি প্রদত্ত কোণে নত দুইটি বল P ও Q-এর লব্ধিবলের পরিমাপ P. প্রমাণ কর যে, 2P ও Q পরিমাপের দুইটি বল একই কোণে নত হইলে, তাহাদের লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা Q বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হয়।

8. $P+Q$ ও $P-Q$ পরিমাপের দুইটি বলের লব্ধিবলের পরিমাপ $\sqrt{2(P^2+Q^2)}$. বল দুইটি পরস্পরের সহিত কি পরিমাপের কোণে নত ?

9 দুইটি বলের অন্তর্ভুর্ত কোণ 60° এবং তাহাদের একটি ও লব্ধিবলের পরিমাপ যথাক্রমে P ও R. প্রমাণ কর যে অপর বলটির পরিমাপ $\dfrac{\sqrt{4R^2-3P^2}-P}{2}$.

10. P এবং Q পরিমাপের দুইটি বল যখন 120° পরিমাপের কোণে নত থাকে, তখন তাহাদের লব্ধিবলের পরিমাপ হয় R. অন্তর্ভুর্ত কোণটি 60° হইলে লব্ধিবলের পরিমাপ হয় mR. প্রমাণ কর যে,

$$P=\frac{R}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3m^2-1}+\sqrt{3-m^2})$$

এবং $$Q=\frac{R}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3m^2-1}-\sqrt{3-m^2})$$

11. একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বল P ও Q-এর লব্ধিবল R ; Q বলকে দ্বিগুণিত করিলে R বলও দ্বিগুণিত হয়। আবার, Q-এর বিপরীত অভিমুখিতা হইলেও R বল দ্বিগুণিত হয়। দেখাও যে, $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$.
[Bombay, 1934]

12. α-কোণে নত দুইটি বল P ও Q-এর লব্ধিবল R. যদি P ও Q প্রত্যেকটির পরিমাপ R বৃদ্ধি পায়, তবে দেখাও যে নূতন লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা R-এর সহিত যে কোণে নত হয় তাহার tangent, $\dfrac{(P-Q)\sin\alpha}{P+Q+R+(P+Q)\cos\alpha}$.
[P U. 1943 ; B. H. U. 1943]

13. একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বল P ও Q-এর লব্ধিবলের পরিমাপ একই কোণে নত দুইটি বল P+S এবং Q−S-এর লব্ধিবলের পরিমাপের সমান হইলে, লব্ধিবলটির পরিমাপ নির্ণয় কর।

14. কোন নির্দিষ্ট কোণে অবস্থিত P ও Q বল দুইটির লব্ধি X এবং ঐ একই কোণে ক্রিয়মাণ P ও R বল দুইটিরও লব্ধি X এবং Q ও R $(Q \neq R)$ বল দুইটির লব্ধি Y. দেখাও যে, $P=\sqrt{(X^2+QR)}=\frac{QR(Q+R)}{Q^2+R^2-Y^2}$.
$P+Q+R=0$ হইলে দেখাও যে, $X=Y$.

15. পরস্পরচ্ছেদী দুইটি বল P ও Q এর লব্ধি বল R, nR এবং $(n+2)R$ যখন P ও Q পরস্পরের সহিত যথাক্রমে $90°$, θ ও $90°-\theta$ কোণে নত। প্রমাণ কর যে, $(n-1)\tan\theta=n+3$.

16. P ও Q বল দুইটির লব্ধির বৃহত্তম মান উহাদের লব্ধির ক্ষুদ্রতম মানের n গুণ। বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ α এবং লব্ধি বল উহাদের সমষ্টির অর্ধেক হইলে দেখাও যে, $\cos\alpha=-\frac{n^2+2}{2(n^2-1)}$.

§ 2·4. কোন প্রদত্ত বলকে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ :

যে কোন দুইটি প্রদত্ত দিকে কোন প্রদত্ত বলকে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ করা যায়।

মনে কর R একটি প্রদত্ত বল এবং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ দুইটি প্রদত্ত দিক্। R-বলকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ বরাবর দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ করিতে হইবে। মনে কর নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AC}$, R বলকে প্রকাশ করে এবং $m\angle BAD=\alpha$ ও $m\angle BAC=\theta$. (চিত্র 4 দেখ) যেহেতু $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ প্রদত্ত এবং R প্রদত্ত, সুতরাং α ও θ জ্ঞাত। $\overline{AC}$-কে কর্ণ ধরিয়া $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ বরাবর দুইটি সন্নিহিত বাহুবিশিষ্ট ABCD সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ কর। এক্ষণে, বলের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী নিয়ন্ত্রিত রেখাংশদ্বয় $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ দ্বারা প্রকাশিত বল দুইটির লব্ধি বল R.

অর্থাৎ R বলের $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ বরাবর উপাংশ দুইটি নিয়ন্ত্রিত রেখাংশদ্বয় $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ দ্বারা প্রকাশিত হইবে। মনে কর, এই উপাংশদ্বয় P ও Q.

এখন $\triangle$ABC-র বাহুগুলির দৈর্ঘ্য, উহাদের বিপরীত কোণগুলির sine-এর সহিত সমানুপাতী।

$$\therefore \quad \frac{AB}{\sin BCA}=\frac{BC}{\sin BAC}=\frac{AC}{\sin ABC},$$

বা, $$\frac{P}{\sin(\alpha-\theta)}=\frac{Q}{\sin\theta}=\frac{R}{\sin(\pi-\alpha)}$$

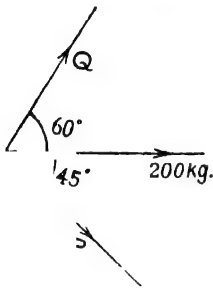
[$\because$ $m\angle BAD=\alpha$ ও $m\angle BAC=\theta$, $\therefore$ $m\angle CAD=\alpha-\theta$ এবং $\therefore$ $m\angle BCA=\alpha-\theta$.

আবার, $\because$ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$; $\therefore$ $m\angle BAD+m\angle ABC=\pi$,

বা, $m\angle ABC=\pi-m\angle BAD=\pi-\alpha$]

$$\therefore \quad P=\frac{R\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha} \text{ এবং } Q=\frac{R\sin\theta}{\sin\alpha}.$$

যেহেতু $\overline{AC}$-কে কর্ণ ধরিয়া অসংখ্য সামান্তরিক অঙ্কন করা যায়, সুতরাং কোন প্রদত্ত বলকে অসংখ্য প্রকারের দুইটি উপাংশে বিশ্লেষিত করা যায়।

উদাহরণ। 200 কে. জি. পরিমাপের একটি বলকে উহার ক্রিয়ারেখার সহিত বিপরীত দিকে 45° ও 60° কোণে নত দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ কর।

চিত্র 5

মনে কর উপাংশ দুইটি P ও Q.

এখানে R=200 কে.জি.; $\theta=45°$ ও $\alpha=105°$.

$$P=\frac{R\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha}=\frac{200\times\sin 60°}{\sin(60°+45°)}$$

$$=\frac{200\times{\cdot}8660}{\sin 105°}=\frac{200\times{\cdot}8660}{\cos 15°}$$

$$=\frac{200\times{\cdot}8660}{{\cdot}9659}=179{\cdot}32 \text{ কে. জি.}$$

আবার $$Q=\frac{R\sin\theta}{\sin\alpha}=\frac{200\times\sin 45°}{\sin(45°+60°)}$$

$$=\frac{200\times{\cdot}7071}{\sin 105°}=\frac{200\times{\cdot}7071}{\cos 15°}=\frac{200\times{\cdot}7071}{{\cdot}9659}$$

$$=146{\cdot}42 \text{ কে. জি.}$$

§ 2·5 বিশ্লেষিতাংশ (Resolved Part)

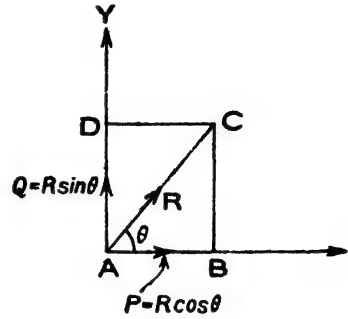
কোন প্রদত্ত বলের দুইটি উপাংশ যখন পরস্পর সমকোণে নত হয়, তখন প্রত্যেক উপাংশকে তাহার ক্রিয়ারেখার অভিমুখে বলটির **বিশ্লেষিতাংশ** বলে।

উপাংশ দুইটির ক্রিয়ারেখা দুইটি পরস্পর সমকোণে নত হইলে §2·4-এর সূত্রে $\alpha=90°$.

$$\therefore \quad P=\frac{R\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{R\sin(90°-\theta)}{\sin 90°}=R\cos\theta.$$

এবং $Q=\frac{R\sin\theta}{\sin\alpha}=\frac{R\sin\theta}{\sin 90°}$

$$=R\sin\theta.$$

চিত্র 6

সুতরাং কোন প্রদত্ত বল Rকে কোন প্রদত্ত দিক্ ও উহার লম্ব দিকে দুইটি বিশ্লেষিতাংশ $R\cos\theta$ ও $R\sin\theta$-তে বিশ্লেষিত করা যায়। স্পষ্টতঃ R বল ও প্রদত্ত দিকের নতি θ।

উদাহরণ। 20 কে. জি. পরিমাপের একটি বল একটি প্রদত্ত দিকের সহিত 60° কোণে নত। প্রদত্ত দিকে ও উহার লম্ব দিকে বলটির বিশ্লেষিতাংশ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত দিকে বলটির বিশ্লেষিতাংশ $20\cos 60°=20\times\frac{1}{2}=10$ কে. জি.।

প্রদত্ত দিকের লম্ব দিকে বলটির বিশ্লেষিতাংশ,

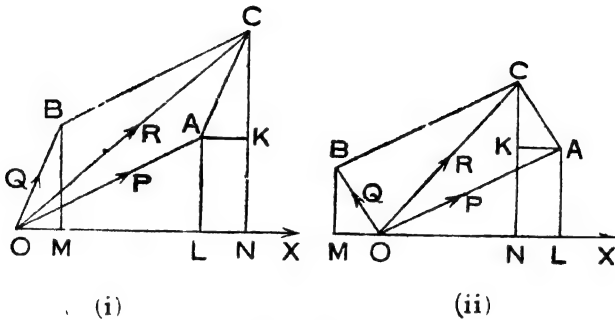
$$20\sin 60°=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}=10\times 1{\cdot}732=17{\cdot}32 \text{ কে. জি.।}$$

§ 2·6. **উপপাদ্য। কোন একদিকে যে কোন দুইটি সমবিন্দু বলের বিশ্লেষিতাংশের বীজগাণিতিক যোগফল ঐদিকে উহাদের লব্ধিবলের বিশ্লেষিতাংশের সমান।**

[The algebraic sum of the resolved parts of any two forces acting at a point in any given direction is equal to the resolved part of their resultant in that direction.]

মনে কর P ও Q দুইটি প্রদত্ত বল এবং $\overrightarrow{OX}$ একটি প্রদত্ত দিক্। নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{OA}$ ও $\overline{OB}$ দ্বারা P ও Q-কে প্রকাশ কর এবং OACB সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ কর। সুতরাং নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{OC}$, P ও Q-এর লব্ধি বল Rকে প্রকাশ করিবে।

$\overrightarrow{OX}$ সরলরেখার উপর AL, BM ও CN লম্ব অঙ্কন কর। সুতরাং নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{OL}$, $\overline{OM}$ এবং $\overline{ON}$ যথাক্রমে P, Q এবং R-এর $\overrightarrow{OX}$-এর দিকে বিশ্লেষিতাংশকে প্রকাশ করিবে। [∵ $OL = OA.\frac{OL}{OA} = P.\cos\angle AOX$. ইত্যাদি]।

চিত্র 7

এক্ষণে চিত্র (i)-এ সকল বিশ্লেষিতাংশই ধনাত্মক (∵ $\overline{OL}$, $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ প্রত্যেকটির অভিমুখিতা ও $\overrightarrow{OX}$-এর অভিমুখিতা অভিন্ন) এবং চিত্র (ii)-এ $\overrightarrow{OX}$-এর দিকে Q-এর বিশ্লেষিতাংশ ঋণাত্মক (∵ $\overline{OM}$ ও $\overrightarrow{OX}$ এর বিপরীত অভিমুখিতা)। CN-এর উপর AK লম্ব অঙ্কন কর।

এক্ষণে উভয় চিত্রে ΔBMO ও ΔCKA পরস্পর সর্বসম। ∴ $OM = LN$.

এক্ষণে চিত্র (i)-এ $ON = OL + LN = OL + OM$

এবং চিত্র (ii)-এ, $ON = OL - NL = OL - MO = OL - (-OM)$

$$= OL + OM.$$

সুতরাং $\overrightarrow{OX}$-এর দিকে P ও Q-এর বিশ্লেষিতাংশদ্বয়ের বীজগাণিতিক যোগফল একই দিকে উহাদের লব্ধিবল R-এর বিশ্লেষিতাংশের সমান।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ উপরের উপপাদ্যটি বারংবার প্রয়োগ করিয়া প্রমাণ করা যাইবে যে,

কোন একদিকে যে কোন সসীম সংখ্যক সমবিন্দু বলের বিশ্লেষিতাংশের বীজগাণিতিক যোগফল ঐদিকে উহাদের লব্ধিবলের বিশ্লেষিতাংশের সমান।

§ 2·7. এক সমতলে প্রযুক্ত যে-কোন সসীম সংখ্যক সমবিন্দু বলের লব্ধি নির্ণয় :—

মনে কর এক সমতলে প্রযুক্ত $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$ ইত্যাদি বলের প্রয়োগ বিন্দু O. এই বলসমূহের লব্ধিবল নির্ণয় করিতে হইবে।

চিত্র 8

O বিন্দুর ভিতর দিয়া পরস্পর সমকোণে নত সরলরেখা $\overleftrightarrow{XX'}$ ও $\overleftrightarrow{YY'}$ অঙ্কন কর এবং মনে কর $\overrightarrow{OX}$-এর সহিত $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots\cdots$ বলসমূহ যথাক্রমে $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \cdots\cdots$ কোণে নত।

মনে কর বলসমূহের লব্ধিবল R এবং ইহা $\overrightarrow{OX}$-এর সহিত θ কোণে নত।

এক্ষণে $\overrightarrow{OX}$-এর দিকে P_1, P_2, P_3, P_4 ইত্যাদির ও R-এর বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে $P_1 \cos\alpha_1$, $P_2 \cos\alpha_2$, $P_3 \cos\alpha_3$, $P_4 \cos\alpha_4$ ইত্যাদি এবং $R\cos\theta$.

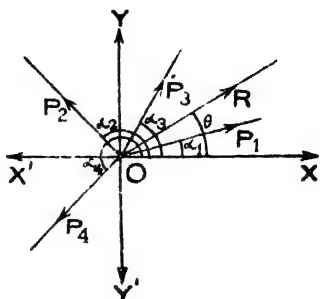
আবার $\overrightarrow{OY}$-এর দিকে P_1, P_2, P_3, P_4 ইত্যাদির ও R-এর বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে $P_1 \sin\alpha_1$, $P_2 \sin\alpha_2$, $P_3 \sin\alpha_3$, $P_4 \sin\alpha_4$ ইত্যাদি এবং $R\sin\theta$.

সুতরাং $R\cos\theta = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + P_4\cos\alpha_4 + \cdots = X$ (মনে কর)...(1)

এবং $R\sin\theta = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + P_4\sin\alpha_4 + \cdots = Y$ (মনে কর)...(2)

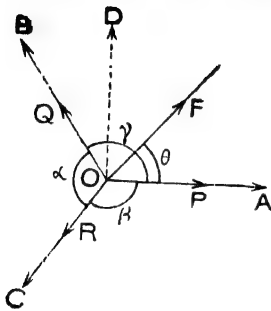
এখন, (1) ও (2)-সমীকরণদ্বয়ের বর্গ করিয়া ও যোগ করিয়া পাই $R^2 = X^2 + Y^2$....(3)

আবার (2)÷(1) করিয়া পাই, $\tan\theta = \frac{Y}{X}$, বা, $\theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X}$.

অনুসিদ্ধান্ত : যদি বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকে তবে লব্ধি বলের পরিমাপ R=0 হইবে। সুতরাং (3) হইতে পাই $X = 0 = Y$ অর্থাৎ $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$-এর

দিকে বলগুলির বিশ্লেষিতাংশগুলি বীজগাণিতিক যোগফল দুইটির প্রত্যেকটি শূন্য হইবে।

উদাহরণ 1. একই সমতলে প্রযুক্ত P, Q, R তিনটি সমবিন্দু বল। (Q, R), (R, P) এবং (P, Q) বলগুলির অন্তর্ভূত কোণগুলি যথাক্রমে α, β ও γ. প্রমাণ কর যে বলগুলির লব্ধিবলের পরিমাপ

$$\sqrt{P^2+Q^2+R^2+2QR\cos\alpha+2RP\cos\beta+2PQ\cos\gamma}.$$

মনে কর নির্ণেয় লব্ধিবল F এবং ইহার ক্রিয়ারেখা P-বলের সহিত θ কোণে নত। P বল ও P বলের লম্ব দিকে বলগুলিকে বিশ্লেষণ কর। সুতরাং § 2·6এর উপপাদ্য অনুযায়ী,

চিত্র 9

$$F\cos\theta=P+Q\cos\gamma+R\cos(\alpha+\gamma)$$
$$=P+Q\cos\gamma+R\cos(2\pi-\beta)$$
$$=P+Q\cos\gamma+R\cos\beta.$$

এবং $F\sin\theta=Q\sin\gamma+R\sin(\alpha+\gamma)$
$$=Q\sin\gamma+R\sin(2\pi-\beta)$$
$$=Q\sin\gamma-R\sin\beta.$$

$\therefore$ $F^2\cos^2\theta+F^2\sin^2\theta$
$$=(P+Q\cos\gamma+R\cos\beta)^2+(Q\sin\gamma-R\sin\beta)^2$$

বা, $F^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=P^2+Q^2\cos^2\gamma+R^2\cos^2\beta$
$$+2QR\cos\beta\cos\gamma+2RP\cos\beta+2PQ\cos\gamma$$
$$+Q^2\sin^2\gamma+R^2\sin^2\beta-2QR\sin\beta\sin\gamma$$

বা, $F^2=P^2+Q^2(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma)+R^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)$
$$+2QR(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)$$
$$+2RP\cos\beta+2PQ\cos\gamma$$
$$=P^2+Q^2+R^2+2QR\cos(\beta+\gamma)$$
$$+2RP\cos\beta+2PQ\cos\gamma$$
$$=P^2+Q^2+R^2+2QR\cos(2\pi-\alpha)$$
$$+2RP\cos\beta+2PQ\cos\gamma$$
$$=P^2+Q^2+R^2+2QR\cos\alpha+2RP\cos\beta+2PQ\cos\gamma.$$

$$\therefore\quad F=\sqrt{P^2+Q^2+R^2+2QR\cos\alpha+2RP\cos\beta+2PQ\cos\gamma}.$$

উদা. 2. উল্লম্বদিকে ঊর্ধ্বমুখী প্রযুক্ত 400 কে. জি. পরিমাপের একটি বলকে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ করা হইল। একটি উপাংশের পরিমাপ 200 কে. জি. এবং ক্রিয়ারেখা অনুভূমিক সরলরেখার দিকে। অপর উপাংশটির পরিমাপ ও দিক্ নির্ণয় কর।

মনে কর অন্য উপাংশটি P এবং ইহার দিক্ উল্লম্বরেখার সহিত α-কোণে নত।

$$\therefore \quad 200 = \frac{400 \sin \alpha}{\sin(\alpha + 90^\circ)}$$

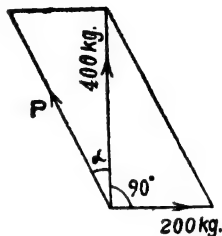
(§ 2·4 অনুযায়ী)

$$= \frac{400 \sin \alpha}{\cos \alpha} = 400 \tan \alpha.$$

$$\therefore \quad \tan \alpha = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}.$$

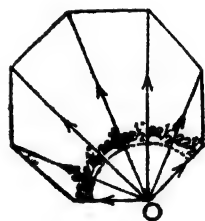
$$\therefore \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

চিত্র 10

$$\therefore \quad P = \frac{400 \sin 90^\circ}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{400}{\cos \alpha} = \frac{400}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = 200\sqrt{5} \text{ কে. জি.।}$$

উদা. 3. 100 কে. জি. পরিমাপের কতকগুলি সমান বল একটি সুষম অষ্টভুজের (যাহার একটি বাহু অনুভূমিক) একটি কৌণিক বিন্দুতে প্রযুক্ত। বলগুলির অভিমুখিতা এই কৌণিক বিন্দু হইতে অন্যান্য কৌণিক বিন্দুগুলির দিকে। অনুভূমিক ও উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া বলগুলির লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

একটি সুষম অষ্টভুজের O বিন্দুতে প্রযুক্ত 7টি 100 কে. জি. পরিমাপের সমান বলের অভিমুখিতা অপর কৌণিক বিন্দুগুলির দিকে। এই বলগুলির লব্ধিবলের মান ও দিক্ নির্ণয় করিতে হইবে।

চিত্র 11

সুষম অষ্টভুজের প্রত্যেকটি অন্তঃকোণের পরিমাপ $= \frac{(16-4).90^\circ}{8} = 135^\circ$.

সুতরাং প্রত্যেক বল তাহার পরবর্তী বলের সহিত $\frac{135^\circ}{6} = 22\frac{1}{2}^\circ$ কোণে নত।

মনে কর বলগুলির লব্ধিবল F এবং উহা অষ্টভুজটির অনুভূমিক বাহুর সহিত θ কোণে নত। এক্ষণে বলসমূহকে অনুভূমিক ও উল্লম্ব দিকে বিশ্লেষিত করিয়া যথাক্রমে পাই,

$$F \cos\theta = 100\cos 0^\circ + 100\cos 22\tfrac{1}{2}^\circ + 100\cos 45^\circ + 100\cos 67\tfrac{1}{2}^\circ + 100\cos 90^\circ + 100\cos 112\tfrac{1}{2}^\circ + 100\cos 135^\circ$$

$$= 100(1 + \cdot9239 + \cdot7071 + \cdot3827 + 0 - \cdot3827 - \cdot7071)$$

$= 100 \times 1\cdot9239 = 192\cdot39$ কে. জি.

এবং $$F \sin\theta = 100\sin 0^\circ + 100\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ + 100\sin 45^\circ + 100\sin 67\tfrac{1}{2}^\circ + 100\sin 90^\circ + 100\sin 112\tfrac{1}{2}^\circ + 100\sin 135^\circ$$

$$= 100(0 + \cdot3827 + \cdot7071 + \cdot9239 + 1 + \cdot9239 + 7071)$$

$= 100 \times 4\cdot6447 = 464\cdot47$ কে. জি.।

$\therefore \quad F = \sqrt{(100 \times 1\cdot9239)^2 + (100 \times 4\cdot6447)^2}$

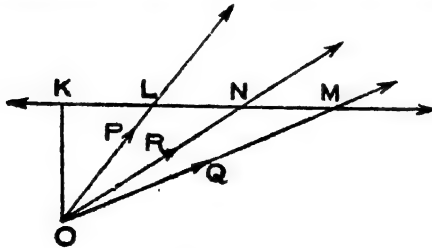
$= 100 \times \sqrt{25\cdot2648} = 100 \times 5\cdot0266$

$= 502\cdot66$ কে. জি.।

এবং $\tan\theta = \dfrac{100 \times 4\cdot645}{100 \times 1\cdot9239} = 2\cdot41 \quad \therefore \quad \theta = 67\cdot5^\circ$ (আসন্ন)।

উদা. 4. O বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বল P ও Q-এর লব্ধিবল R. একটি ভেদক P, Q ও R-এর ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে L, M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে,

$$\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}. \qquad [C.U]$$

O হইতে OK, $\overleftrightarrow{LM}$-এর উপর লম্ব টান। এক্ষণে $\overrightarrow{OK}$-র দিকে P ও Q-এর বিশ্লেষিতাংশের বীজগাণিতিক যোগফল = ঐ দিকে R-এর বিশ্লেষিতাংশ।

চিত্র 12

$$P \cos KOL + Q \cos KOM = R \cos KON.$$

বা, $P.\dfrac{OK}{OL} + Q.\dfrac{OK}{OM} = R.\dfrac{OK}{ON}$, বা, $\dfrac{P}{OL} + \dfrac{Q}{OM} = \dfrac{R}{ON}$.

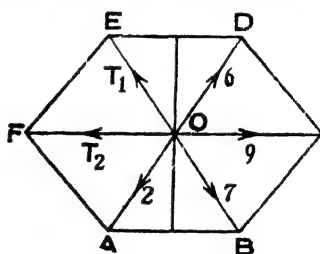
উদা. 5. প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয় ক্রিয়ারেখা হইবে এরূপ তিনটি উপাংশে, ঐ ত্রিভুজের সমতলে প্রযুক্ত যে কোন বলকে বিশ্লেষিত করা যাইবে।

(চিত্র নিজে অঙ্কন কর।) মনে কর ABC ত্রিভুজের সমতলে প্রযুক্ত F একটি বল এবং F-এর ক্রিয়ারেখা BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। AD যোগ কর। এক্ষণে Fকে $\vec{DC}$ বরাবর P এবং $\vec{DA}$ বরাবর F_1 উপাংশে বিশ্লেষিত কর। এক্ষণে, F_1-কে আবার $\vec{CA}$ এবং $\vec{BA}$ বরাবর Q ও R উপাংশে বিশ্লেষিত করা যায়। সুতরাং প্রদত্ত বল F-কে, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ ও $\vec{AB}$ বরাবর P, Q ও − R উপাংশ তিনটিতে বিশ্লেষিত করা যায়।

উদা. 6. একটি সুষম ষড়ভুজের কেন্দ্রে একটি ক্ষুদ্র অঙ্গুরীকে কৌণিক বিন্দু ছয়টিতে দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ ছয়টি দড়ি দ্বারা স্থিরাবস্থায় রাখা হইয়াছে। পর পর চারিটি দড়িতে টান যথাক্রমে 2, 7, 9 এবং 6 পা. ভার। অপর দড়ি দুইটিতে টান নির্ণয় কর।

মনে কর ষড়ভুজটি ABCDEF এবং ইহার কেন্দ্র O-এ অঙ্গুরীটি রাখা হইয়াছে। $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ দড়ি চারটিতে টান যথাক্রমে 2, 7, 9 ও 6 পা. ভার এবং $\vec{OE}$ ও $\vec{OF}$ দড়ি দুইটিতে টান যথাক্রমে T_1 ও T_2.

চিত্র 13

এক্ষণে $\vec{OC}$ এবং $\vec{OC}$-র লম্ব অভিমুখিতায় বিশ্লেষণ করিয়া সাম্যাবস্থার জন্য পাই,

$$9+6\cos 60°+T_1\cos 120°+T_2\cos 180° +2\cos 240°+7\cos 300°=0,$$

বা, $9+6.\frac{1}{2}+T_1.(-\frac{1}{2})+T_2.(-1)+2.(-\frac{1}{2})+7.\frac{1}{2}=0.$

বা, $14\frac{1}{2}-\frac{T_1}{2}-T_2=0,$ বা, $T_1+2T_2=29....(1)$

এবং $0+6\sin 60°+T_1\sin 120°+T_2\sin 180° +2\sin 240°+7\sin 300°=0,$

বা, $6.\frac{\sqrt{3}}{2}+T_1.\frac{\sqrt{3}}{2}+T_2.0+2.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+7.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$,

বা, $T_1\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, বা, $T_1=3$ পা. ভার ;

সুতরাং (1) হইতে পাই, $2T_2=26$, বা, $T_2=13$ পা. ভার।

সুতরাং অপর দড়ি দুইটিতে টান.3 পা. ভার ও 13 পা. ভার।

উদা. 7. যদি P এবং Q ($P>Q$) বল দুইটির লব্ধি উহাদের অন্তর্গত কোণকে 1 : 2 অনুপাতে বিভক্ত করে, তবে দেখাও যে লব্ধি বলটির পরিমাপ $\frac{P^2-Q^2}{Q}$ এবং অন্তর্গত কোণটির পরিমাপ $3\cos^{-1}\left(\frac{P}{2Q}\right)$. [B.H.U. '47]

মনে কর P ও Q বল দুইটির অন্তর্গত কোণ 3α. সুতরাং প্রশ্নানুসারে লব্ধিবল R, P বলের সহিত α কোণে ও Q বলের সহিত 2α কোণে নত (লক্ষ্য কর, এখানে $P>Q$; সুতরাং R, P বলের নিকটতর)।

$\therefore$ § 2·4 অনুযায়ী

$$\frac{P}{\sin 2\alpha}=\frac{Q}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin 3\alpha}$$

$$\therefore\quad \frac{P}{Q}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha.$$

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{P}{2Q}\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots(1)$$

সুতরাং
$$\begin{aligned}R^2&=P^2+Q^2+2PQ\cos 3\alpha\\&=P^2+Q^2+2PQ\,(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)\\&=P^2+Q^2+2PQ\left(\frac{P^3}{2Q^3}-\frac{3P}{2Q}\right)\\&=P^2+Q^2+\frac{P^4}{Q^2}-3P^2=Q^2+\frac{P^4}{Q^2}-2P^2\\&=\frac{Q^4+P^4-2P^2Q^2}{Q^2}=\left(\frac{P^2-Q^2}{Q}\right)^2\end{aligned}$$

$$\therefore\quad R=\frac{P^2-Q^2}{Q}.$$

আবার (1) হইতে পাই, $\alpha=\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$.

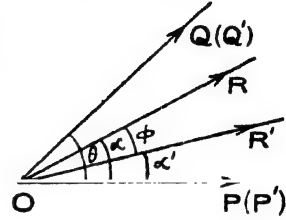
$\therefore$ P ও Q বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $=3\alpha=3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$.

উদা. 8. পরস্পর θ কোণে নত দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় ক্রিয়াশীল দুইটি বল P ও Q-এর লব্ধিবল R এবং ঐ দুই সরলরেখায় ক্রিয়াশীল দুইটি বল P′ ও Q′-এর লব্ধিবল R′. প্রমাণ কর যে R ও R′-এর ক্রিয়ারেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ ϕ হইলে $\cos\phi = \dfrac{PP' + QQ' + (P'Q + PQ')\cos\theta}{RR'}$

মনে কর, R ও R′-এর ক্রিয়ারেখা দুইটি P বা P′-এর ক্রিয়ারেখার সহিত যথাক্রমে α ও α' কোণে নত। যেহেতু P ও Q বল দুইটির লব্ধিবল R, সুতরাং P-এর অভিমুখিতায় ও উহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া পাই

চিত্র 14

$$R\cos\alpha = P + Q\cos\theta \quad \cdots(1)$$

এবং $$R\sin\alpha = Q\sin\theta \quad \cdots(1)$$

আবার যেহেতু P′ ও Q′ বল দুইটির লব্ধি বল R′,

সুতরাং P′-এর অভিমুখিতায় ও উহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া পাই,

$$R'\cos\alpha' = P' + Q'\cos\theta \quad \cdots \quad \cdots(3)$$

এবং $$R'\sin\alpha' = Q'\sin\theta \quad \cdots \quad \cdots(4)$$

এক্ষণে, R ও R′-এর অন্তর্গত কোণ $\phi = \alpha - \alpha'$

$$\therefore \quad \cos\phi = \cos(\alpha - \alpha') = \cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha'$$

$$= \frac{P + Q\cos\theta}{R} \cdot \frac{P' + Q'\cos\theta}{R'} + \frac{Q\sin\theta}{R} \cdot \frac{Q'\sin\theta}{R'}$$

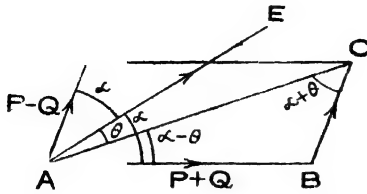
$$= \frac{PP' + (PQ' + P'Q)\cos\theta + QQ'\cos^2\theta + QQ'\sin^2\theta}{RR'}$$

$$= \frac{PP' + (PQ' + P'Q)\cos\theta + QQ'(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{RR'}$$

$$= \frac{PP' + QQ' + (PQ' + P'Q)\cos\theta}{RR'}.$$

9. 2α কোণে নত P+Q ও P−Q পরিমাপের দুইটি বলের লব্ধি বল উহাদের অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সহিত θ কোণে নত।

প্রমাণ কর যে, $P\tan\theta = Q\tan\alpha$. [P. U. '31]

মনে কর ABCD সামান্তরিকের $\overline{AB}$ ও $\overline{AD}$ বাহুদ্বয় যথাক্রমে P+Q ও P−Q বলদ্বয়কে প্রকাশ করে।

চিত্র 15

∴ $\overline{AC}$ কর্ণ উহাদের লব্ধি বলকে প্রকাশ করিবে

মনে কর, $\overrightarrow{AE}$ রশ্মি ∠BAD-এর সমদ্বিখণ্ডক। ∴ $m\angle BAE=\alpha$ এবং $m\angle CAE=\theta$, যেহেতু লব্ধি বল বৃহত্তর বলের অধিকতর নিকটবর্তী হয়, অতএব $\overrightarrow{AE}$, ∠CAD-এর ভিতরে অবস্থিত এবং $m\angle BAC=\alpha-\theta$ ও $m\angle CAD=\alpha+\theta$.

এক্ষণে, § 2·4-এর সূত্র অনুসারে,

$$\frac{P+Q}{\sin(\alpha+\theta)}=\frac{P-Q}{\sin(\alpha-\theta)}, \quad \text{বা,} \quad \frac{P+Q}{P-Q}=\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha-\theta)}$$

বা, $$\frac{P+Q+P-Q}{P+Q-P+Q}=\frac{\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha+\theta)-\sin(\alpha-\theta)}$$

[যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $$\frac{P}{Q}=\frac{2\sin\alpha\cos\theta}{2\cos\alpha\sin\theta}=\frac{\tan\alpha}{\tan\theta} \quad \therefore \quad P\tan\theta=Q\tan\alpha.$$

উদা. 10. একটি প্রদত্ত কোণে নত P ও Q পরিমাপের দুইটি বলের লব্ধি বল R, P-বলের সহিত θ কোণে নত হইলে, প্রমাণ কর যে, একই কোণে নত P+R ও Q পরিমাপের দুইটি বলের লব্ধি বল P+R বলের সহিত $\frac{1}{2}\theta$ কোণে নত হইবে। [B. U. '26 ; B. E. '32]

মনে কর বলসমূহের অন্তর্ভুক্ত কোণ α.

সুতরাং § 2·4 অনুযায়ী,

$$\frac{Q}{\sin\theta}=\frac{P}{\sin(\alpha-\theta)}=\frac{R}{\sin\alpha}=\frac{P+R}{\sin(\alpha-\theta)+\sin\alpha}\cdots\cdots(1)$$

মনে কর P+R ও Q বল দুইটির লব্ধি বল P+R বলের সহিত ϕ কোণে নত।

$$\therefore \frac{Q}{\sin\phi}=\frac{P+R}{\sin(\alpha-\phi)}\cdots\cdots(2)$$

এক্ষণে (1) হইতে পাই, $\frac{P+R}{Q}=\frac{\sin(\alpha-\theta)+\sin\alpha}{\sin\theta}$

এবং (2) হইতে পাই, $\frac{P+R}{Q}=\frac{\sin(\alpha-\phi)}{\sin\phi}$

$$\therefore \quad \frac{\sin(\alpha-\theta)+\sin\alpha}{\sin\theta}=\frac{\sin(\alpha-\phi)}{\sin\phi}$$

বা, $\sin\phi\{\sin(\alpha-\theta)+\sin\alpha\}=\sin\theta\sin(\alpha-\phi)$

বা, $\sin\phi\{\sin\alpha\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\}$
$=\sin\theta(\sin\alpha\cos\phi-\cos\alpha\sin\phi)$

বা, $\sin\alpha\sin\phi\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta\sin\phi+\sin\alpha\sin\phi$
$=\sin\alpha\sin\theta\cos\phi-\cos\alpha\sin\theta\sin\phi$

বা, $\sin\alpha\sin\phi=\sin\alpha(\sin\theta\cos\phi-\sin\phi\cos\theta)$

বা, $\sin\phi=\sin(\theta-\phi)$, $\quad\therefore\quad \phi=\theta-\phi$

বা, $\theta=2\phi$, $\quad\therefore\quad \phi=\frac{\theta}{2}$.

সুতরাং P+R ও Q বল দুইটির লব্ধি বল P+R বলের সহিত $\frac{1}{2}\theta$ কোণে নত।

প্রশ্নমালা 2B

1. 2 কে. জি., 4 কে. জি., $6\sqrt{3}$ কে. জি. ও 8 কে. জি. পরিমাপের চারিটি বল একটি কণার উপর প্রযুক্ত হইল। প্রথম ও দ্বিতীয়, দ্বিতীয় ও তৃতীয় এবং তৃতীয় ও চতুর্থ বলসমূহ যথাক্রমে 60°, 90° ও 150° কোণে নত। বলগুলির লব্ধিবলের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

2. 20 কে. জি. পরিমাপের একটি বলের, ক্রিয়ারেখার সহিত বিপরীত দিকে যথাক্রমে 30° ও 45° কোণে নত উপাংশ দুইটি নির্ণয় কর।

3. উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বমুখী একটি 300 কে. জি. বলকে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষিত করা হইল। একটি উপাংশের পরিমাপ 150 কে. জি. ও ক্রিয়ারেখা অনুভূমিক সরলরেখা হইলে, অপর উপাংশটির পরিমাপ ও দিক্ নির্ণয় কর।

4. একটি রেল লাইনে একটি মাল-গাড়ী স্থির অবস্থায় আছে। 100 পাউণ্ড ভারের একটি অনুভূমিক বল রেল লাইনের দিকের সঙ্গে 60° কোণে গাড়িটিকে টানিতেছে। রেল লাইনের দিকে কি পরিমাপের বল গাড়িটিকে টানিবার চেষ্টা করিবে।

5. 100 গ্রাম ভারের একটি বলের ক্রিয়ারেখা দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। অন্তর্ভূত কোণটি 60° হইলে ঐ দুই রেখার দিকে (i) উপাংশদ্বয় কত হইবে? (ii) বিশ্লেষিতাংশ কত হইবে?

6. 50 কে. জি. ভারের একটি বল উত্তরদিকে ক্রিয়াশীল। বলটিকে উত্তর-পশ্চিমদিকে এবং পশ্চিম দিকে যথাক্রমে $25\sqrt{2}$ এবং 35 কে. জি. ভার দুইটি উপাংশে ও আর একটি তৃতীয় উপাংশে বিশ্লেষিত করা হইল। তৃতীয় উপাংশটি নির্ণয় কর।

7. খাড়া উপরের দিকে ক্রিয়ারত 20 পা. ভারের একটি বলকে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষিত করা হইল। উহাদের একটি 10 পা. ভারের সমান অনুভূমিক বল। অপর উপাংশটির পরিমাপ ও দিক্ নির্ণয় কর। [H. S. '66]

8. একটি কণায় সক্রিয় 1, 2 ও $\sqrt{3}$ পরিমাপের তিনটি বলের লব্ধিবল নির্ণয় কর; উহাদের প্রথম দুইটি ABC সমবাহু ত্রিভুজের $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ বাহু বরাবর এবং তৃতীয়টি $\overrightarrow{BC}$ বাহু বরাবর ক্রিয়াশীল।

9. একটি সুষম ষড়ভুজের একটি কৌণিক বিন্দুতে অপর পাঁচটি কৌণিক বিন্দুর দিকে যথাক্রমে 2, $\sqrt{3}$, 5, $\sqrt{3}$ এবং 2 পাউণ্ড ভারবিশিষ্ট বল ক্রিয়মাণ; বলসমূহের লব্ধি বলের মান ও দিক্ নির্ণয় কর। [H. S. 1973]

10. একটি কণায় একই সমতলে ক্রিয়াশীল P, 2P ও 3P পরিমাপের তিনটি বল পরস্পর 120° কোণ উৎপন্ন করে। উহাদের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর। [C. U]

11. R−S, R ও R+S বল তিনটি একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং উহাদের দিক একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহুর সমান্তরাল। উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর। [D. B. '52]

12. একটি বল Fকে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ করা হইলে যদি উহাদের একটি F-এর লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করে এবং উহার মান F-এর সমান হয়, তাহা হইলে অপরটির মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

13. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের একটি অপরটির দ্বিগুণ হইলে দেখাও যে, উহাদের লব্ধি বলটি বৃহত্তর বলটির সহিত $\frac{\pi}{6}$ অপেক্ষা বৃহত্তর কোণে নত হইতে পারে না।

14. O বিন্দুতে ক্রিয়মাণ n-সংখ্যক বল P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_n সাম্যাবস্থায় আছে। একটি ভেদক উহাদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে L_1, L_2, L_3, $\cdots\cdots$, L_n বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে,

$$\frac{P_1}{OL_1}+\frac{P_2}{OL_2}+\frac{P_3}{OL_3}+\cdots\cdots+\frac{P_n}{OL_n}=0.$$

15. একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল দুইটি বলের একটিকে দ্বিগুণিত এবং অপরটিকে R পরিমাণ বর্ধিত করা হইল। প্রমাণ কর যে লব্ধিবলের দিক্ অপরিবর্তিত থাকিলে দ্বিতীয় বলটির পরিমাপ R.

16. একটি ত্রিভুজ ABC-র ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহুত্রয়ের সমান্তরাল ও অভিমুখিতাবিশিষ্ট P-পরিমাপের তিনটি সমান বল একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত হইল। প্রমাণ কর যে, বল তিনটির লব্ধি বল,

$$P\sqrt{3-2\cos A-2\cos B-2\cos C}$$

17. একটি সুষম ষড়ভুজ ABCDEF-এর প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a. A বিন্দুতে প্রযুক্ত পাঁচটি বলকে $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $2\overline{AD}$, $5\overline{AE}$ ও $4\overline{AF}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। বলগুলির লব্ধি বল নির্ণয় কর।

18. একটি বৃত্তের পরিধিস্থ A, B ও C তিনটি বিন্দু। $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BC}$ রেখায় AB ও BC-র সহিত ব্যস্তানুপাতিক দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রমাণ কর যে বল দুইটির লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা B বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক। [U. P. 1941]

19. $\alpha \neq \pi$ কোণে নত দুইটি বল P, Q-এর লব্ধি বল F, P বলের ক্রিয়া-রেখার সহিত θ কোণে নত। P এবং Q-এর ক্রিয়ারেখায় ক্রিয়াশীল দুইটি বল P ও Q′-এর লব্ধিবল F′, P-এর ক্রিয়ারেখার সহিত ϕ কোণে নত হইলে দেখাও যে, $F' \sin(\alpha-\phi)=F\sin(\alpha-\theta)$.

20. θ-কোণে নত দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় ক্রিয়াশীল দুইটি বল R ও S-এর লব্ধিবল F এবং ঐ দুই সরলরেখায় ক্রিয়মাণ দুইটি বল R′ ও S′-এর লব্ধিবল F′. যদি F ও F′-এর ক্রিয়ারেখা দুইটির নতি হয় ϕ, তবে দেখাও যে,

$$(1-\cos\phi)(1+\cos\phi)=\frac{(R'^2S^2-2RR'SS'+R^2S'^2)(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{F^2F'^2}$$

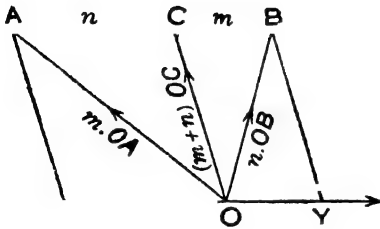
[C. U. 1946]

21. দুইটি বল P ও Q, θ-কোণে নত। যদি P ও Q-এর ক্রিয়ারেখা পারস্পরিক পরিবর্তিত হয়, তবে দেখাও যে লব্ধিবলটি ϕ পরিমাপ কোণ ঘুরিয়া যাইলে, $\tan\frac{\phi}{2}=\frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}$.

§ 2·8. O বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বল P ও Q-এর ক্রিয়ারেখা $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ এবং পরিমাপ m.OA ও n.OB. $\overline{AB}$ রেখাংশ C বিন্দুতে $n : m$ অনুপাতে বিভক্ত

হইয়াছে। OC যোগ কর। প্রমাণ করিতে হইবে যে, P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা ও পরিমাপ যথাক্রমে $\overrightarrow{OC}$ ও $(m+n)$. OC.

[নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AB}$ দ্বারা প্রকাশিত বলের ক্রিয়ারেখায় ক্রিয়াশীল উহার m গুণ বলকে m.AB-রূপে নির্দেশ করা হয়।]

O-বিন্দুর ভিতর দিয়া AB-র সমান্তরাল $\overleftrightarrow{XY}$ সরলরেখা অঙ্কন কর এবং AX ও BY, OC-র সমান্তরাল অঙ্কন কর। সুতরাং XOCA ও YOCB দুইটি সামান্তরিক।

চিত্র 16

এক্ষণে বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{OA}$ দ্বারা প্রকাশিত বলকে OC ও $\overline{OX}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশদ্বয় দ্বারা প্রকাশিত দুইটি উপাংশে বিশ্লেষিত করা যায়। সুতরাং $m.\overline{OA}$ বলকে যথাক্রমে $\overrightarrow{OC}$ ও $\overrightarrow{OX}$ রেখায় ক্রিয়াশীল $m.\overline{OC}$ ও $m.\overline{OX}$ দুইটি উপাংশে বিশ্লেষিত করা যায়। অনুরূপে $n.\overline{OB}$ বলকে যথাক্রমে $\overrightarrow{OC}$ ও $\overrightarrow{OY}$ রেখায় ক্রিয়াশীল $n.\overline{OC}$ ও $n.\overline{OY}$ দুইটি উপাংশে বিশ্লেষিত করা যায়। সুতরাং P ও Q বল দুইটির লব্ধি ও $m.\overline{OC}$, $m.\overline{OX}$, $n.\overline{OC}$ ও $n.\overline{OY}$ বলচারিটির লব্ধি একই বল।

এক্ষণে যেহেতু $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{n}{m}$, $\therefore$ $m.AC=n.BC$.

বা $m.OX=n.OY$. সুতরাং $m.\overline{OX}$ ও $n.\overline{OY}$ বল দুইটি পরস্পরকে অপসারিত করে (কারণ, উহারা একই রেখায় ক্রিয়াশীল এবং উহাদের পরস্পর বিপরীত অভিমুখিতা)। সুতরাং P ও Q বল দুইটির লব্ধিবল $\overrightarrow{OC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল $m.\overline{OC}$ ও $n.\overline{OC}$ বল দুইটির লব্ধিবল অর্থাৎ $(m+n).\overline{OC}$ বল।

অনুসিদ্ধান্ত : উপরের উপপাদ্যে $m=n=1$ বসাইয়া পাই, C, $\overline{AB}$-র মধ্যবিন্দু হইলে $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ রেখায় ক্রিয়াশীল দুইটি বল $\overline{OA}$ ও $\overline{OB}$-র লব্ধিবল $\overrightarrow{OC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল $2.\overline{OC}$ বল।

উদা 1. G, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র হইলে, O বিন্দুতে প্রযুক্ত নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ও $\overline{OC}$ দ্বারা প্রকাশিত তিনটি বলের লব্ধিবল O বিন্দুতে প্রযুক্ত $3.\overline{OG}$ দ্বারা প্রকাশিত বল।

$\overline{OB}$ ও $\overline{OC}$ দ্বারা প্রকাশিত বল দুইটির লব্ধিবল $2.\overline{OD}$ দ্বারা প্রকাশিত বল। যেখানে $\frac{BD}{CD}=\frac{1}{1}$ বা, $BD=CD$, অর্থাৎ D, $\overline{BC}$-র মধ্যবিন্দু। আবার $\overline{OA}$ ও $2.\overline{OD}$ দ্বারা প্রকাশিত বল দুইটির লব্ধিবল $(1+2).\overline{OG}=3.\overline{OG}$, যেখানে $\frac{AG}{DG}=\frac{2}{1}$, অর্থাৎ G বিন্দু ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র

উদা. 2. ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O. প্রমাণ কর যে $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{OC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল এবং যথাক্রমে BC, CA ও AB দৈর্ঘ্যত্রয়ের সহিত সমানুপাতিক তিনটি বলের লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়।

মনে কর $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ ও $\overline{AB}$ বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c এবং বল তিনটির পরিমাপ যথাক্রমে $K.a$, $K.b$ ও $K.c$.

এক্ষণে বল তিনটির পরিমাপকে $\frac{K.a}{OA}.OA$, $\frac{K.b}{OB}.OB$, $\frac{K.c}{OC}.OC$ আকারে অর্থাৎ $\frac{K.a}{R}.AO$, $\frac{K.b}{R}.OB$ ও $\frac{K.c}{R}.OC$ আকারে লেখা যায় (কারণ $OA=OB=OC$ $=$পরিব্যাসার্ধ R)। এক্ষণে O বিন্দুতে প্রযুক্ত $\frac{K.b}{R}.\overline{OB}$ ও $\frac{K.c}{R}.\overline{OC}$ বল দুইটির লব্ধি বল $\frac{K}{R}(b+c).\overline{OD}$ যেখানে $\frac{BD}{CD}=\frac{\frac{KC}{R}}{\frac{Kb}{R}}=\frac{c}{b}$. সুতরাং AD যোগ করিলে $\overrightarrow{AD}$, $\angle BAC$-র সমদ্বিখণ্ডক। আবার, $\frac{K}{R}(b+c).OD$ ও $\frac{Ka}{R}.\overline{OA}$ এই দুইটি বলের লব্ধি বল OI রেখায় ক্রিয়াশীল $\frac{K}{R}(a+b+c).OI$. পরিমাপের একটি বল যেখানে

$$\frac{AI}{DI}=\frac{\frac{K(b+c)}{R}}{\frac{K.a}{R}}=\frac{b+c}{a}.$$

এখন $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}=\frac{AB+AC}{BD+CD}=\frac{c+b}{BC}=\frac{b+c}{a}$.

$\therefore\ \frac{AI}{DI}=\frac{AB}{BD}\quad\therefore$ BI, $\angle ABC$-র সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ I, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং লব্ধিবলটি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রগামী।

উদা. 8. একটি ত্রিভুজ ABC-র সমতলে O একটি বিন্দু এবং I ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ ও $\vec{OC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল যথাক্রমে OA sin A, OB sin B ও OC sin C পরিমাপের তিনটি বলের লব্ধিবল $\vec{OI}$ রেখায় ক্রিয়াশীল একটি বল যাহার পরিমাপ $4OI.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$.

$\vec{OB}$ ও $\vec{OC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল OB sin B ও OC.sin C পরিমাপের বল দুইটির লব্ধিবল $\vec{OD}$ রেখায় ক্রিয়াশীল (sin B+sin C).OD পরিমাপের একটি বল এবং D বিন্দু BC রেখাংশকে sin C : sin B অনুপাতে বিভক্ত করে, অর্থাৎ $\frac{BD}{CD}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{c}{b}=\frac{AB}{AC}$, $\therefore$ $\vec{AD}$, $\angle A$কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

আবার $\vec{OA}$ ও $\vec{OD}$ রেখায় ক্রিয়াশীল যথাক্রমে sin A.OA ও (sin B+sin C).OD পরিমাপের বল দুইটির লব্ধিবল $\vec{OI'}$ রেখায় ক্রিয়াশীল

$(\sin A+\sin B+\sin C).OI'=4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.OI'$ পরিমাপের একটি বল

[ইহা একটি ত্রিকোণমিতিক অভেদ]

এবং $\frac{AI'}{DI'}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{b+c}{a}$.

আবার, $\therefore\ \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$, $\therefore$ উদাহরণ 2-এর ন্যায় প্রমাণ করা যায় যে

$\frac{AI'}{DI'}=\frac{AC}{CD}$ অর্থাৎ AI', $\angle BAC$-র সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ I', ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

সুতরাং $I\equiv I'$ এবং নির্ণেয় লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা ও পরিমাপ যথাক্রমে $\vec{OI}$ ও $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.OI$.

উদা. 4. একটি কণা P-কে ABCD চতুর্ভুজের অভ্যন্তরে কোথায় স্থাপন করিলে $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ এবং $\overline{PD}$ দ্বারা প্রকাশিত বল চারিটির ক্রিয়ায় কণাটি স্থির থাকিবে ?

M, AC-র মধ্যবিন্দু হইলে, $\overline{PA}$ এবং $\overline{PC}$ দ্বারা প্রকাশিত বল দুইটির লব্ধি বল $2\overline{PM}$. N, BD-র মধ্যবিন্দু হইলে $\overline{PB}$ এবং $\overline{PD}$ দ্বারা প্রকাশিত বল দুইটির লব্ধি বল $2\overline{PN}$.

সুতরাং $2\overline{PM}$ এবং $2\overline{PN}$ বল দুইটি সমান ও বিপরীতমুখী হইলে বল চারিটির ক্রিয়ায় কণাটি স্থির অবস্থায় থাকিবে। এক্ষণে, $2\overline{PM}$ ও $2\overline{PN}$ বল দুইটি পরস্পর সমান ও বিপরীতমুখী হইলে, P, MN-এর মধ্যবিন্দু হইবে।

সুতরাং চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দুই নির্ণেয় বিন্দু।

প্রশ্নমালা 2C

1. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{CB}$ রেখায় ক্রিয়াশীল $\frac{K}{\cos A}$ ও $\frac{K}{\cos B}$ পরিমাপের দুইটি বলের লব্ধি বল $\overrightarrow{CF}$ রেখায় প্রযুক্ত $K(\tan A+\tan B)$ পরিমাপের একটি বল। A, B, C বিন্দুত্রয় ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং F, A বিন্দু হইতে BC-র উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু।

2. § 2·8 এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, একটি ভেদক O বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বল P ও Q এবং তাহাদের লব্ধি বল R-এর ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে L, M ও N বিন্দুতে ছেদ করিলে $\frac{P}{OL}+\frac{Q}{OM}=\frac{R}{ON}$ হয়।

3. একটি সুষম ষড়ভুজের সমতলে অবস্থিত P একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, ষড়ভুজটির পরিকেন্দ্র O হইলে, $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$, $\overline{PE}$ ও $\overline{PF}$ দ্বারা প্রকাশিত বল সমূহের লব্ধি বল $6\overline{PO}$ দ্বারা প্রকাশিত হইবে।

4. AB ও CD একটি বৃত্তের দুইটি সমান ও সমান্তরাল জ্যা। বৃত্তটির পরিধিস্থ একটি বিন্দু P, A ও B হইতে সমদূরবর্তী। প্রমাণ কর যে P বিন্দুতে প্রযুক্ত $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ ও $\overline{PD}$ দ্বারা প্রকাশিত বলচারিটির লব্ধি বলের পরিমাপ ধ্রুবক। [C. U. 1943]

5. PQRS একটি চতুর্ভুজ। প্রমাণ কর যে, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{PS}$ ও $\overline{SR}$ দ্বারা প্রকাশিত বল চারিটির লব্ধি বলের মান, দিক্ ও অভিমুখিতা $2\overline{PR}$ দ্বারা প্রকাশিত হয় এবং লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা QS-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U. 1941]

6. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। BE, CA-র উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে $\overrightarrow{BA}$ ও $\overrightarrow{BC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল $\frac{K}{BA}$ ও $\frac{K}{BC}$ পরিমাপের দুইটি বলের লব্ধি বলের পরিমাপ ও ক্রিয়ারেখা যথাক্রমে $\frac{K}{BE}$ ও $\overrightarrow{BE}$ সরলরেখা।

7. প্রমাণ কর যে, $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{AQ}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CQ}$ দ্বারা প্রকাশিত বল ছয়টির লব্ধি বল $3\overline{PQ}$ দ্বারা প্রকাশিত এবং ইহার ক্রিয়ারেখা ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী।

8. ABC ত্রিভুজের $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{CB}$ বাহুদ্বয় বরাবর ক্রিয়াশীল দুইটি বলের পরিমাপ $K.\cos A$ ও $K.\cos B$. প্রমাণ কর যে, উহাদের লব্ধি বলের পরিমাপ $K.\sin C$ এবং উহার ক্রিয়ারেখা C কোণকে $\frac{1}{2}(C+B-A)$ ও $\frac{1}{2}(C+A-B)$ এই দুই অংশে বিভক্ত করে।

9. O এবং H বিন্দু দুইটি যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু। প্রমাণ কর যে (i) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ দ্বারা প্রকাশিত বল তিনটি লব্ধি বল $\overline{OH}$ দ্বারা প্রকাশিত হয়। (ii) $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$ দ্বারা প্রকাশিত বল তিনটির লব্ধি বল $3\overline{HO}$ দ্বারা প্রকাশিত হয় এবং (iii) $\overline{AH}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, দ্বারা প্রকাশিত বল তিনটির লব্ধি বল ত্রিভুজটির A বিন্দুগামী পরিব্যাসার্ধ দ্বারা প্রকাশিত হয়।

10. তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু A, B, C-র সমতলে অবস্থিত P এরূপ একটি চলমান বিন্দু যে, $\overline{PA}$ ও $\overline{PB}$ দ্বারা প্রকাশিত বল দুইটির লব্ধি বল সর্বদা C বিন্দুগামী। প্রমাণ কর যে, P বিন্দুর সঞ্চার পথ $\overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখা, যেখানে D বিন্দু AB-র মধ্যবিন্দু।

11. একটি চতুর্ভুজ ABCD-র সমতলে অবস্থিত P এরূপ একটি চলমান বিন্দু যে $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ ও $\overline{PD}$ দ্বারা প্রকাশিত বল চারিটির লব্ধি বলের পরিমাপ ধ্রুবক। প্রমাণ কর যে P বিন্দুর সঞ্চার পথ একটি বৃত্ত।

12. $(m-n)\,\overline{OP}$, $(n-l)\,\overline{OQ}$ ও $(l-m)\,\overline{OR}$ বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিলে, প্রমাণ কর যে P, Q, R বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

তৃতীয় অধ্যায়

সমবিন্দু বলসমূহের সাম্যাবস্থার শর্ত

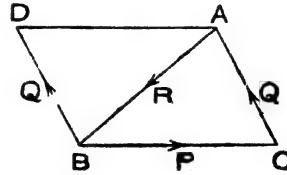
§ 3·1. **বলের ত্রিভুজ-সূত্র (Theorem of Triangle of forces).** **কোন বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বলের মান, দিক্ ও অভিমুখিতা কোন ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহু তিনটি দ্বারা প্রকাশ করা গেলে, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকে।**

একটি বিন্দু O-তে প্রযুক্ত তিনটি বল P, Q, R-এর মান, দিক ও অভিমুখিতা, ABC ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহুত্রয় $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ দ্বারা প্রকাশিত হয়। প্রমাণ করিতে হইবে, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

প্রমাণ। BCAD সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করা হইল।

এক্ষণে যেহেতু $\overline{BD}$ ও $\overline{CA}$ পরস্পর সমান ও সমান্তরাল এবং $\overline{CA}$, Q বলকে প্রকাশ করে, অতএব $\overline{BD}$ ও Q বলকে প্রকাশ করিবে।

এক্ষণে, BCAD সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত বাহু $\overline{BC}$ ও $\overline{BD}$ একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বল P ও Q-এর মান, দিক্ ও অভিমুখিতা প্রকাশ করে। সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী P ও Q বল দুইটির লব্ধি বল সামান্তরিকের $\overline{BA}$ কর্ণ দ্বারা প্রকাশিত হইবে।

(i) চিত্র 17 (ii)

আবার একই বিন্দুতে প্রযুক্ত R বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা $\overline{AB}$ দ্বারা প্রকাশিত হয়।

সুতরাং O-বিন্দুতে প্রযুক্ত P এবং Q-এর লব্ধি বল একই বিন্দুতে প্রযুক্ত R বলের সমান ও বিপরীতমুখী, সুতরাং পরস্পরকে অপসারিত করে।

অতএব প্রদত্ত বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

দ্রষ্টব্য : 17 নং চিত্রে চিত্র (i) ও চিত্র (ii)-কে যথাক্রমে বলসমূহের দেশ-চিত্র (space-diagram) এবং বল-চিত্র (Force-diagram) বলে।

§ 3·2. বলের ত্রিভুজসূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞা :

একটি কণার উপর প্রযুক্ত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিলে বল তিনটির মান, দিক ও অভিমুখিতা একটি ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহুদ্বারা প্রকাশ করা যাইবে।

§ **3·1** এর চিত্র দেখ। একটি কণার উপর প্রযুক্ত তিনটি বল P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে বল তিনটির মান, দিক ও অভিমুখিতা একটি ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহুদ্বারা প্রকাশ করা যাইবে।

মনে কর কোন নির্দিষ্ট স্কেলে $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ রেখাংশ দুইটি P ও Q বল দুইটিকে প্রকাশ করে। AB যোগ কর এবং BCAD সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ কর।

যেহেতু $\overline{BD}$ ও $\overline{CA}$ পরস্পর সমান ও সমান্তরাল, অতএব $\overline{BD}$ রেখাংশ Q বলকে প্রকাশ করে। সুতরাং BCAD সামান্তরিকের $\overline{BC}$ ও $\overline{BD}$ সন্নিহিত বাহুদ্বয় একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বল P ও Q-এর মান, দিক ও অভিমুখিতা প্রকাশ করে। অতএব বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে, P ও Q বলের লব্ধিবল সামান্তরিকের $\overline{BA}$ কর্ণদ্বারা প্রকাশিত হইবে। এক্ষণে, P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। অতএব, R বল, P ও Q বলের লব্ধিবলের সমান কিন্তু বিপরীতমুখী।

∴ R বলটির মান, দিক ও অভিমুখিতা $\overline{AB}$ রেখাংশদ্বারা প্রকাশিত হইবে। সুতরাং পূর্বনির্দিষ্ট স্কেলে, ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ বাহুত্রয় যথাক্রমে P, Q ও R-বলকে প্রকাশ করে।

দ্রষ্টব্য : ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির সমান্তরাল বাহুবিশিষ্ট অপর যে কোন ত্রিভুজও অন্য কোন স্কেলে বল তিনটিকে প্রকাশ করিবে। কারণ, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হইবে এবং বাহুগুলির দৈর্ঘ্যসমূহ সমানুপাতী হইবে।

উদাহরণ 1. তিনটি বলের পরিমাপের অনুপাত 4 : 5 : 8. বল তিনটি একটি কণার উপর প্রযুক্ত হইলে, উহারা সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে কিনা বল। আর, এই প্রশ্নে বল তিনটির পরিমাপের অনুপাত (i) 4 : 5 : 9 হইলে বা, (ii) 4 : 5 : 10 হইলে বল তিনটির সাম্যাবস্থা সম্বন্ধে আলোচনা কর।

যেহেতু 4, 5 ও 8-এর যে কোন দুইটির যোগফল তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর, সুতরাং 4, 5 ও 8-এর সহিত সমানুপাতিক দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট যে কোন

ত্রিভুজের তিনটি বাহুদ্বারা বল তিনটির পরিমাপকে প্রকাশ করা যাইবে। এক্ষণে যখন বল তিনটির দিক এবং অভিমুখিতা এরূপ হইবে যে, ঐ ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহু তিনটি বল তিনটিকে প্রকাশ করিবে, তখন বলের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

(i) যেহেতু $4+5=9$, বল তিনটিকে কোন ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহুদ্বারা প্রকাশ করা যাইবে না। কিন্তু, যদি 4 ও 5-এর সহিত সমানুপাতী বল দুইটি একই রেখায় একই অভিমুখে এবং 9-এর সহিত সমানুপাতী বলটি সেই একই রেখায় বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়াশীল হয়, তবে প্রথম বল দুইটির লব্ধিবল, তৃতীয় বলটিকে অপসারিত করিবে। সুতরাং বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

(ii) যেহেতু $4+5<10$, সুতরাং বল তিনটিকে কোন ত্রিভুজের বাহুদ্বারা প্রকাশ করা যাইবে না বা উপরের (i)-এর ন্যায়ও কোন দুইটির লব্ধিবল দ্বারা তৃতীয়টিকে অপসারণ করা যাইবে না। সুতরাং এইক্ষেত্রে কোনও ভাবেই বলগুলির সাম্যাবস্থা সম্ভব নয়।

উদা. 2. তিনটি বলের পরিমাপের অনুপাত $2:\sqrt{2}:\sqrt{3}+1$. বল তিনটি একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং সাম্যাবস্থায় থাকিলে 2 ও $(\sqrt{3}+1)$ এর সহিত সমানুপাতী বল দুইটির অন্তর্ভূ́ত কোণটি নির্ণয় কর।

যেহেতু বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে, এবং উহারা একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, সুতরাং উহাদিগকে একটি ত্রিভুজ ABC-র ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহুদ্বারা প্রকাশ করা যাইবে। মনে কর 2 ও $(\sqrt{3}+1)$ এর সহিত সমানুপাতী বল দুইটি $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$ দ্বারা প্রকাশিত। সুতরাং $\overline{BC}$ ও $\overline{CA}$-র অন্তর্ভূ́ত কোণের পরিমাপ θ হইলে, $m\angle ACB(=C)=\pi-\theta$.

এক্ষণে, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ [a, b, c এখানে ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য, $\therefore a=2k, b=(\sqrt{3}+1)k$ ও $c=\sqrt{2}k$, মনে কর।]

$$=\frac{k^2\{(2)^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{2})^2\}}{k^2 2.2.(\sqrt{3}+1)}=\frac{4+3+1+2\sqrt{3}-2}{4(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{6+2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$$

$\therefore$ $C=30^\circ$. সুতরাং নির্ণেয় কোণ $180^\circ-30^\circ=150^\circ$.

উদা. 8. একটি অনুভূমিক দণ্ডের দুইটি বিন্দু A ও Bতে আবদ্ধ দুইটি সরু ভারহীন 2·5 মিটার ও 3 মিটার দীর্ঘ দড়ি C বিন্দুতে পরস্পরের সহিত বদ্ধ (knotted). 10 কেজি. ভারের একটি ভার C বিন্দুতে ঝুলান আছে। A ও B-র দূরত্ব 4 মিটার এবং ভারটি সাম্যাবস্থায় আছে। দড়ি দুইটির টান নির্ণয় কর।

মনে কর দড়ি দুইটির টান T_1 ও T_2.

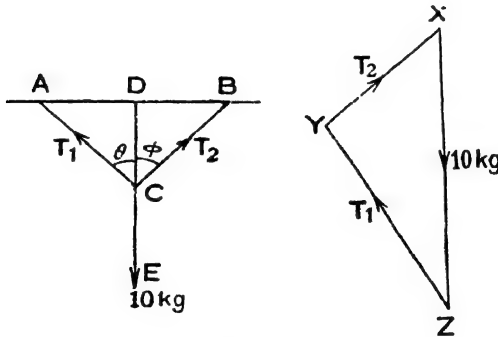
T_1, T_2 ও 10 কেজি. বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং এই বলগুলির জন্য একটি নির্দিষ্ট স্কেলে বলের ত্রিভুজ XYZ অঙ্কন করা হইল। অতএব নির্দিষ্ট স্কেলে $\overline{ZY}$, $\overline{YX}$, ও $\overline{XZ}$ যথাক্রমে T_1, T_2 ও 10 কেজি. বল তিনটির মান, দিক ও অভিমুখিতা প্রকাশ করে।

$\therefore$ $\overline{YX}$, $\overline{ZY}$ ও $\overline{XZ}$ যথাক্রমে $\overline{CB}$ ও $\overline{CA}$ ও $\overline{CE}$-র সমান্তরাল।

$\therefore$ $m\angle YZX = m\angle ACD = \theta$ (মনে কর)

এবং $m\angle YXZ = m\angle DCB = \phi$ (মনে কর)

এক্ষণে, $\triangle ABC$-র $AB = 4$ মি., $BC = 2·5$ মি. ও $CA = 3$ মি.

$$\cos A = \frac{4^2 + 3^2 - (2·5)^2}{2.4\,3} = \frac{25}{32} = ·7815 = \cos 38°27',$$

চিত্র 18

$\therefore$ $A = 38°27'$; $\therefore$ $\theta = 90° - 38°27' = 51°33'$

অনুরূপে, $B = 48°30'$ এবং $\phi = 90° - 48°30 = 41°30'$

$\therefore$ $m\angle XYZ = 180' - (\theta + \phi) = 86°57'$

এক্ষণে $\triangle XYZ$ হইতে, $\dfrac{YX}{XZ} = \dfrac{\sin 51°23'}{\sin 86°57'}$

কিন্তু XZ=10 (∵ ইহা 10 কেজি. বলকে প্রকাশ করে)

∴ YX=7·8 (আসন্ন)।

অনুরূপে, $\frac{YZ}{10}=\frac{\sin 41°30'}{\sin 86°57'}$ হইতে, YZ=6·65 (আসন্ন)।

সুতরাং নির্ণেয় টান দুইটি 7·8 কেজি. ও 6·65 কেজি.।

উদা. 4. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল কোন ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহুর সহিত সমানুপাতী হইলে এবং উহাদের অভিমুখিতা বাহুগুলির লম্বাভিমুখী (প্রত্যেকেই বহির্মুখী বা প্রত্যেকেই অন্তর্মুখী) হইলে প্রমাণ কর যে বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকে।

ত্রিভুজটিকে এরূপে এক সমকোণ পরিমাণ কোণে আবর্তিত কর, যাহাতে নূতন অবস্থানে ত্রিভুজটির বাহুগুলি বল তিনটির সমান্তরাল হয়। যেহেতু ত্রিভুজের বাহুগুলি বল তিনটির সহিত সমানুপাতী, সুতরাং নূতন অবস্থানে ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহুগুলি বলতিনটির মান, দিক ও অভিমুখিতা প্রকাশ করিবে। অতএব বলের ত্রিভুজ সূত্র অনুযায়ী বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

উদা. 5. F এবং E যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু। যদি সমবিন্দু দুইটি বলের মান ও দিক $\overline{BE}$ ও $\overline{FC}$ দ্বারা প্রকাশিত হয়, তবে উহাদের লব্ধিবলের মান ও দিক নির্ণয় কর।

$\overline{BE}$ রেখার দ্বারা প্রকাশিত বল $\overline{BC}$ এবং $\overline{CE}$ বলদ্বয়ের লব্ধি। FC রেখার দ্বারা প্রকাশিত বল $\overline{FB}$ এবং BC বলদ্বয়ের লব্ধি।

∴ $\overline{BE}$ এবং $\overline{FC}$ দ্বারা প্রকাশিত বল দুইটির লব্ধি 2BC এবং $\overline{CE}$ ও $\overline{FB}$ বল তিনটির লব্ধি।

এক্ষণে, $CE=\frac{1}{2}CA$ এবং $FB=\frac{1}{2}AB$ ∴ $\overline{CE}+\overline{FB}=\frac{1}{2}(\overline{CA}+\overline{AB})=\frac{1}{2}\overline{CB}$

সুতরাং নির্ণেয় লব্ধি $2\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{CB}=2\overline{BC}-\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{3}{2}\overline{BC}$

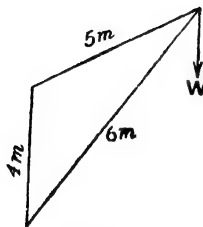
প্রশ্নমালা 3A

1. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বলের পরিমাপ

(i) 5, 6, 8 (ii) 5, 6, 11 ও (iii) 5, 6, 12-এর সহিত সমানুপাতী। কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে ?

2. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বলের পরিমাপের অনুপাত 3 : 2 : 1. কোন অবস্থাতে বল তিনটির সাম্যাবস্থা সম্ভব কিনা বল। [C. U. 1943]

3. $a, a, \sqrt{2}a$ পরিমাপের তিনটি বল একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল। বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিলে, প্রমাণ কর সমান বল দুইটি সমকোণে নত থাকিবে।

4. দুইটি সরু হাল্কা তারের একটি করিয়া প্রান্ত একটি অনুভূমিক দণ্ড AB-র সহিত A ও B বিন্দুতে এবং অপর প্রান্ত দুইটি C বিন্দুতে পরস্পরের সহিত আবদ্ধ। C বিন্দুতে একটি 80 কেজি. ভার ঝুলান আছে। যদি AB=50 সে. মি. এবং তার দুইটির দৈর্ঘ্য 40 সে. মি. ও 30 সে. মি. হয়, তবে সাম্যাবস্থার ক্ষেত্রে তার দুইটির টান নির্ণয় কর।

চিত্র 19

5. একটি ক্রেনের জিব বা দণ্ড 6 মিটার দীর্ঘ; 5 মিটার দীর্ঘ বন্ধনী-দড়ি থামের গোড়া হইতে 4 মিটার উপরে বাঁধা আছে। যদি দণ্ড 200 কেজি.-র অধিক চাপ বহন করিতে না পারে, তাহা হইলে ক্রেনটি সর্বাপেক্ষা বেশী কত ভার বহন করিতে পারিবে?

6. 10 কেজি. ভারের একটি বস্তু অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে নত একটি নততলের উপর একটি অনুভূমিক দড়ির দ্বারা স্থিতাবস্থায় আছে। বলের ত্রিভুজ অঙ্কন করিয়া দড়ির টান ও নততলের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

7. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে। P ও Q-এর নতি 105° এবং P ও R-এর নতি 120°. যদি P-বলের পরিমাপ 10 কেজি. হয়, তবে Q ও R বল দুইটি নির্ণয় কর।

8. ABCD একটি সামান্তরিক এবং P ইহার অভ্যন্তরে একটি কণা এবং $\overline{PA}, \overline{PC}, \overline{BP}, \overline{DP}$ দ্বারা প্রকাশিত চারিটি বল কণাটির উপর ক্রিয়াশীল। প্রমাণ কর যে, কণাটি যেখানেই থাকুক না কেন ইহা সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

9. একটি কণার উপর ক্রিয়মাণ দুইটি বল কোনও সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় দ্বারা প্রকাশিত হইলে, ঐ বল দুইটির লব্ধি বল ঐ সামান্তরিকের একটি বাহুর দ্বিগুণ দ্বারা প্রকাশিত হয়।

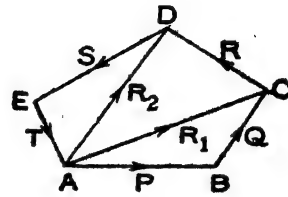
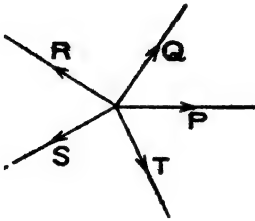
10. ABCD একটি সামান্তরিক। দেখাও যে, $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AC}$ এবং $\overline{DB}$ দ্বারা প্রকাশিত চারিটি বলের লব্ধির মান এবং অবস্থান $2\overline{AB}$ দ্বারা প্রকাশিত হয়।

11. D, E, F যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\overline{AD}, \overline{BE}$ ও $\overline{CF}$ দ্বারা প্রকাশিত সমবিন্দু বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

§ ৩৪. বলের বহুভুজ সূত্র (Polygon of Forces):

কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল সসীমসংখ্যক (এখানে তিনের অধিক) বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা একটি সম্পূর্ণ বহুভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহুসমূহের দ্বারা প্রকাশযোগ্য হইলে, বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকে।

মনে কর, P, Q, R, S এবং T বলসমূহ O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং উহাদের মান, দিক ও অভিমুখিতা ABCDE বহুভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহু $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ এবং $\overline{EA}$ দ্বারা প্রকাশিত। AC ও AD যোগ হয়।

চিত্র 20

যেহেতু $\overline{AB}$ ও $\overline{BC}$, যথাক্রমে P ও Q বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা প্রকাশ করে, অতএব $\overline{AC}$ উহাদের লব্ধিবল R_1-এর মান, দিক ও অভিমুখিতা প্রকাশ করিবে। অনুরূপে R_1 ও R বলের লব্ধিবল R_2-র মান, দিক ও অভিমুখিতা $\overline{AD}$ দ্বারা এবং R_2 ও S বলের লব্ধিবলের মান, দিক ও অভিমুখিতা $\overline{AE}$ দ্বারা প্রকাশিত হইবে। সুতরাং P, Q, R, S বলের লব্ধিবল $\overline{AE}$ দ্বারা প্রকাশিত। আবার অবশিষ্ট বল T, $\overline{EA}$ দ্বারা প্রকাশিত। এখানে $\overline{AE}$ ও $\overline{EA}$ দ্বারা প্রকাশিত বল দুইটির মান ও দিক সমান কিন্তু অভিমুখিতা বিপরীত। সুতরাং উহারা সাম্যাবস্থায় থাকিবে। অর্থাৎ, P, Q, R, S, T সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

দ্রষ্টব্য: কতকগুলি বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা জানা থাকিলে, বলগুলিকে একই স্কেলে ক্রমানুসারে গৃহীত $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ইত্যাদি রেখাসমূহ দ্বারা প্রকাশ করা হইলে, প্রথম রেখার প্রারম্ভ বিন্দু A ও শেষ রেখার অন্তিম বিন্দু F যোগ করিয়া যে নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AF}$ পাওয়া যায়, তাহা বলসমূহের লব্ধি বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা প্রকাশ করিবে।

§ 8'4. **বলের বহুভুজ সূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞা (Converse of Polygon of forces) :**

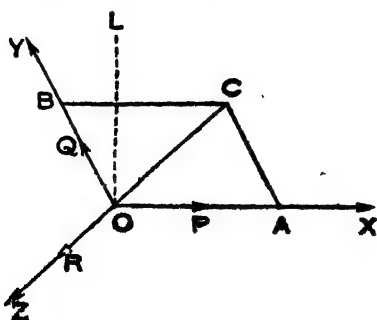
কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনের অধিক সংখ্যক বল সাম্যাবস্থায় থাকিলে এই বলসমূহের মান, দিক ও অভিমুখিতা একটি বহুভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহুগুলির দ্বারা প্রকাশ করা যাইবে।

মনে কর বলের সংখ্যা পাঁচ এবং বলগুলি P, Q, R, S, T. P, Q, R, S বলসমূহের মান, দিক ও অভিমুখিতা নির্দেশক $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ও $\overline{DE}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশগুলি ক্রমান্বয়ে অঙ্কন কর। EA যোগ কর। এক্ষণে $\overline{AE}$ নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ P, Q, R, S বলগুলির লব্ধিবলকে প্রকাশ করিবে। যেহেতু বলগুলির সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং T বল এই লব্ধিবলের সমান মান ও দিক কিন্তু বিপরীত অভিমুখিতাবিশিষ্ট। সুতরাং নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{EA}$, T বলকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করিবে। অতএব ABCDE বহুভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহুগুলি দ্বারা P, Q, R, S ও T বলসমূহের মান, দিক ও অভিমুখিতা প্রকাশিত হইল।

অনুরূপে, প্রতিজ্ঞাটি যে কোন সসীম সংখ্যক বলের জন্য প্রমাণ করা যায়।

দ্রষ্টব্য : যেহেতু দুইটি বহুভুজের অনুরূপ বাহুগুলি সমান্তরাল হইলে, অনুরূপ বাহুগুলি সর্বদা সমানুপাতী হয় না, সেজন্য বলগুলির ক্রিয়ারেখার সমান্তরাল বাহুবিশিষ্ট যে-কোন বহুভুজ, বলগুলিকে প্রকাশ করিতে পারে না।

§ 8'5. **ল্যামির উপপাদ্য (Lami's Theorem)**

যদি তিনটি সমবিন্দু বল সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে বলসমূহের প্রত্যেকটি অপর দুই বলের অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইনের অনুপাতে থাকে।

মনে কর O-বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বল P, Q, R-এর ক্রিয়ারেখা যথাক্রমে $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ ও $\overrightarrow{OZ}$ এবং বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

চিত্র 21

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{P}{\sin YOZ}=\frac{Q}{\sin ZOX}=\frac{R}{\sin XOY}.$$

কোন নির্দিষ্ট স্কেলে P ও Q-কে প্রকাশ করিবার জন্য OX ও OY হইতে OA ও OB অংশ কাটিয়া লও

এবং OACB সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ কর। OC যোগ কর। সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী $\overline{OC}$, P ও Q বল দুইটির লব্ধিবলকে প্রকাশ করিবে।

এক্ষণে, P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে ; সুতরাং P, Q বলের লব্ধিবল ও R বলের মান ও দিক সমান এবং অভিমুখিতা বিপরীত হইবে। সুতরাং $\overline{CO}$, R বলকে প্রকাশ করিবে এবং C, O, Z বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে। আবার $\overline{AC}$ ও $\overline{OB}$ পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

সুতরাং $\overline{AC}$, Q বলের মান দিক ও অভিমুখিতা প্রকাশ করে।

এক্ষণে, $\triangle OAC$ হইতে পাই,

$$\frac{OA}{\sin OCA}=\frac{AC}{\sin COA}=\frac{CO}{\sin OAC}.$$

এক্ষণে, OA, AC, CO যথাক্রমে P, Q, R-এর মান প্রকাশ করে এবং

$\sin OCA=\sin COB=\sin (180°-YOZ)=\sin YOZ$

$\sin COA=\sin (180°-ZOX)=\sin ZOX$

$\sin OAC=\sin (180°-XOY)=\sin XOY$

$$\therefore \quad \frac{P}{\sin YOZ}=\frac{Q}{\sin ZOX}=\frac{R}{\sin XOY}.$$

বিকল্প পদ্ধতি : মনে কর $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OX}$-এর উপর লম্ব। এক্ষণে যেহেতু বলগুলি সাম্যাবস্থায় আছে, অতএব বলগুলির $\overrightarrow{OL}$ রেখায় বিশ্লেষিতাংশগুলির বৈজিক যোগফল শূন্য।

সুতরাং $Q \sin XOY-R \sin XOZ=0$

বা, $$\frac{Q}{\sin XOZ}=\frac{R}{\sin XOY}$$

অনুরূপে $\overrightarrow{OY}$-এর লম্বদিকে বলগুলির বিশ্লেষিতাংশসমূহের বৈজিক যোগফল লইয়া পাই,

$$\frac{P}{\sin YOZ}=\frac{R}{\sin XOY}$$

$$\therefore \quad \frac{P}{\sin YOZ}=\frac{Q}{\sin ZOX}=\frac{R}{\sin XOY}.$$

§ 3·6. ল্যামির উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা (Converse of Lami's Theorem) :

যদি একই বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বলের অভিমুখিতা এইরূপ হয় যে, প্রত্যেকটি অপর বল দুইটির লব্ধিবল যে কোণের মধ্যে থাকে, তাহার বিপরীত

কোণে থাকে এবং প্রত্যেকটি বল অপর দুইটি বলের অন্তর্ভুক্ত কোণের sine এর সহিত একই অনুপাতে থাকে, তবে বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

মনে কর O-বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বল P, Q, R-এর ক্রিয়ারেখা যথাক্রমে $\vec{OX}$, $\vec{OY}$ ও $\vec{OZ}$ এবং $\frac{P}{\sin YOZ}=\frac{Q}{\sin ZOX}=\frac{R}{\sin XOY}$ ......(1)

[§ 3·5-এর চিত্র দেখ].

প্রমাণ করিতে হইবে যে, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

$\vec{ZO}$-কে বর্ধিত কর এবং বর্ধিত $\vec{ZO}$ হইতে $\overline{CO}$ রেখাংশ এইরূপে কাটিয়া লও যেন কোন নির্দিষ্ট স্কেলে $\overline{CO}$, R-বলকে প্রকাশ করে। $\overline{OC}$-কে কর্ণ ধরিয়া এবং $\vec{OX}$ ও $\vec{OY}$ রেখায় দুইটি সন্নিহিত বাহু থাকে এইরূপ OACB সামান্তরিকটি অঙ্কন কর।

এক্ষণে, OAC ত্রিভুজ হইতে,

$$\frac{OA}{\sin OCA}=\frac{AC}{\sin AOC}=\frac{OC}{\sin OAC}=\frac{R}{\sin OAC}$$

আবার, $\sin OCA=\sin BOC=\sin(180°-YOZ)=\sin YOZ$

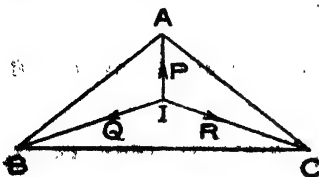
$\sin AOC=\sin(180°-ZOX)=\sin ZOX$

এবং $\sin OAC=\sin(180°-XOY)=\sin XOY.$

সুতরাং $\frac{OA}{\sin YOZ}=\frac{AC}{\sin ZOX}=\frac{R}{\sin XOY}$ ......(2)

এক্ষণে, (1) ও (2) হইতে পাই, $P=OA$, $Q=OB$;

অর্থাৎ $\overline{OA}$ ও $\overline{OB}$, প্রদত্ত বল P ও Q-এর মান, অভিমুখিতা ও দিক প্রকাশ করে। সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী $\overline{OC}$, P ও Q বলের লব্ধিবলকে প্রকাশ করিবে। আবার $\overline{CO}$, একই বিন্দু O-এ ক্রিয়াশীল R বলকে প্রকাশ করে। সুতরাং P ও Q বল দুইটির লব্ধিবলকে R বল অপসারিত করে অর্থাৎ P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

উদাহরণ 1. I বিন্দু ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং $\vec{IA}$, $\vec{IB}$ ও $\vec{IC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে,

$$\frac{P}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{Q}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{R}{\cos\frac{C}{2}}.$$

চিত্র 22

যেহেতু I বিন্দুতে প্রযুক্ত $\vec{IA}$, $\vec{IB}$, $\vec{IC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে,

অতএব, ল্যামির উপপাদ্য অনুযায়ী $\frac{P}{\sin BIC} = \frac{Q}{\sin CIA} = \frac{R}{\sin AIB}$

বা, $\frac{P}{\sin\left(90^\circ+\frac{A}{2}\right)} = \frac{Q}{\sin\left(90^\circ+\frac{B}{2}\right)} = \frac{R}{\sin\left(90^\circ+\frac{C}{2}\right)}$

[∵ I, △ABC-এর অন্তঃকেন্দ্র]

বা, $\frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$

উদা. 2. O বিন্দু ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র এবং $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ ও $\vec{OC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে,

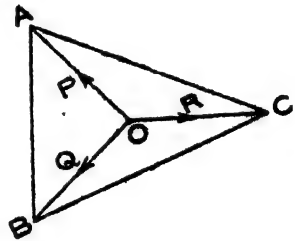
$$\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}.$$

যেহেতু O বিন্দুতে প্রযুক্ত $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে,

অতএব, ল্যামির উপপাদ্য অনুযায়ী

$\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin COA} = \frac{R}{\sin AOB}$

বা, $\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$

[∵ O-ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র এবং একই চাপের উপর কেন্দ্রস্থ কোণ, পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।]

চিত্র 23

বা, $\frac{P}{2\sin A\cos A} = \frac{Q}{2\sin B\cos B} = \frac{R}{2\sin C\cos C}$

বা, $\frac{P}{\frac{a}{2R'}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \frac{Q}{\frac{b}{2R'}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}} = \frac{R}{\frac{c}{2R'}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$

[R′, △ABC-এর পরিব্যাসার্ধ].

বা, $\frac{P}{\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{abc}} = \frac{Q}{\frac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{abc}} = \frac{R}{\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{abc}}$

বা, $\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}.$

উদা. 3. W ভারের একটি কণা দুইটি দড়ির দ্বারা ঝোলান হইল। একটি দড়ি উল্লম্বদিকের সহিত 30° কোণে নত; অপর দড়িটির উল্লম্বদিকের সহিত নতি কি হইলে, উহার টান ক্ষুদ্রতম হইবে? এই ক্ষেত্রে উভয় দড়ির টান নির্ণয় কর।

মনে কর AB ও AC এবং W ভারটি A বিন্দু হইতে ঝোলান। $\overleftrightarrow{EF}$ উল্লম্বদিক এবং $m\angle BAF = 30°$.

মনে কর দড়ি দুইটির টান T_1 ও T_2 এবং $m\angle CAF = \theta$.

$\therefore \quad m\angle BAE = 180° - 30° = 150°$; $m\angle CAE = 180° - \theta$

এবং $m\angle BAC = 30° + \theta$.

চিত্র 24

এক্ষণে, A বিন্দুতে $\vec{T_1}$, $\vec{T_2}$ ও $\vec{W}$ বল তিনটি প্রযুক্ত এবং উহাদের ক্রিয়ারেখা যথাক্রমে AB, AC ও AE. যেহেতু বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে, অতএব ল্যামির উপপাদ্য অনুযায়ী

$$\frac{T_1}{\sin CAE} = \frac{T_2}{\sin BAE} = \frac{W}{\sin BAC}$$

বা, $$\frac{T_1}{\sin(180° - \theta)} = \frac{T_2}{\sin 150°} = \frac{W}{\sin(30° + \theta)}$$

$$T_1 = \frac{\sin(180° - \theta)W}{\sin(30° + \theta)} = \frac{\sin\theta}{\sin(30° + \theta)}W$$

$$T_2 = \frac{\sin 150°}{\sin(30° + \theta)}W = \frac{W}{2\sin(30° + \theta)}.$$

এক্ষণে, T_2 ক্ষুদ্রতম হইবে যখন, $\sin(30° + \theta)$ বৃহত্তম অর্থাৎ 1 হইবে; অর্থাৎ যখন $30° + \theta = 90°$, বা, $\theta = 60°$ হইবে।

আবার তখন $T_1 = \frac{\sin 60°}{\sin 90°}W = \frac{\sqrt{3}}{2}W$; এবং $T_2 = \frac{W}{2}$.

উদা. 4. 10 পাউণ্ড ভারের একটি বস্তু 7 ইঞ্চি এবং 24 ইঞ্চি দীর্ঘ দুইটি দড়ি দ্বারা ঝুলান হইল। দড়ি দুইটির অপর প্রান্ত দুইটি একটি দণ্ডের দুই প্রান্তে এমনভাবে আটকান যে, বস্তুটি দণ্ডটির মধ্যবিন্দুর ঠিক নীচে সাম্যাবস্থায় ছিল। যদি দণ্ডটির দৈর্ঘ্য 25 ইঞ্চি হয়, তবে দড়ি দুইটির টান নির্ণয় কর। [U.P. '43]

মনে কর দণ্ডটি হইল AB, দড়ি দুইটি CA ও CB এবং ভারটি C বিন্দু হইতে ঝুলান। মনে কর D, AB-র মধ্যবিন্দু; অতএব $\overleftrightarrow{CD}$ উল্লম্বদিক নির্দেশ করে।

চিত্র 24

এক্ষণে AB = 25″, BC = 24″ ও AC = 7″.

আবার, $25^2 = 24^2 + 7^2$.

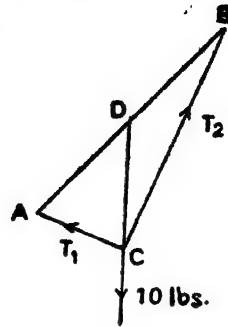
সুতরাং $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

∴ ∠ACB সমকোণ।

সুতরাং $CD = \frac{1}{2}AB = BD = AD$

∴ $m\angle DBC = m\angle DCB$

এবং $m\angle ACD = m\angle DAC$.

এক্ষণে, C বিন্দুতে প্রযুক্ত উল্লম্বরেখায় নিম্নাভিমুখী ভার 10 পা. এবং $\vec{CA}$ ও $\vec{CB}$ রেখায় দড়ি দুইটির টান T_1 ও T_2 এই তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে।

সুতরাং ল্যামির উপপাদ্য অনুসারে,

$$\frac{T_1}{\sin(\pi - DCB)} = \frac{T_2}{\sin(\pi - DCA)} = \frac{10 \text{ পাউণ্ড}}{\sin ACB}$$

বা, $$\frac{T_1}{\sin DCB} = \frac{T_2}{\sin DCA} = \frac{10 \text{ পাউণ্ড}}{\sin ACB}$$

বা, $$\frac{T_1}{\sin DBC} = \frac{T_2}{\sin DAC} = \frac{10 \text{ পাউণ্ড}}{\sin 90^\circ},$$ বা, $$\frac{T_1}{\frac{7}{25}} = \frac{T_2}{\frac{24}{25}} = 10 \text{ পাউণ্ড}$$

∴ $T_1 = \frac{7}{25} \times 10 = \frac{14}{5}$ পাউণ্ড এবং $T_2 = \frac{24}{25} \times 10 = \frac{48}{5}$ পাউণ্ড।

উদা. 5. W ভারের একটি কণাকে একটি মসৃণ নততলের অনুভূমিক রেখায় ক্রিয়াশীল কোন বল P অথবা নততল বরাবর ক্রিয়াশীল একটি বল Q দ্বারা স্থির অবস্থায় রাখা যায়। যদি এই দুইক্ষেত্রে নততলের উপর চাপ যথাক্রমে R এবং S হয়, তবে দেখাও যে, $RS = W^2$ এবং $\frac{1}{Q^2} = \frac{1}{P^2} + \frac{1}{W^2}$

[C. U. 1962]

মনে কর নততলের অনুভূমিক তলের সহিত নতি α.

মনে কর কণাটি নততলের উপর C বিন্দুতে অবস্থিত। এক্ষণে, প্রথম ক্ষেত্রে, C বিন্দুতে প্রযুক্ত উল্লম্বদিকে নিম্নাভিমুখী বল W, অনুভূমিক রেখায় ক্রিয়াশীল বল P এবং নততলের প্রতিক্রিয়া R সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং ল্যামির উপপাদ্য অনুযায়ী, $$\frac{P}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{W}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{R}{\sin 90^\circ}$$

[∵ তলটি মসৃণ, ∴ প্রতিক্রিয়া R নততলের লম্বাভিমুখী]

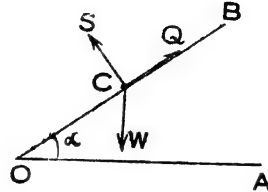
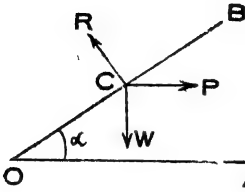
বা, $$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha} = R.$$ ∴ $P = W\tan\alpha$ এবং $R = W\sec\alpha$.

দ্বিতীয়ক্ষেত্রে, C বিন্দুতে প্রযুক্ত উল্লম্বদিকে নিম্নাভিমুখী বল W, নততল বরাবর ক্রিয়াশীল বল Q এবং নততলের প্রতিক্রিয়া S সাম্যাবস্থায় আছে।

সুতরাং ল্যামির উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\frac{Q}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{W}{\sin 90^\circ}=\frac{S}{\sin(90^\circ+\alpha)},\ \text{বা,}\ \frac{Q}{\sin\alpha}=\frac{W}{1}=\frac{S}{\cos\alpha}$$

$\therefore\quad Q=W\sin\alpha$ এবং $S=W\cos\alpha.$

$\therefore\quad RS=W\sec\alpha.\ W\cos\alpha=W^2.$

চিত্র 25

এবং $\frac{1}{Q^2}-\frac{1}{P^2}=\frac{1}{W^2}\operatorname{cosec}^2\alpha-\frac{1}{W^2}\cot^2\alpha.$

$$=\frac{1}{W^2}(\operatorname{cosec}^2\alpha-\cot^2\alpha)=\frac{1}{W^2}.1=\frac{1}{W^2},\quad\therefore\quad\frac{1}{Q^2}=\frac{1}{P^2}+\frac{1}{W^2}.$$

উদা. 6. রম্বসের আকারবিশিষ্ট একটি সমপাত কর্ণদ্বয় বরাবর উহার-কেন্দ্রে প্রযুক্ত দুইটি বল P ও Q (P>Q) দ্বারা স্থিতাবস্থায় আছে। যদি পাতটির একটি প্রান্তরেখা অনুভূমিক রেখায় থাকে এবং একটি কোণের পরিমাপ 120° হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $P^2=3Q^2$.

মনে কর রম্বসের আকারের পাতটি ABCD, এবং AB প্রান্ত অনুভূমিক রেখায় আছে। $m\angle BAD=120^\circ$ এবং পাতটির ভার W. রম্বসের কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে এবং W ভারটি O বিন্দুতে উল্লম্ব দিকে প্রযুক্ত। যদি W-এর ক্রিয়ারেখা ABকে E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $m\angle AEO=90^\circ$. এক্ষণে যেহেতু $m\angle BAD=120^\circ$, অতএব BD দীর্ঘতর কর্ণ এবং P ও Q যথাক্রমে

চিত্র 26

$\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$ রেখায় ক্রিয়াশীল। এক্ষণে O বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বল P, Q ও W সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং ল্যামির সূত্র অনুযায়ী,

$$\frac{P}{\sin EOD} = \frac{Q}{\sin COE} = \frac{W}{\sin COD} \quad \cdots \quad \cdots(1)$$

এক্ষণে যেহেতু $m\angle BAD = 120°$, $\therefore$ $m\angle EAO = 60°$

$\therefore$ $m\angle AOE = 30°$. আবার $m\angle AOD = 90°$.

$\therefore$ $m\angle EOD = 120°$ এবং $m\angle COE = 150°$;

কারণ, $m\angle COE = m\angle COB + m\angle BOE = 90° + 60° = 150°$.

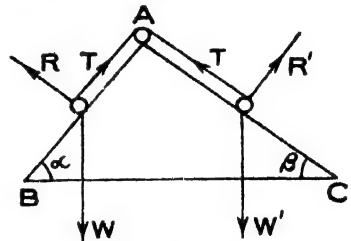
(1) হইতে পাই, $\dfrac{P}{\sin 120°} = \dfrac{Q}{\sin 150°}$, বা, $\dfrac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{Q}{\frac{1}{2}}$

বা, $P = \sqrt{3}Q$, বা, $P^2 = 3Q^2$.

উদা. 7. দুইটি কণা পিঠাপিঠি রক্ষিত দুইটি নততলে অবস্থিত। কণা দুইটি একটি দড়ি দিয়া আটকান আছে এবং দড়িটি তল দুইটির ছেদরেখার উপর একটি বিন্দুতে অবস্থিত একটি মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া গিয়াছে। প্রমাণ কর যে, কণা দুইটির ভার এই দুই নততলের দৈর্ঘ্যের অনুপাতে আছে।

মনে কর নততল দুইটি AB ও AC, উহাদের নতি যথাক্রমে α ও β এবং উহাদের উপর রক্ষিত কণাদ্বয়ের ভার W ও W'.

প্রত্যেক কণার উপর তিনটি বল ক্রিয়াশীল; (*a*) তাহার ভার, (*b*) দড়ির টান, (*c*) নততলের প্রতিক্রিয়া। এক্ষণে, ল্যামির উপপাদ্য হইতে পাই, প্রথম কণার সাম্যাবস্থার জন্য

চিত্র 27

$$\frac{W}{\sin 90°} = \frac{T}{\sin(180° - \alpha)} \quad \text{বা,} \quad W = \frac{T}{\sin \alpha} \cdots \quad (1)$$

এবং দ্বিতীয় কণার সাম্যাবস্থার জন্য

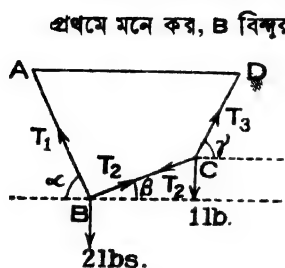
$$\frac{W'}{\sin 90°} = \frac{T}{\sin(180° - \beta)} \quad \text{বা,} \quad W' = \frac{T}{\sin \beta} \cdots\cdots(2)$$

(1) ও (2) হইতে পাই,

$$\frac{W}{W'} = \frac{\frac{T}{\sin \alpha}}{\frac{T}{\sin \beta}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{AB}{AC} \quad [\ \triangle ABC \text{ হইতে}\ ]$$

অতএব, কণা দুইটির ভার নততলদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অনুপাতে।

উদা. 8. একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত দুইটি বিন্দু A ও D-এ আবদ্ধ একটি দড়ির দৈর্ঘ্য AD দূরত্ব অপেক্ষা বৃহত্তর। 2 পাউণ্ড ও 1 পাউণ্ড ভরের দুইটি ভার দড়িটির দুইটি বিন্দু B ও C-এ আটকান হইল। AB, BC ও CD-র অনুভূমিক তলের সহিত নতি যথাক্রমে α, β ও γ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\tan\alpha = 2\tan\gamma \pm 3\tan\beta.$$

প্রথমে মনে কর, B বিন্দুর অবস্থান C বিন্দুর নীচে এবং দড়িটির AB, BC ও CD অংশ তিনটির টান যথাক্রমে T_1, T_2 ও T_3.

চিত্র 28

এক্ষণে, B বিন্দুতে আবদ্ধ কণাটি নিম্নলিখিত তিনটি বলের ক্রিয়ায় সাম্যাবস্থায় আছে, (i) $\overrightarrow{BA}$ বরাবর টান T_1 (ii) $\overrightarrow{BC}$ বরাবর টান T_2; এবং (iii) উল্লম্বরেখায় নিম্নাভিমুখীভার 2 পা.। সুতরাং ল্যামির উপপাদ্য হইতে পাই,

$$\frac{}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{2}{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)}, \quad \text{বা,} \quad \frac{T_2}{\cos\alpha} = \frac{}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore \quad T_2 = \frac{2\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \cdots\cdots(1)$$

অনুরূপে C বিন্দুতে আবদ্ধ কণাটির সাম্যাবস্থার জন্য পাই,

$$\frac{}{\sin(90^\circ+\gamma)} = \frac{1}{\sin(180^\circ-\gamma+\beta)}, \quad \text{বা,} \quad \frac{T_2}{\cos\gamma} = \frac{}{\sin(\gamma-\beta)}$$

$$T_2 = \frac{\cos\gamma}{\sin(\gamma-\beta)} \cdots\cdots(2)$$

সুতরাং (1) ও (2) হইতে পাই,

$$\frac{2\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\gamma}{\sin(\gamma-\beta)} \quad \text{বা,} \quad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} = \frac{2\sin(\gamma-\beta)}{\cos\gamma}$$

বা, $\tan\alpha\cos\beta + \sin\beta = 2\tan\gamma\cos\beta - 2\sin\beta$

বা, $\tan\alpha + \tan\beta = 2\tan\gamma - 2\tan\beta$

বা, $\tan\alpha = 2\tan\gamma - 3\tan\beta$.

আবার যদি C-বিন্দুর অবস্থান B বিন্দুর নীচে হয়, তবে অনুরূপে প্রমাণ করা যাইবে যে, $T_2 = \dfrac{2\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{\cos\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$,

বা, $\tan\alpha = 2\tan\gamma + 3\tan\beta$

সুতরাং $\tan\alpha = 2\tan\gamma \pm 3\tan\beta$.

উদা. 9. ABCD একটি চতুর্ভুজ। এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বলসমূহের মান ও দিক্ $2\overline{AB}$, $3\overline{BC}$, $2\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{DB}$ দ্বারা প্রকাশিত। দেখাও যে, বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে। [H. S. '66]

ABCD চতুর্ভুজের $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ ও $\vec{DA}$ বাহু এবং $\vec{CA}$ ও $\vec{DB}$ কর্ণদ্বয় বরাবর যথাক্রমে $2\overline{AB}$, $3\overline{BC}$, $2\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{DB}$ বলসমূহ ক্রিয়াশীল।

এক্ষণে, $2\overline{AB}+3\overline{BC}+2\overline{CD}+\overline{DA}+\overline{CA}+\overline{DB}$

$=(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA})+(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})+(\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DB})$ ···(1)

এক্ষণে, বলের বহুভুজ সূত্রানুসারে, $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=0$

এবং বলের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে, $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$

ও $\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DB}=0$

সুতরাং (1) হইতে পাই, $2\overline{AB}+3\overline{BC}+2\overline{CD}+\overline{DA}+\overline{CA}+\overline{DB}=0$; অর্থাৎ প্রদত্ত বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে।

উদা. 10. ABCDE একটি সুষম পঞ্চভুজ; প্রমাণ কর যে, সমবিন্দু $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ এবং $\overline{DE}$ বলসমূহের লব্ধিবল $4\overline{AE}$ ও $2\overline{BD}$ বল দুইটির লব্ধিবল। [C. U. 1939]

বলের বহুভুজ সূত্রানুসারে, $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{AE}$.

বলের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে, $\overline{AC}+\overline{CE}=\overline{AE}$,

$\overline{AD}+\overline{DE}=\overline{AE}$ এবং $\overline{BE}+\overline{ED}=\overline{BD}$.

$\therefore\ \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{BE}+\overline{ED}$
$=3\overline{AE}+\overline{BD}$.

এক্ষণে, $\overline{DE}$ ও $\overline{ED}$ বল দুইটি পরস্পরকে অপসারিত করে,

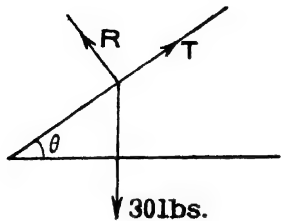
$\therefore\ \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{AD}+\overline{BE}=3\overline{AE}+\overline{BD}$

$\therefore\ \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{AE}+\overline{BD}$

$=3\overline{AE}+\overline{BD}+\overline{AE}+\overline{BD}$ (উভয়পক্ষে $\overline{AE}$ ও $\overline{BD}$ বল দুইটি সংযুক্ত করিয়া)

$=4\overline{AE}+2\overline{BD}$.

উদা. 11. 30 পা. ভারের একটি বস্তুকে অনুভূমিক তলের সহিত 15° নতিতে অবস্থিত একটি মসৃণ নততলে ঐ তলের একটি দড়ির দ্বারা সাম্যাবস্থায় রাখা হইয়াছে। দড়িটি 15 পা-এর অধিক ভার সহ্য করিতে পারে না। নত

তলটির অনুভূমিকতলের সহিত নতি ক্রমশঃ বৃদ্ধি করা হইলে, কখন দড়িটি ছিঁড়িয়া যাইবে নির্ণয় কর।

চিত্র 29

মনে কর, নততলের নতি যখন θ, তখন বস্তুটি সাম্যাবস্থায় আছে। এই সময় বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল বলসমূহ হইল (*i*) দড়ির টান T, (নততল বরাবর) (*ii*) বস্তুটির ভার 30 পা. (উল্লম্বরেখায় নিম্নাভিমুখী) ও (*iii*) নততলের প্রতিক্রিয়া R (নততলের লম্বাভিমুখে)। যেহেতু বলটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং ল্যামির উপপাদ্য হইতে পাই,

$$\frac{T}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{30 \text{ পা.}}{\sin 90^\circ}, \text{ বা, } \frac{T}{\sin\theta}=30 \text{ পা.}$$

$\therefore \quad \sin\theta=\frac{T}{30 \text{ পা.}}$; এখানে, T-র বৃহত্তম মান 15 পা.

$\therefore \quad \sin\theta$-র বৃহত্তম মান $\frac{1}{2}$ বা θ-র বৃহত্তম মান 30°.

যেহেতু $15^\circ < 30^\circ$, সুতরাং প্রারম্ভে বস্তুটির সাম্যাবস্থায় থাকা সম্ভব এবং নততলের নতি ক্রমশঃ বৃদ্ধি-প্রাপ্ত হইয়া যখন 30° হইবে, তখনও বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে। নততলের নতি আর সামান্য বৃদ্ধি পাইলেই দড়িটি ছিঁড়িয়া যাইবে।

প্রশ্নমালা 3B

1. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ; $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ এবং $\vec{CA}$ রেখায় ক্রিয়াশীল তিনটি বল X, Y, Z সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে, X : Y : Z = CD : CB : BD.

2. একটি ত্রিভুজ ABC-র পরিকেন্দ্র O. A, B ও C হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F. $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ ও $\vec{OC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q ও R সাম্যাবস্থায় থাকিলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{P}{EF}=\frac{Q}{FD}=\frac{R}{DE}.$$

3. প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ও বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তিনটি দ্বারা প্রকাশিত একটি কণায় ক্রিয়াশীল বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকে।

4. l দৈর্ঘ্যের একটি সরু সূতার দুইপ্রান্ত একই অনুভূমিক তলে c দূরত্বে স্থিত দুইটি বিন্দুতে আবদ্ধ। একটি মসৃণ ক্ষুদ্র ভারহীন আংটা দড়িতে সরিতে পারে এবং আংটা হইতে W ভার অবাধে ঝুলিতেছে। দেখাও যে দড়ির টান,

$$\frac{lW}{2\sqrt{l^2-c^2}}.$$

5. তিনটি ভারহীন দড়ি এরূপে পরস্পর আবদ্ধ যে একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC হইল। A বিন্দু হইতে একটি ভার W ঝোলান হইল। যদি BC-র সহিত 135° কোণে নত B ও C বিন্দুতে আবদ্ধ অন্য দুইটি দড়ি দ্বারা ত্রিভুজটি এবং ভারটি স্থিরাবস্থায় থাকে এবং BC অনুভূমিক থাকে, তবে দেখাও যে BC-র টান $\frac{W}{6}(3-\sqrt{3})$.

6. একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। যদি বলসমূহ পরস্পরের সহিত সমান কোণে নত থাকে, তবে দেখাও যে বলগুলির পরিমাপ সমান।

7. একটি মসৃণ নততলের অনুভূমিক তলের সহিত নতি α। ঐ তলের উপর একটি ভারকে উল্লম্বদিকের সহিত γ কোণে নত একটি দড়ির দ্বারা স্থিরাবস্থায় রাখা হইল। যদি নত তলের নতি বৃদ্ধি পাইয়া β হয় এবং দড়িটির উল্লম্বদিকের সহিত নতি অপরিবর্তিত থাকে, তবে ভারটি স্থিরাবস্থায় রাখিতে দড়িটির টান দ্বিগুণ হয়। প্রমাণ কর যে, $\cot\alpha-\cot\gamma=2\cot\beta$.

8. একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সহিত লম্বরেখায় তিনটি বল উহাদের সমতলে ত্রিভুজের অন্তঃস্থ একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিলে প্রমাণ কর যে, বলগুলি ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলির সহিত সমানুপাতী।

9. $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ একই সমতলে অবস্থিত তিনটি সমান দৈর্ঘ্যের রেখাংশ এবং O বিন্দুগামী কোন সরলরেখার একই পার্শ্বে রেখাংশগুলি অবস্থিত নয়, এই রেখাত্রয়ে ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q, R এরূপ যে,

$$\frac{P}{m\triangle OBC}=\frac{Q}{m\triangle OCA}=\frac{R}{m\triangle OAB}.$$

প্রমাণ কর যে, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

10. তিনটি নির্দিষ্ট রেখায় ক্রিয়াশীল O বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। যদি O বিন্দুগামী কোন বৃত্ত এই ক্রিয়ারেখা তিনটিকে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে বলগুলির পরিমাণ ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির সহিত সমানুপাতী।

11. 50 সে. মি. ও 120 সে. মি. দৈর্ঘ্যের দুইটি তারের একটি করিয়া প্রান্ত পরস্পরের সহিত O বিন্দুতে আবদ্ধ। O বিন্দু হইতে একটি 65 কেজি. ভার ঝোলান আছে। তার দুইটির অপর প্রান্ত দুইটি একই অনুভূমিক রেখায় 130 সে. মি. দূরত্বে দুইটি বিন্দুতে আঁটা আছে। তার দুইটির টান নির্ণয় কর।

12. একটি দড়ি ACB-র দুই প্রান্ত একই অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত A এবং B বিন্দু দুইটিতে আবদ্ধ ; দড়ির C বিন্দু হইতে W ভার ঝোলান আছে ; প্রমাণ কর যে, দড়ির CA অংশের টান, $\frac{Wb}{4c\Delta}(c^2+a^2-b^2)$.

13. l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি দড়ির দুই প্রান্ত একটি অনুভূমিকদণ্ডের $a(a<l)$ দূরত্বে A এবং B বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। ইহাতে W ভারের একটি আংটি গড়াইয়া চলিতে পারে এবং একটিঅনুভূমিক বল P প্রযুক্ত হওয়ায় ইহা B বিন্দুর সোজা নীচে স্থিরাবস্থায় থাকে। প্রমাণ কর যে $P=\frac{aW}{l}$

[H.S. (Com.) 1967]

14. O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে। একটি ভেদক উহাদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে (চিহ্ন সম্বন্ধে নির্দিষ্ট প্রথা অনুসরণ করিয়া)

$$\frac{P}{OA.BC}=\frac{Q}{OB.CA}=\frac{R}{OC.AB}.$$

15. অনুভূমিক তলের সহিত α-কোণে নত একটি মসৃণ নততলের উপর নততল বরাবর ক্রিয়াশীল একটি বল P_1 ও অপর একটি অনুভূমিক বল P_2 দ্বারা একটি বস্তুকে স্থিরাবস্থায় রাখা হইয়াছে। যদি নততলের নতি এবং P_1 ও P_2 বল দুইটির প্রত্যেকটিরই পরিমাপ অর্ধেক হ্রাস করিলেও বস্তুটি স্থিরাবস্থায় থাকে, তবে দেখাও যে, $P_1 : P_2=2\cos^2\frac{1}{2}\alpha : 1$.

16. একটি দড়ির দুইটি প্রান্ত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে আবদ্ধ এবং কয়েকটি সমান ওজনের বস্তু দড়িটির বিভিন্ন বিন্দুতে আটকান হইল। প্রমাণ কর যে, সাম্যাবস্থায় দড়িটির ক্রমান্বয়ে গৃহীত অংশসমূহের অনুভূমিক তলের সহিত নতিসমূহের ত্রিকোমিতিক ট্যানজেণ্ট একটি সমান্তর প্রগতি।

17. 6 ফুট এবং 8 ফুট দীর্ঘ দুইটি দড়িতে বাঁধিয়া একটি 80 পা. ভরের বস্তু ঝুলান হইয়াছে ; দড়ি দুইটির অপর প্রান্তদ্বয় 10 ফুট দীর্ঘ একটি দণ্ডের দুইপ্রান্তে সংযুক্ত হইয়াছে। যদি দণ্ডটি এরূপে রাখা হয় যে বস্তুটি দণ্ডের মধ্যবিন্দুর নীচে একই উল্লম্বরেখায় থাকে, তবে দড়ি দুইটির টান নির্ণয় কর।

[H. S. '69]

চতুর্থ অধ্যায়

সমান্তরাল বল (Parallel Forces)

§ 4·1. **সমান্তরাল বল :**—দুই বা ততোধিক বলের ক্রিয়ারেখা পরস্পর সমান্তরাল হইলে ঐ বলসমূহকে সমান্তরাল বল বলে। দুইটি সমান্তরাল বলের অভিমুখিতা একই হইলে উহাদিগকে **সদৃশ সমান্তরাল বল** (Like Parallel Forces) এবং উহাদের অভিমুখিতা পরস্পর বিপরীত হইলে উহাদিগকে **অসদৃশ সমান্তরাল বল** (Unlike Parallel Forces) বলে। পূর্ব অধ্যায়ের আলোচনায় আমরা সমবিন্দু বল সম্বন্ধে আলোচনা করিয়াছি। সমবিন্দু একাধিক বল একটি কণার উপর অথবা কোন দৃঢ় বস্তুর একটিমাত্র বিন্দুতে প্রযুক্ত হয়। দুই বা ততোধিক সমান্তরাল বল কোন কণার উপর প্রযুক্ত হইতে পারে না, কারণ সেক্ষেত্রে উহারা পরস্পরচ্ছেদী হয়।

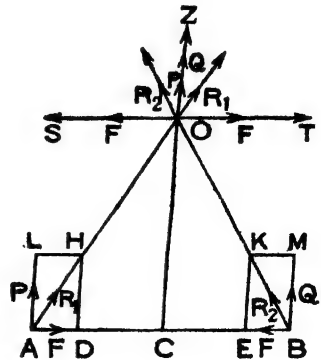
পরবর্তী অনুচ্ছেদ দুইটিতে আমরা কোন দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের এবং দুইটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় পদ্ধতি বর্ণনা করিব। দুইটি সমান অসদৃশ সমান্তরাল বলকে যুগ্মবল বলে। যুগ্মবলের সম্বন্ধে ষষ্ঠ অধ্যায়ে আলোচনা করা হইবে।

§ 4·2. **দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় :**

একটি দৃঢ় বস্তুর A ও B বিন্দুদ্বয়ে প্রযুক্ত দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q, উহাদের লব্ধিবল নির্ণয় করিতে হইবে।

A ও B যোগ কর। A ও B বিন্দুতে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BA}$ বরাবর দুইটি সমান বল F প্রয়োগ কর। যেহেতু সমান বল দুইটির ক্রিয়ারেখা অভিন্ন এবং উহাদের অভিমুখিতা পরস্পরের বিপরীত, সুতরাং উহারা পরস্পরকে অপসারিত করে ও ফলে P ও Q-এর লব্ধির কোন পরিবর্তন হইবে না।

[§ 1·4-এর স্বতঃসিদ্ধ দেখ]

মনে কর কোন পূর্বনির্ধারিত স্কেলে $\overline{AL}$ ও $\overline{AD}$ রেখাংশদ্বয় A বিন্দুতে প্রযুক্ত P ও F বলদ্বয়কে এবং $\overline{BM}$ ও $\overline{BE}$ রেখাংশদ্বয় B বিন্দুতে প্রযুক্ত Q ও F বলদ্বয়কে প্রকাশ করে।

চিত্র 30

ADHL ও BEKM সামান্তরিক দুইটি সম্পূর্ণ কর।

সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী $\overline{AH}$ ও $\overline{BK}$ রেখাংশ দুইটি যথাক্রমে A বিন্দুতে প্রযুক্ত P ও F বল দুইটির এবং B বিন্দুতে প্রযুক্ত Q ও F বল দুইটির লব্ধিবলকে প্রকাশ করিবে।

মনে কর, এই লব্ধি বল দুইটি যথাক্রমে R_1 ও R_2.

সুতরাং দৃঢ় বস্তুটির উপর প্রযুক্ত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধিবল, R_1 ও R_2 বলদ্বয়ের লব্ধিবল।

মনে কর $\overline{AH}$ ও $\overline{BK}$ রেখাদ্বয়কে বর্ধিত করিলে উহারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

O বিন্দুর ভিতর দিয়া $\overrightarrow{OC}$ রেখা P বা Q-এর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কন কর। মনে কর, $\overrightarrow{CO}$, $\overleftrightarrow{AB}$কে C বিন্দুতে ছেদ করে। এক্ষণে, R_1 ও R_2 বলদ্বয়ের প্রয়োগবিন্দু O বিন্দুতে স্থানান্তরিত কর (বলের সঞ্চালন নীতি অনুযায়ী) এবং $\overleftrightarrow{ST}$ রেখা O বিন্দুর মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{AB}$-র সমান্তরাল করিয়া অঙ্কন কর।

O বিন্দুতে প্রযুক্ত R_1 বলকে $\overrightarrow{AL}$ ও $\overrightarrow{AB}$-র সমান্তরাল দিকে $\overrightarrow{CO}$ রেখা বরাবর P এবং $\overrightarrow{OT}$ রেখা বরাবর F উপাংশ দুইটিতে বিশ্লেষিত কর। আবার O বিন্দুতে প্রযুক্ত R_2 বলকে $\overrightarrow{BM}$ ও $\overrightarrow{BA}$-র সমান্তরাল দিকে $\overrightarrow{CO}$ রেখা ও $\overrightarrow{OS}$ রেখা বরাবর যথাক্রমে Q ও F উপাংশ দুইটিতে বিশ্লেষিত কর।

O বিন্দুতে প্রযুক্ত F বলদ্বয় সমান ও বিপরীতমুখী হওয়ায় পরস্পরকে অপসারিত করে। সুতরাং O বিন্দুতে প্রযুক্ত R_1 ও R_2-এর স্থলে পাওয়া গেল O বিন্দুতে $\overrightarrow{CO}$ রেখা বরাবর P ও Q বলদ্বয় এবং ইহাদের ক্রিয়ারেখা ও অভিমুখিতা অভিন্ন। সুতরাং উহাদের লব্ধি O বিন্দুতে প্রযুক্ত $R=P+Q$ বল। এক্ষণে, এই লব্ধি বল $R=P+Q$-এর প্রয়োগবিন্দু O বিন্দু হইতে উহার ক্রিয়ারেখার C বিন্দুতে স্থানান্তরিত কর।

সুতরাং প্রদত্ত সদৃশ ও সমান্তরাল P ও Q বল দুইটির লব্ধি বল C বিন্দুতে প্রযুক্ত $R=P+Q$ বল এবং ইহার ক্রিয়ারেখা $\overrightarrow{CO}$ ও অভিমুখিতা P বা Q-এর সদৃশ।

এক্ষণে, C বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যাক।

ADH ও ACO ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।

সুতরাং $\frac{AD}{DH}=\frac{AC}{CO}$, $\quad\therefore\quad \frac{F}{P}=\frac{AC}{CO}$, বা, $P.AC=F.CO$ ......(1)

আবার, BEK ও BCO ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।

সুতরাং $\frac{BE}{EK}=\frac{BC}{CO}$, $\quad\therefore\quad \frac{F}{Q}=\frac{BC}{CO}$, বা, $Q.BC=F.CO$ ......(2)

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে পাই, $P.AC=Q.BC$

বা, $\frac{AC}{BC}=\frac{Q}{P}$: অর্থাৎ C বিন্দু AB-কে P ও Q বলের ব্যস্ত অনুপাতে বিভক্ত করে।

দ্রষ্টব্য 1. যেহেতু $\frac{AC}{BC}=\frac{Q}{P}$, সুতরাং লব্ধি বল বৃহত্তর বলের নিকটবর্তী।

2. $P=Q$ হইলে, C বিন্দু, AB রেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

3. যেহেতু, $\frac{AC}{BC}=\frac{Q}{P}$, $\quad\therefore\quad \frac{P}{BC}=\frac{Q}{AC}=\frac{P+Q}{BC+AC}=\frac{R}{AB}$,

এবং ইহাই কার্যকরী সূত্র।

এই সূত্রটিকে অপর বলদ্বয়ের দূরত্ব = অপর বলদ্বয়ের দূরত্ব

$=\frac{R}{\text{অপর বলদ্বয়ের দূরত্ব}}$, এই আকারে মনে রাখা যায়।

4. লব্ধি বলের পরিমাপ ও প্রয়োগ বিন্দু বল দুইটির পরিমাপ ও প্রয়োগ বিন্দুর উপর নির্ভরশীল এবং উহাদের দিকের উপর নির্ভর করে না।

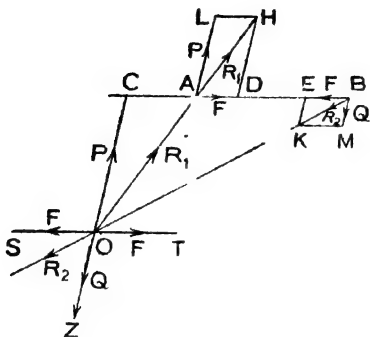
5. এই অনুচ্ছেদে যে সকল ক্ষেত্রে বলের সঞ্চালন নীতি প্রয়োগ করা হইয়াছে, সেই সকল ক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট প্রয়োগবিন্দু দুইটিকে দৃঢ় সংযুক্ত মনে করা হইয়াছে।

§ 4·3. দুইটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয়।

একটি দৃঢ় বস্তুর A ও B বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি অসদৃশ, অসমান, সমান্তরাল বল P ও Q ($P>Q$).

উহাদের লব্ধি বল নির্ণয় করিতে হইবে। A ও B যোগ কর। A ও B বিন্দুতে $\vec{AB}$ ও $\vec{BA}$ বরাবর দুইটি সমান বল F প্রয়োগ কর। যেহেতু সমান বল দুইটির ক্রিয়ারেখা অভিন্ন এবং উহাদের অভিমুখিতা পরস্পর বিপরীত, সুতরাং উহাদের প্রয়োগে বস্তুটির অবস্থানের কোন পরিবর্তন হইবে না।

মনে কর কোন পূর্ব নির্ধারিত স্কেলে AL ও $\overline{AD}$ রেখাংশদ্বয় A বিন্দুতে প্রযুক্ত P ও F বলদ্বয়কে এবং $\overline{BM}$ ও $\overline{BE}$ রেখাংশদ্বয় B বিন্দুতে প্রযুক্ত Q ও F বলদ্বয়কে

প্রকাশ করে। ADHL ও BEKM সামান্তরিক দুইটি সম্পূর্ণ কর। সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী $\overline{AH}$ ও $\overline{BK}$ রেখাংশ দুইটি যথাক্রমে A বিন্দুতে প্রযুক্ত P ও F বল দুইটির এবং B বিন্দুতে প্রযুক্ত Q ও F বল দুইটির লব্ধি বলকে প্রকাশ করিবে।

চিত্র 30

মনে কর এই লব্ধি বল দুইটি যথাক্রমে R_1 ও R_2. সুতরাং দৃঢ় বস্তুটির উপর প্রযুক্ত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি বল, R_1 ও R_2 বলদ্বয়ের লব্ধি বল।

মনে কর $\overline{HA}$ ও $\overline{BK}$ রেখাংশ-দ্বয়কে বর্ধিত করিলে উহারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দুর ভিতর দিয়া $\overrightarrow{OZ}$ রেখা P বা Q-এর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কন কর।

মনে কর, $\overrightarrow{ZO}$, $\overleftrightarrow{AB}$-কে C বিন্দুতে ছেদ করে। এখানে C বিন্দু AB রেখাংশের বাহিরে P বলের দিকে $\overleftrightarrow{AB}$কে ছেদ করে।

এক্ষণে, বলের সঞ্চালন নীতি অনুযায়ী R_1 ও R_2 বল দুইটির প্রয়োগবিন্দু উহাদের ক্রিয়ারেখাদ্বয়ের O বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা যায়। R_1 ও R_2 বলদ্বয়ের প্রয়োগ বিন্দু O বিন্দুতে স্থানান্তরিত কর এবং $\overleftrightarrow{ST}$ রেখা O বিন্দুর মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{AB}$-র সমান্তরাল করিয়া অঙ্কন কর।

O বিন্দুতে প্রযুক্ত R_1 বলকে $\overrightarrow{AL}$ ও $\overrightarrow{AB}$-র সমান্তরাল দিকে $\overrightarrow{OC}$ রেখা বরাবর P এবং $\overrightarrow{OT}$ রেখা বরাবর F উপাংশ দুইটিতে বিশ্লেষিত কর। আবার O বিন্দুতে প্রযুক্ত R_2 বলকে $\overrightarrow{BM}$ ও $\overrightarrow{BA}$-র সমান্তরাল দিকে $\overrightarrow{CO}$ রেখা ও $\overrightarrow{OS}$ রেখা বরাবর Q ও F উপাংশ দুইটিতে বিশ্লেষিত কর।

O বিন্দুতে প্রযুক্ত F বলদ্বয় সমান ও বিপরীতমুখী হওয়ায় পরস্পরকে অপসারিত করে। সুতরাং O বিন্দুতে প্রযুক্ত R_1 ও R_2-এর স্থলে পাওয়া গেল

O বিন্দুতে $\vec{OC}$ বরাবর P বল এবং $\vec{CO}$ রেখা বরাবর Q বল। একণে, এই দুই বল একই রেখায় পরস্পর বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়া করে। সুতরাং উহাদের লব্ধি বল P—Q ($\because$ P>Q). এই লব্ধি বলের অভিমুখিতা $\vec{OC}$-র দিকে।

এক্ষণে এই লব্ধি বল P−Q-এর প্রয়োগবিন্দু, O হইতে উহার ক্রিয়া-রেখার C বিন্দুতে স্থানান্তরিত কর।

সুতরাং প্রদত্ত অসদৃশ, অসমান ও সমান্তরাল P ও Q বল দুইটির লব্ধি বল C বিন্দুতে প্রযুক্ত P—Q বল এবং ইহার ক্রিয়ারেখা $\vec{OC}$ রেখা বরাবর ও অভিমুখিতা P বলের সদৃশ।

এইবার C বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যাক।

ADH ও ACO ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \quad \frac{AD}{DH}=\frac{AC}{OC}$ বা, $\frac{F}{P}=\frac{AC}{OC}$, বা, $P.AC=F.OC \cdots (1)$

আবার BEK ও BCO ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \quad \frac{BE}{EK}=\frac{BC}{OC}$, বা, $\frac{F}{Q}=\frac{BC}{OC}$, বা, $Q.BC=F.OC \cdots (2)$

সুতরাং (1) ও (2) হইতে পাই

$P.AC=Q.BC.$

সুতরাং C বিন্দু $\overline{AB}$-কে P ও Q-এর ব্যস্ত অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

দ্রষ্টব্য 1. স্পষ্টতঃ লব্ধি বল বৃহত্তর বলের নিকটবর্তী।

2. যেহেতু $\frac{AC}{BC}=\frac{Q}{P}$, $\therefore \quad \frac{P}{BC}=\frac{Q}{AC}=\frac{P-Q}{BC-AC}=\frac{R}{AB}$

এবং ইহাই কার্যকরী সূত্র। এই সূত্রটিকেও,

$\frac{P}{\text{অন্য দুইটির দূরত্ব}}=\frac{Q}{\text{অন্য দুইটির দূরত্ব}}=\frac{R}{\text{অন্য দুইটির দূরত্ব}}$ আকারে মনে রাখা যায়।

3. এই অনুচ্ছেদেও যে সকল ক্ষেত্রে বলের সঞ্চালননীতির প্রয়োগ করা হইয়াছে সেই সকল ক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট প্রয়োগবিন্দুদ্বয়কে দৃঢ়সংযুক্ত ধরা হইয়াছে।

4. P=Q হইলে $\overline{AH}$ ও $\overline{BK}$ কখনই মিলিত হইবে না। এখানে $P \neq Q$. P=Q হইলে বল দুইটি একটি যুগ্ম বল হইবে।

§ 4·4. দুইয়ের অধিক সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয়।

মনে কর, P, Q, R, S···ইত্যাদি সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি নির্ণয় করিতে হইবে। এক্ষণে দুইটি সম্ভাবনা থাকিতে পারে। যথা (i) বলসমূহ পরস্পর সদৃশ বা (ii) একদল বল সদৃশ এবং অপরদল এই প্রথম দলের বলসমূহের অসদৃশ কিন্তু পরস্পর সদৃশ।

এক্ষণে, (i) বলসমূহ পরস্পর সদৃশ হইলে প্রথমে P ও Q-এর লব্ধি $P+Q$ নির্ণয় কর। এইবার $P+Q$ ও R-এর লব্ধি $P+Q+R$, অতঃপর $P+Q+R$ ও S-এর লব্ধি $P+Q+R+S$ ইত্যাদি নির্ণয় কর। এই প্রকারে সব কয়টি বলের লব্ধি $F=P+Q+R+S+\cdots$ নির্ণয় করা যায়।

(ii) উপরের (i)-এ প্রদর্শিত পদ্ধতিতে দল দুইটির লব্ধি বল F_1 ও F_2 নির্ণয় কর। স্পষ্টতঃ F_1 ও F_2 দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল হইবে।

এক্ষণে, $F_1=F_2$ এবং উহাদের একই ক্রিয়ারেখা হইলে F_1 ও F_2 পরস্পরকে অপসারিত করিবে এবং বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকিবে। যদি $F_1=F_2$ হয়, উহাদের ক্রিয়ারেখা ভিন্ন হইলে বলসমূহের লব্ধি একটি যুগ্ম বল হইবে।

যদি $F_1 \neq F_2$ হয় এবং (ক) $F_1 > F_2$ হয়, তবে নির্ণেয় লব্ধি বল প্রথম দলের বলসমূহের সদৃশ একটি সমান্তরাল বল F_1-F_2 হইবে। (খ) $F_1 < F_2$ হইলে নির্ণেয় লব্ধি বল দ্বিতীয় দলের বলসমূহের সদৃশ একটি সমান্তরাল বল F_2-F_1 হইবে।

দ্রষ্টব্য : সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি বল থাকিলে, লব্ধি বলের পরিমাপ ও প্রয়োগ বিন্দুর অবস্থান উহাদের পরিমাপ ও প্রয়োগ বিন্দুর উপর নির্ভরশীল এবং দিকের উপর নির্ভর করে না।

উদা. 1. 14 কে. জি. ও 10 কে. জি. পরিমাপের দুইটি সমান্তরাল বল 36 সে. মি. দূরত্বের দুইটি বিন্দুতে প্রযুক্ত হইল। বল দুইটি (i) সদৃশ এবং (ii) অসদৃশ হইলে উহাদের লব্ধি বলের পরিমাপ এবং প্রয়োগ বিন্দু নির্ণয় কর।

(i) যেহেতু বল দুইটি সদৃশ ও সমান্তরাল, উহাদের লব্ধি বল $(14+10)$ বা 24 কে. জি. পরিমাপের একটি সদৃশ সমান্তরাল বল। লব্ধি বলটির প্রয়োগবিন্দু প্রদত্ত বল দুইটির প্রয়োগবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে $\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করিবে। সুতরাং লব্ধি বলের প্রয়োগবিন্দু 14 কে. জি. বলটি হইতে $\frac{5}{5+7}\times 36$ সে.মি. $=15$ সে.মি. দূরে অবস্থিত হইবে।

(ii) মনে কর 14 কে.জি ও 10 কে.জি বল দুইটির প্রয়োগবিন্দু যথাক্রমে A ও B. যেহেতু বল দুইটি অসদৃশ ও সমান্তরাল, উহাদের লব্ধি বলের পরিমাপ (14−10) বা 4 কে.জি. এবং ইহা 14 কে.জি বলটির সদৃশ।

মনে কর লব্ধি বলের প্রয়োগবিন্দু C.

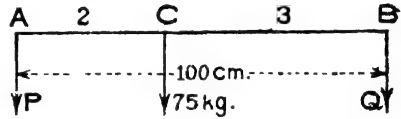
∴ C বিন্দুতে $\overline{AB}$ রেখাংশ 10 : 14 বা 5 : 7 অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়।

অর্থাৎ $\frac{AC}{BC}=\frac{5}{7}$, বা, $\frac{AC}{AB+AC}=\frac{5}{7}$ বা, $7AC=5(AB+AC)$

বা, $2AC=5AB$, বা, $AC=\frac{5\times 36 \text{ সে. মি.}}{2}=90$ সে. মি.

সুতরাং লব্ধি বলের প্রয়োগবিন্দু A বিন্দু হইতে 90 সে. মি. দূরে এবং B বিন্দু হইতে (90+36) বা 126 সে.মি. দূরে অবস্থিত।

উদা. 2. একটি 100 সে. মি. দণ্ডের প্রান্তদ্বয়ে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল প্রযুক্ত হইল। বল দুইটির লব্ধি বলের পরিমাপ 75 কে. জি. এবং উহার প্রয়োগবিন্দু দণ্ডটিকে 2 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করে। বল দুইটির পরিমাপ নির্ণয় কর।

মনে কর বল দুইটি P ও Q এবং উহারা যথাক্রমে A ও B প্রান্তে প্রযুক্ত। বল দুইটির লব্ধিবল $P+Q=75$ কে.জি.……(1),

চিত্র 31

আবার $\frac{AC}{BC}=\frac{Q}{P}$; সুতরাং প্রশ্নানুসারে $\frac{Q}{P}=\frac{2}{3}$.

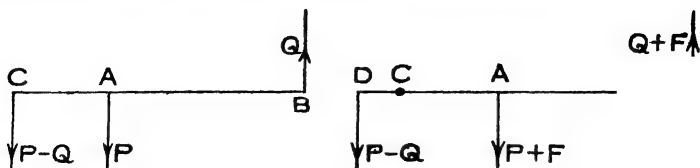
∴ $3Q=2P$…(2).

সমীকরণ (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $P=45$ কে. জি. ও $Q=30$ কে. জি.।

অতএব, নির্ণেয় বল দুইটির পরিমাপ 45 কে. জি ও 30 কে. জি.।

উদা. 3. দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q $(P>Q)$-এর পরিমাপের F বৃদ্ধি হইল। দেখাও যে উহাদের লব্ধি বলের পরিমাপ অপরিবর্তিত থাকিবে, কিন্তু লব্ধি বলের প্রয়োগবিন্দু P হইতে আরও দূরবর্তী হইবে।

বল দুইটির পরিমাপের F বৃদ্ধি হওয়ার ফলে উহাদের পরিমাপ হইল $P+F$ ও $Q+F$. সুতরাং উহাদের লব্ধি বলের পরিমাপ হইবে, $(P+F)-(Q+F)$ $=P-Q=P$ ও Q বলের লব্ধি বল। সুতরাং লব্ধি বলের পরিমাপ অপরিবর্তিত থাকে।

এইবার মনে কর প্রথমে P ও Q বলের লব্ধিবল C বিন্দুতে এবং উহাদের পরিমাপের F বৃদ্ধি হওয়ার পর লব্ধি বল D বিন্দুতে প্রযুক্ত হয়।

চিত্র 32

$\therefore \quad \frac{AC}{BC}=\frac{Q}{P}\cdots(1)$ ও $\frac{AD}{BD}=\frac{Q+F}{P+F}$

(1) হইতে পাই, $P.AC=Q.BC=Q(BA+AC)$

$\therefore \quad (P-Q).AC=Q.BA\cdots(3)$

আবার (2) হইতে পাই,

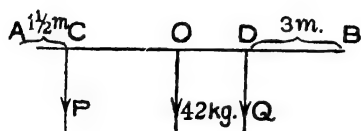
$(P+F).AD=(Q+F).BD=(Q+F)(BA+AD)$

বা, $(P-Q).AD=(Q+F).BA\cdots(4)$

$\therefore$ সমীকরণ (4)কে সমীকরণ (3) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$\frac{AD}{AC}=\frac{Q+F}{Q}>1, \quad \therefore \quad AD>AC.$

সুতরাং লব্ধি বলের প্রয়োগবিন্দু P হইতে আরও দূরে সরিয়া যায়।

উদা. 4. দুই ব্যক্তি 10 মিটার দীর্ঘ 42 কে. জি. ভারের একটি সমদণ্ড বহন করে। এক ব্যক্তি একপ্রান্ত হইতে $1\frac{1}{2}$ মিটার দূরে এবং অপর ব্যক্তি অপর প্রান্ত হইতে 3 মিটার দূরে দণ্ডটি বহন করিতেছিল। প্রত্যেক ব্যক্তি কত ভার বহন করিতেছিল?

চিত্র 33

মনে কর দণ্ডটি হইল AB.

যেহেতু দণ্ডটি সমদণ্ড, সুতরাং উহার ভার 42 কে. জি. উহার মধ্যবিন্দু O-এ প্রযুক্ত।

মনে কর, $AC=1\frac{1}{2}$মি. ও $BD=3$মি. এবং C বিন্দুতে এক ব্যক্তি P ভার এবং D বিন্দুতে অপর ব্যক্তি Q ভার বহন করিতেছিল।

$\therefore \quad P+Q=42$ কে. জি.$\cdots(1)$ এবং $P.CO=Q.DO\cdots(2)$

এক্ষণে, $AO=5$মি. $\therefore \quad CO=5$মি.$-1\frac{1}{2}$ মি.$=3\frac{1}{2}$ মি.

এবং $DO=5$মি.-3মি.$=2$মি.

$\therefore \quad P.3\frac{1}{2}=Q.2,$ বা, $\frac{P}{Q}=\frac{4}{7}\cdots(3)$

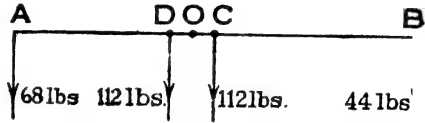
সমীকরণ (1) ও (3) সমাধান করিয়া পাই,

$P = 15\frac{3}{11}$ কে.জি. ও $Q = 26\frac{8}{11}$ কে.জি.

সুতরাং ঐ দুই ব্যক্তি $15\frac{3}{11}$ কে.জি. ও $26\frac{8}{11}$ কে.জি. করিয়া ভার বহন করিতেছিল।

উদা. 5. একটি ঢেকির সমভারবিশিষ্ট তক্তার দৈর্ঘ্য 16 ফুট এবং ভার 1 হন্দর (=112 পাউণ্ড). 44 পাউণ্ড ও 68 পাউণ্ড ওজনের দুইটি শিশু তক্তাটির দুইপ্রান্তে বসিলে তক্তাটির কোন্‌স্থানে আলম্ব (support) স্থাপন করিলে তক্তাটি সুস্থিত থাকিবে ? [P. U. 1945]

মনে কর তক্তাটি হইল AB এবং উহার দৈর্ঘ্য 16 ফুট, ওজন 1 হন্দর =112 পা. ; মনে কর C, AB-র মধ্যবিন্দু।

অতএব, তক্তাটির ওজন 112 পা. C বিন্দুতে প্রযুক্ত হইবে। আরও মনে কর যে A ও B প্রান্তে যথাক্রমে 68 পা. ও 44 পা. ওজনের শিশু দুইটি বসিয়াছে। সুতরাং তক্তাটির উপর তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল A বিন্দুতে 68 পা., B বিন্দুতে 44 পা. ও C বিন্দুতে 112 পা. প্রযুক্ত হইয়াছে। এই তিনটি সমান্তরাল বলের লব্ধি বল যে বিন্দুতে প্রযুক্ত হয়, সেই বিন্দুতেই আলম্ব স্থাপন করিতে হইবে।

A D O C B
68 lbs 112 lbs. 112 lbs. 44 lbs

চিত্র 34

এক্ষণে, মনে কর 68 পা. ও 44 পা. বল দুইটির লব্ধি বল (68+44) পা. =112 পা. বল D বিন্দুতে প্রযুক্ত।

$$\therefore \quad \frac{AD}{BD} = \frac{44}{68} = \frac{11}{17}, \text{ বা, } \frac{BD}{AD} = \frac{17}{11}, \text{ বা, } \frac{BD}{AD} + 1 = \frac{17}{11} + 1, \text{ বা, } \frac{AB}{AD} = \frac{28}{11}$$

$$\therefore AD = \frac{11}{28} \times AB = \frac{11}{28} \times 16 \text{ ফুট} = 6\frac{2}{7} \text{ ফুট।}$$

$$\therefore \quad CD = (8 - 6\tfrac{2}{7}) \text{ ফু.} = \tfrac{12}{7} \text{ ফুট।}$$

এক্ষণে, D বিন্দুতে 112 পা. বল ও C বিন্দুতে 112 পা. বলের লব্ধি বল 224 পা. CD-র মধ্যবিন্দু O বিন্দুতে প্রযুক্ত হইবে।

∴ O বিন্দুতে তক্তাটিকে রক্ষিত করিতে হইবে।

এখন, $OD = \frac{12}{7}$ ফু. $\div 2 = \frac{6}{7}$ ফু.।

$\therefore AO = AD + DO = (6\frac{2}{7} + \frac{6}{7})$ ফু. বা $7\frac{1}{7}$ ফু.।

সুতরাং তক্তাটিকে 68 পা. ওজনের শিশুটি যে প্রান্তে অবস্থিত, তাহা হইতে $7\frac{1}{7}$ ফু. দূরে রক্ষিত করিলে অর্থাৎ ঐ বিন্দুতে আলম্ব স্থাপন করিলে উহা সুস্থিত থাকিবে।

উদা. 6. এক ব্যক্তি 4 মিটার লম্বা একটি লাঠির প্রান্তে 24 কে.জি.-ভার বহন করিতেছে; লাঠির অপর প্রান্ত সে হাত দিয়া চাপিয়া রাখিয়াছে। (i) বোঝাটি কাঁধের পিছনে 1 মিটার দূরে থাকিলে কাঁধে কত চাপ পড়ে? (ii) বোঝাটি কাঁধের পিছনে $1\frac{1}{2}$ মিটার দূরে থাকিলে কাঁধে কত চাপ পড়ে?

(i) মনে কর ঐ ব্যক্তি নীচের দিকে হাত দিয়া P চাপ প্রয়োগ করে এবং তাহার কাঁধের উপর চাপ পড়ে Q পরিমাণ।

$\therefore \quad P+24=Q \cdots(1)$ এবং $\frac{P}{1}=\frac{Q}{4}$, বা, $Q=4P \cdots(2)$

$\therefore \quad (1)$ হইতে পাই $P+24=4P$, বা, $3P=24$,

$\therefore \quad P=8$ কে.জি.। $\therefore \quad Q=32$ কে.জি.।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মনে কর হাতের চাপ ও কাঁধের উপর চাপ যথাক্রমে P_1 ও Q_1.

$\therefore \quad P_1+24=Q_1$ এবং $P_1.4=Q_1\times 1{\cdot}5$, বা, $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{3}{8}$

$\therefore \quad P_1+24=\frac{8}{3}P_1$, $\therefore \quad \frac{5}{3}P_1=24$, বা, $P_1=\frac{72}{5}$ কে.জি.

$\therefore \quad Q_1=\frac{8}{3}P_1=\frac{72}{5}\times\frac{8}{3}=\frac{192}{5}$ কে.জি. $=38\frac{2}{5}$ কে.জি.।

উদা. 7. 8 ফুট দীর্ঘ একটি সরল ভারহীন দণ্ডের দুইপ্রান্ত দণ্ডের একই অনুভূমিক রেখায় দুইটি কীলক P এবং Q-এর উপর অবস্থিত; দণ্ডের R বিন্দুতে একটি ভারী বস্তু বাঁধা আছে। যদি $PR=3RQ$ হয় এবং P অপেক্ষা Q বিন্দুতে 325 পাউণ্ড বেশি ভার পড়ে, তবে বস্তুটির ভার নির্ণয় কর।

[C. U. 1941]

মনে কর বস্তুটির ভার W এবং P ও Q বিন্দুতে যথাক্রমে W_1 ও W_1+325 পাউণ্ড ভার পড়ে।

$\therefore \quad W=W_1+W_1+325=(2W_1+325)$ পা.,

এবং $W_1.PR=(W_1+325).QR$, বা, $W_1.3QR=(W_1+325).QR$

$\therefore \quad 3W_1=W_1+325 \quad \therefore \quad 2W_1=325$ পা.।

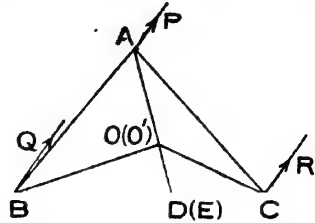
সুতরাং $W=2W_1+325=325+325=650$ পা.।

$\therefore$ বস্তুটির ভার 650 পাউণ্ড।

উদা. 8. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R যথাক্রমে একটি ত্রিভুজ ABC-র কৌণিক বিন্দুত্রয় A, B ও C-এ প্রযুক্ত। P, Q, R যে কোন দিকেই প্রযুক্ত হউক না কেন, যদি উহাদের লব্ধি বল সর্বদা ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র দিয়া যায়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{P}{\sin 2A}=\frac{Q}{\sin 2B}=\frac{R}{\sin 2C}.$$

চিত্র 35

মনে কর O, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, এবং AO যোগ করিয়া বর্ধিত করিলে, বর্ধিত $\overrightarrow{AO}$, BCকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

এক্ষণে B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে প্রযুক্ত বল Q ও R-এর লব্ধি বল Q+R, BC-র এরূপ একটি বিন্দু E-এ প্রযুক্ত যে, Q. BE=R. CE···(i)

আবার A ও E বিন্দুতে যথাক্রমে প্রযুক্ত P ও Q+R বলদ্বয়ের লব্ধি বলের প্রয়োগবিন্দু $\overline{AE}$-র একটি বিন্দু O′ এবং P. AO′=Q.BO′···(ii)

এক্ষণে যেহেতু P, Q, R-এর লব্ধি বল O বিন্দুগামী, সুতরাং এই লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা $\overleftrightarrow{OO'}$। আবার লব্ধি বল P, Q, R এর সমান্তরাল।

সুতরাং P, Q, R যে দিকেই প্রযুক্ত হউক না কেন উহার লব্ধি বল $\overleftrightarrow{OO'}$ রেখায় ক্রিয়া করিবে; কিন্তু ইহা সম্ভব হয় যদি কেবলমাত্র O এবং O′ একই বিন্দু হয়। ∴ O এবং O′ পরস্পর সমাপতিত হইবে। সুতরাং D ও E বিন্দুদ্বয় সমাপতিত হইবে।

∴ (i) হইতে পাই, $\frac{Q}{R}=\frac{DC}{BD}=\frac{\frac{DC}{OD}}{\frac{BD}{OD}}=\frac{\frac{\sin COD}{\sin OCD}}{\frac{\sin BOD}{\sin OBD}}$ [△COD ও △BOD হইতে]

এখানে O বিন্দু ∠ABC-র পরিকেন্দ্র হওয়ায় OB=OC.

$\therefore\ m\angle OBD=m\angle OCD.$

$\therefore\ \sin OCD=\sin OBD.$

$$\therefore\ \frac{Q}{R}=\frac{\sin COD}{\sin BOD}=\frac{\sin(180°-m\angle AOC)}{\sin(180°-m\angle AOB)}=\frac{\sin \angle AOC}{\sin \angle AOB}.$$

আবার $m\angle AOC=2m\angle B$, $m\angle AOB=2m\angle C$, কারণ, একই চাপের উপর কেন্দ্রস্থ কোণ, পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।

অতএব, $\frac{Q}{\sin 2B}=\frac{R}{\sin 2C}$. অনুরূপে প্রমাণ করা যায়

$\therefore \quad \frac{P}{\sin 2A}=\frac{Q}{\sin 2B}$. $\qquad \therefore \quad \frac{P}{\sin 2A}=\frac{Q}{\sin 2B}=\frac{R}{\sin 2C}$.

উদা. 9. যদি একটি দৃঢ় বস্তুর উপর A ও B বিন্দুতে প্রযুক্ত সমান্তরাল বল P ও Q-এর প্রয়োগবিন্দুদ্বয় পারস্পরিক পরিবর্তিত হইলে লব্ধি বলের $\overline{AB}$ বরাবর সরণ d হয়, তবে

$$d=\frac{P-Q}{P+Q}.AB \ (P>Q)$$ [C. U. 1954]

(চিত্র নিজে আঁক)

মনে কর প্রথমে লব্ধি বলের প্রয়োগবিন্দু C.

$\therefore \quad \frac{P}{BC}=\frac{Q}{AC}$, বা, $\frac{Q}{P}=\frac{AC}{BC}$, বা, $\frac{Q}{P}+1=\frac{AC}{BC}+1$

বা, $\frac{P+Q}{P}=\frac{AB}{BC}$, $\therefore \quad BC=\frac{P}{P+Q}.AB.$

এইবার মনে কর P ও Q-এর প্রয়োগবিন্দু যথাক্রমে B ও A হইলে লব্ধি বলের প্রয়োগবিন্দু D.

$\therefore \quad \frac{P}{AD}=\frac{Q}{BD}$, বা, $\frac{P}{Q}=\frac{AD}{BD}$, বা, $\frac{P}{Q}+1=\frac{AD}{BD}+1$,.

বা, $\frac{P+Q}{Q}=\frac{AB}{BD}$, $\therefore \quad BD=\frac{Q}{P+Q}.AB.$

এখন যেহেতু $P>Q$, $\therefore$ $BC>BD$. সুতরাং লব্ধিবলের সরণ

$d=BC-BD=\frac{P}{P+Q}.AB-\frac{Q}{P+Q}.AB.=\frac{P-Q}{P+Q}.AB.$

প্রশ্নমালা 4

1. নীচের প্রত্যেকটি ক্ষেত্রে প্রদত্ত দূরত্বে অবস্থিত সদৃশ সমান্তরাল বলযুগলের লব্ধি বলের পরিমাপ ও তাহার প্রয়োগবিন্দুর অবস্থান নির্ণয় কর :

(i) পরিমাপ : 4 কে. জি. ও 6 কে. জি ; দূরত্ব 30 সে. মি. ।

(ii) পরিমাপ : 600 গ্রাম ও 200 গ্রাম ; দূরত্ব 80 সে. মি. ।

(iii) পরিমাপ : 3 পাউণ্ড ও 11 পাউণ্ড ; দূরত্ব 56 ইঞ্চি ।

2. নীচের প্রত্যেকটি ক্ষেত্রে প্রদত্ত দূরত্বে অবস্থিত অসদৃশ সমান্তরাল বলযুগলের লব্ধি বলের পরিমাপ ও প্রয়োগবিন্দুর অবস্থান নির্ণয় কর :

(i) $7\frac{1}{2}$ কে. জি. ও $1\frac{1}{2}$ কে. জি. ; দূরত্ব 96 সে. মি.।

(ii) 4 কে. জি. ও 16 কে. জি. ; দূরত্ব 90 সে. মি.।

(iii) 1000 পাউণ্ড ও 800 পাউণ্ড ; দূরত্ব 450 ফুট।

3. (*a*) 6 মিটার লম্বা একটি দণ্ডের এক প্রান্তে ও মধ্যবিন্দুতে যথাক্রমে 8 কে. জি. ও 16 কে. জি. পরিমাপের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করিতেছে। দণ্ডটির কোন্ বিন্দুতে কি পরিমাণ বল প্রয়োগ করিলে দণ্ডটি সুস্থিত (balanced) থাকিবে ?

(*b*) উপরের উদাহরণে বল দুইটি অসদৃশ হইলে দণ্ডটির কোন্ বিন্দুতে কি পরিমাপের বল প্রয়োগ করিয়া দণ্ডটিকে সুস্থিত করা যাইবে ?

4. দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বলের পরিমাপের অনুপাত 4 : 5 এবং তাহাদের দূরত্ব 18 সে. মি.। লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর।

5. দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বলের ক্ষুদ্রতরটির ও লব্ধি বলের পরিমাপ যথাক্রমে 12 ও 8 ডাইন। লব্ধি বলটির ক্রিয়ারেখা ক্ষুদ্রতর বলটির ক্রিয়ারেখা হইতে 18 সে. মি. দূরে অবস্থিত হইলে, বৃহত্তর বলটির পরিমাপ ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর।

6. এক ব্যক্তি স্কন্ধের উপর একটি ভারহীন-দণ্ড রাখিয়া দণ্ডটির প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ে দুইটি ভার ঝুলাইয়া বহন করিতেছে। যদি একটি ভার অপরটির অর্ধেক হয় এবং দণ্ডটির দৈর্ঘ্য 39 সে. মি. হয়, তবে দণ্ডটির কোন্ বিন্দুতে দণ্ডটিকে স্কন্ধে আলম্বিত করিতে হইবে ?

7. এক ব্যক্তি তাহার স্কন্ধে স্থাপিত একটি দণ্ডের প্রান্তে একটি ভার বহন করিতেছে। দণ্ডটি অনুভূমিক রেখায় এবং তাহার হাত ও ভারের দূরত্ব অপরিবর্তিত থাকিলে, স্কন্ধের অবস্থানের পরিবর্তনের ফলে তাহার স্কন্ধের উপর চাপের পরিবর্তন কিরূপ হইবে ?

8. 24 কে. জি. ভারের একটি 2·5 মিটার দৈর্ঘ্যের সমদণ্ড 0·25 মিটার বাহিরে রাখিয়া একটি টেবিলে স্থাপন করা হইল। দণ্ডটিকে সুস্থিত রাখিয়া দণ্ডটির বাহিরের প্রান্তে বৃহত্তম কি পরিমাণ ভার ঝুলান যাইবে ?

9. P এবং Q পরিমাপের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বলের প্রয়োগবিন্দু দুইটির দূরত্ব 3 মিটার এবং তাহাদের লব্ধি বল 5 কে. জি.। লব্ধি বলের প্রয়োগবিন্দু বৃহত্তর বল P হইতে 2 মিটার দূরে অবস্থিত হইলে, P ও Q-এর মান নির্ণয় কর।

10. একই অনুভূমিক রেখায় 2 মিটার দূরে অবস্থিত দুইটি কীলকের উপর একটি ভারী সমদণ্ড রাখা হইল। কীলক দুইটির উপর চাপের অনুপাত 1 : 2 হইলে, দণ্ডটির মধ্যবিন্দু হইতে কীলক দুইটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

11. একটি 6 ফুট দীর্ঘ ভারহীন দণ্ডে ঝুলাইয়া দুই ব্যক্তিকে একটি 300 পাউণ্ড ভারের প্রস্তর সরাইতে হইবে। ঐ দুই ব্যক্তির একজন অপেক্ষা অপরজন বলশালী। দুর্বল ব্যক্তি 100 পাউণ্ডের বেশী ভার বহন করিতে পারে না। পাথরটিকে দণ্ডটির কোন্ বিন্দুতে ঝুলাইলে দুর্বল ব্যক্তি তাহার পক্ষে সম্ভব সর্বাপেক্ষা বেশী ভার বহন করিতে পারে? [B. E. Allahabad]

12. একটি 10 মিটার দীর্ঘ ভারহীন অনুভূমিক তক্তার এক প্রান্ত হইতে 1 মিটার দূরে একটি বিন্দুতে একটি 50 কে. জি. ভার স্থাপন করিয়া তক্তাটিকে দুই প্রান্তে আলম্বিত করা হইল। যদি ভারটিকে এইবার তক্তাটির মধ্যবিন্দুতে স্থাপন করা হয়, তবে প্রত্যেক আলম্বের উপর চাপের পরিবর্তন নির্ণয় কর।

13. একটি বস্তুর উপর দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P এবং Q প্রযুক্ত হইল। দেখাও যে Qকে $\frac{P^2}{Q}$-এ পরিবর্তিত করিলে অথবা P এবং Q-এর প্রয়োগবিন্দুর পারস্পরিক পরিবর্তন করিলে লব্ধি বল দুইটির একই ক্রিয়ারেখা হইবে।

14. একটি দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q-এর প্রয়োগবিন্দুদ্বয়ের পারস্পরিক পরিবর্তন করিলে যদি বল দুইটির লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা অপরিবর্তিত থাকে, তবে দেখাও যে, $P = Q$.

15. এক মিটার দূরত্বে অবস্থিত দুইটি কীলকের উপর 4 মিটার দীর্ঘ একটি ভারী সমদণ্ডকে অনুভূমিকভাবে স্থাপন করা হইল। দণ্ডটির প্রান্ত দুইটি হইতে ক্রমান্বয়ে 10 কে. জি. এবং 4 কে. জি. ভার ঝুলাইলে দণ্ডটির উল্টাইয়া পড়িবার উপক্রম হয়। দণ্ডটির ভার এবং উহার কেন্দ্র হইতে কীলক দুইটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

16. প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল বলের (যুগ্ম বল নয়) সমতলে অবস্থিত যে-কোন সরলরেখার দিকে বল দুইটির বিশ্লেষিতাংশদ্বয়ের বীজগাণিতিক যোগফল একই দিকে উহাদের লব্ধি বলের বিশ্লেষিতাংশের সমান।

17. তিনটি সমান সদৃশ সমান্তরাল বল একটি ত্রিভুজের (i) শীর্ষবিন্দুত্রয়ে অথবা (ii) বাহু তিনটির মধ্যবিন্দুত্রয়ে ক্রিয়া করিলে দেখাও যে উভয়ক্ষেত্রে লব্ধি বলের ক্রিয়া রেখা ত্রিভুজটির ভর কেন্দ্রগামী হয়।

18. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ে প্রযুক্ত তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বলের ক্রিয়ারেখার সকল দিকের জন্যই যদি বল তিনটির লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রগামী হয়, তবে দেখাও যে বল তিনটি সমান।

19. দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q-এর লব্ধি বল R, দেখাও যে যদি P ও Q সদৃশ সমান্তরাল থাকে কিন্তু P-র প্রয়োগ বিন্দুর সরণ d হয়, তবে R-এর সরণ হয় $\frac{Pd}{P+Q}$.

20. দুইটি বিন্দু A ও B-এ প্রযুক্ত সদৃশ সমান্তরাল বলযুগল (i) P ও Q, (ii) P+R ও Q+S এবং (iii) Q ও R-এর লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা প্রত্যেক ক্ষেত্রে AB-র একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{(Q-R)^2}{P-Q}=R-S.$$

21. দুইটি সমান্তরাল বল P ও Q-এর লব্ধি বলের প্রয়োগ বিন্দু C যখন বল দুইটি সদৃশ এবং D যখন বল দুইটি অসদৃশ। প্রমাণ কর যে C ও D বিন্দুতে এই দুইটি লব্ধি বলের সমান দুইটি সদৃশ অথবা অসদৃশ বল প্রযুক্ত হইলে উহাদের লব্ধি বলের প্রয়োগ বিন্দু হইবে যথাক্রমে A ও B বিন্দু।

22. একটি ত্রিভুজ ABCর শীর্ষ A, B ও C. এই তিনটি শীর্ষ বিন্দুতে K.BC, K.CA ও K.AB পরিমাপের তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল প্রযুক্ত হইল। প্রমাণ কর যে বল তিনটির লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র দিয়া যায়।

23. ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ O একটি বিন্দু। A, B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে K.$m\triangle$BOC, K.$m\triangle$COA, K.$m\triangle$AOB পরিমাপের তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল প্রযুক্ত হইল। প্রমাণ কর যে, বল তিনটির লব্ধি বল O-বিন্দুগামী।

24. 8 মিটার দীর্ঘ একটি ভারী সমদণ্ডকে অনুভূমিক অবস্থানে 6 মিটার দূরত্বে অবস্থিত দুইটি কীলকের উপর স্থাপন করা হইল। দণ্ডটির একটি প্রান্ত একটি কীলকের উপর থাকিলে, দেখাও যে একটি কীলকের উপর চাপ অপরটির উপর চাপের দ্বিগুণ।

25. AB রেখাংশের উপর A ও B বিন্দুর মধ্যে অবস্থিত O একটি বিন্দু। দুইটি সদৃশ ও সমান্তরাল বল P ও Q যথাক্রমে AO ও BOর মধ্যবিন্দুদ্বয়ে ক্রিয়া করে এবং উহাদের লব্ধি O বিন্দুগামী। প্রমাণ কর যে, P ও Q এর প্রয়োগবিন্দুদ্বয়ের পারস্পরিক পরিবর্তন করা হইলে, লব্ধি বলটি ABর মধ্যবিন্দু দিয়া যাইবে। [H. S.]

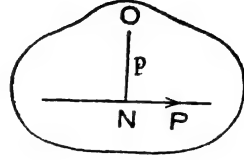
26. P ও Q (P>Q) দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল এবং উহার লব্ধি বল R. P-র পরিমাপ কতটা কমাইলে, লব্ধি বল ও P-র ক্রিয়ারেখার দূরত্ব R ও Q-এর ক্রিয়ারেখার দূরত্বের সমান হইবে?

পঞ্চম অধ্যায়

ভ্রামক (Moment)

§ 5·1. কোন বিন্দুর চারিদিকে কোন বলের **ভ্রামক** ঐ বলের পরিমাপ ও ঐ বিন্দু হইতে বলের ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্বের গুণফল।

O বিন্দু হইতে P বলের ক্রিয়ারেখার উপর ON লম্ব। ON $=p$ হইলে O বিন্দুর চারিদিকে P বলের ভ্রামক $=P.ON=P.p$.

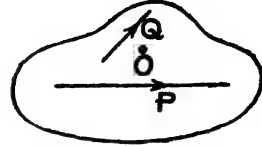
যেহেতু ভ্রামক দুইটি উৎপাদকের গুণফল, সুতরাং উৎপাদক দুইটির যে কোন একটি শূন্য হইলেই ভ্রামক শূন্য হইবে। সুতরাং লম্ব দূরত্ব p শূন্য হইলে অর্থাৎ বলটি O বিন্দুগামী হইলে ভ্রামক শূন্য হইবে। অতএব কোন বিন্দুর চারিদিকে কোন বলের ভ্রামক শূন্য হইলে বলটির ক্রিয়ারেখা ঐ বিন্দুগামী হইবে এবং বিপরীতক্রমে, ক্রিয়ারেখার উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর চারিদিকে বলের ভ্রামক শূন্য হয়।

চিত্র 36

যেহেতু ভ্রামক, বল এবং লম্ব দূরত্বের গুণফল, সুতরাং ভ্রামকের একক বলের একক × দৈর্ঘ্যের একক। সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে ভ্রামকের একক গ্রাম ভার × সেন্টিমিটার। এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে এই একক পাউণ্ড ভার × ফুট, আর এম্. কে. এস্. পদ্ধতিতে ভ্রামকের একক কে. জি. ভার × মিটার।

§ 5·2. **ভ্রামকের সম্বন্ধে ভৌত ধারণা** (Physical concept of moment):

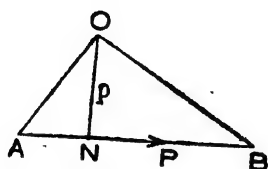
মনে কর টেবিলের উপর একটি সামতলিক-পাত (Plane lamina) O বিন্দুতে একটি পিন দ্বারা আটকান আছে। এইবার ঐ পাতের অপর যেকোন বিন্দু A-তে পাতটির উপর একটি P পরিমাপের বল প্রয়োগ কর। দেখিবে O বিন্দুর চারিদিকে পাতটি ঘুরিতেছে। যদি P বলের ক্রিয়ারেখা O বিন্দুগামী হয়, তবে পাতটির আবর্তন হয় না। চিত্র 37এ O এবং P বলের ক্রিয়ারেখার অবস্থান দেখান হইয়াছে, তাহার জন্য পাতটির আবর্তন ঘড়ির কাঁটারগতির বিপরীত দিকে হয়। কিন্তু P বলের পরিবর্তে চিত্রে প্রদর্শিত ক্রিয়ারেখায় যদি পাতটির উপর Q বল প্রয়োগ করা হয়, তবে পাতটির ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে আবর্তন হয়। এইবার মনে কর উপরোক্ত P ও Q বল

যুগপৎ পাতটির উপর প্রযুক্ত হইল। P ও Q বল দুইটি পাতটিকে যথাক্রমে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে ও ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে আবর্তিত করিতে চাহিবে।

মনে কর O হইতে P ও Q-এর লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে p ও q; দেখা যাইবে $P.p > Q.q$ হইলে পাতটির আবর্তন ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে হইবে। আর যদি $P.p < Q.q$ হয়, তবে পাতটির আবর্তন ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে হইবে। $P.p = Q.q$ হইলে পাতটির কোন আবর্তন হইবে না। এইবার মনে কর $P = Q$. যদি $p > q$ হয় তবে পাতটির আবর্তন ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে, আর যদি $p < q$ হয়, তবে পাতটির আবর্তন ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে হয়। অনুরূপে $p = q$ হইলে পাতটির আবর্তন ঘড়ির কাটার গতির বিপরীত দিকে অথবা দিকে হইবে যদি যথাক্রমে $P > Q$ বা $P < Q$ হয়। সুতরাং দেখা যাইতেছে কোন বস্তুর একটি বিন্দু আটকান থাকিলে, বল প্রয়োগের দ্বারা বস্তুটির আবর্তন ঘটান যায়। আবর্তন ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে অথবা বিপরীত দিকে হইতে পারে। বস্তুটি কতটা আবর্তিত হইবে, তাহা ঐ বল ও ঐ বিন্দু হইতে বলের ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্বের গুণফলের উপর নির্ভরশীল। এই গুণফলই ঐ বিন্দুর চারিদিকে বলটির ভ্রামক। ভ্রামকের যেকোন উৎপাদকের পরিমাপ বাড়িলে অথবা কমিলে আবর্তন যথাক্রমে বেশী অথবা কম হইবে। সুতরাং কোন বস্তুর একটি বিন্দু আটকান থাকিলে ঐ বস্তুর উপর কোন বলের প্রয়োগে ঐ বস্তুর আবর্তন হয় এবং ঐ আবর্তনের পরিমাপ ঐ বিন্দুর চারিদিকে ঐ বলের ভ্রামকের উপর নির্ভরশীল।

চিত্র 37

§ 5·3. ভ্রামকের চিহ্ন (Sign of moments) :

পূর্ব অনুচ্ছেদে দেখা গেল যে, কোন বস্তুর কোন বিন্দু আটকান থাকিলে ঐ বস্তুর উপর কোন বল প্রয়োগ করিলে বস্তুটির আবর্তন হয় এবং ঐ আবর্তন ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে অথবা বিপরীত দিকে হইতে পারে। প্রথাগতভাবে (conventionally) যখন আবর্তন ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতদিকে হয় তখন ঐ বিন্দুর চারিদিকে ঐ বলের ভ্রামককে **ধনাত্মক**, আর আবর্তন ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে হইলে ভ্রামককে **ঋণাত্মক** ধরা হয়।

§ 5·4. ভ্রামকের জ্যামিতিক প্রকাশ (Geometrical representation of moments)

চিত্রে, নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AB}$, P বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা প্রকাশ করে। O বিন্দু হইতে $\overline{AB}$ রেখাংশের লম্ব দূরত্ব $ON=p$. OA ও OB যোগ কর।

চিত্র 38

এক্ষণে O বিন্দুর চারিদিকে P বলের ভ্রামক $P.ON=P.p$.

আবার, $P.p=AB.ON=2.\frac{1}{2}AB.ON$
$=2m\triangle ABO$.

সুতরাং কোন বিন্দুর চারিদিকে কোন বলের ভ্রামকের পরিমাপ, ঐ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু এবং ঐ বলের প্রকাশক রেখাংশকে ভূমি ধরিয়া অঙ্কিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

§ 5·5. ভারিগ্‌ননের উপপাদ্য (Varignon's Theorem)

যুগ্ম বল নহে, এইরূপ দুইটি বলের সমতলের যে কোন প্রদত্ত বিন্দুর চারিদিকে বল দুইটির ভ্রামকদ্বয়ের বৈজিক যোগফল, ঐ প্রদত্ত বিন্দুর চারিদিকে বল দুইটির লব্ধি বলের ভ্রামকের সমান হয়।

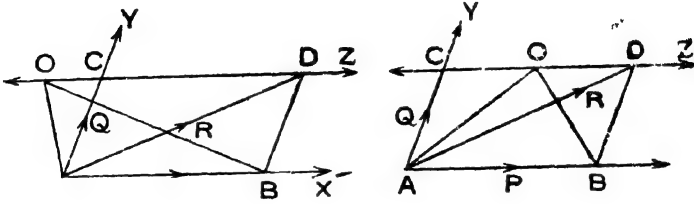
The algebraic sum of the moments of any two forces (which do not form a couple), about any given point in their plane is equal to the moment of the resultant of the forces about the given point.

P ও Q দুইটি প্রদত্ত বল এবং O উহাদের সমতলে অবস্থিত একটি প্রদত্ত বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে, O বিন্দুর চারিদিকে বল দুইটির ভ্রামক দুইটির বৈজিক যোগফল, ঐ বিন্দুর চারিদিকে উহাদের লব্ধি বলের ভ্রামকের সমান। এখানে বলা আছে যে, বল দুইটি একটি যুগ্ম বল নহে অর্থাৎ বল দুইটির পরস্পর সমান ও অসদৃশ সমান্তরাল নহে।

সুতরাং বল দুইটি (i) সমবিন্দু বা (ii) সদৃশ সমান্তরাল বা অসমান ও অসদৃশ সমান্তরাল হইবে।

(i) প্রথমে মনে কর বল দুইটি সমবিন্দু।

এইক্ষেত্রে আবার দুইটি সম্ভাবনা আছে। যথা, (ক) O বিন্দুটি P ও Q বলের একইদিকে [চিত্র (i)] অথবা (খ) O বিন্দুটি P ও Q বলের বিপরীত দিকে অবস্থিত হইতে পারে [চিত্র (ii)]।

মনে কর, বল দুইটি A বিন্দুতে প্রযুক্ত এবং $\overrightarrow{AX}$ ও $\overrightarrow{AY}$ যথাক্রমে P ও Q বলের ক্রিয়ারেখা। O বিন্দুর ভিতর দিয়া $\overrightarrow{AX}$-এর সমান্তরাল করিয়া $\overleftrightarrow{OZ}$ সরলরেখা অঙ্কন কর। $\overleftrightarrow{OZ}$, $\overrightarrow{OY}$কে C বিন্দুতে ছেদ করে। এক্ষণে, এমন একটি স্কেল $\left(\text{একক বল}=\frac{AC}{Q}\right)$ ঠিক করা হইল যে, নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AC}$, Q বলকে প্রকাশ করে এবং একই স্কেলে নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AB}$, P বলকে প্রকাশ করে।

(i) চিত্র 39 (ii)

ABDC সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ কর। সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্রানুযায়ী নিয়ন্ত্রিত রেখাংশ $\overline{AD}$, P ও Q বলের লব্ধিবল R-কে প্রকাশ করিবে।

এক্ষণে, O বিন্দুর চারিদিকে P, Q এবং R বল সমূহের ভ্রামকের পরিমাণ যথাক্রমে $2m\triangle OAB$, $2m\triangle OAC$ ও $2m\triangle OAD$.

এক্ষণে চিত্র (i)-এ, O বিন্দু P, Q, R বল তিনটির একইদিকে অবস্থিত হওয়ায় O বিন্দুর চারিদিকে উহাদের ভ্রামকের একই চিহ্ন (চিত্রানুযায়ী ধনাত্মক)।

সুতরাং O বিন্দুর চারিদিকে P ও Q বল দুইটি ভ্রামকের বৈজিক যোগফল

$=2m\triangle OAB+2m\triangle OAC$

$=2m\triangle ABD+2m\triangle OAC$ [∵ $\triangle ABD$ ও $\triangle OAB$ একই ভূমি AB ও দুই সমান্তরাল সরলরেখা AB ও $\overleftrightarrow{OD}$-র মধ্যে অবস্থিত, ∴ $m\triangle OAB=m\triangle ABD$]

$=2m\triangle ACD+2m\triangle OAC$ [যেহেতু সামান্তরিকের কর্ণ, সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ∴ $m\triangle ABD=m\triangle ACD$]

$=2m\triangle AOD=$ O বিন্দুর চারিদিকে R বলের ভ্রামক।

আবার চিত্র (ii)এ, O বিন্দুটির যেদিকে P ও R বলদ্বয় অবস্থিত, Q বল তাহার বিপরীত দিকে অবস্থিত। এই চিত্রানুযায়ী, এখানে O বিন্দুর চারিদিকে P ও R বলের ভ্রামক ধনাত্মক ও Q বলের ভ্রামক ঋণাত্মক। সুতরাং O বিন্দুর চারিদিকে P ও Q বল দুইটির ভ্রামকের বৈজিক যোগফল

$= 2m\triangle OAB - 2m\triangle OAC.$

$= 2m\triangle ABD - 2m\triangle OAC = 2m\triangle ACD - 2m\triangle OAC$

$= 2m\triangle AOD =$ O বিন্দুর চারিদিকে R বলের ভ্রামক।

(ii) এইবার মনে কর P ও Q বল দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

এখানে P ও Q সমান্তরাল বল দুইটিকে সদৃশ ধরিয়া উপপাদ্যটি প্রমাণ করা হইল। অনুরূপে P ও Q অসমান ও অসদৃশ হইলেও উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যাইবে।

O বিন্দু হইতে সদৃশ ও সমান্তরাল বলদ্বয় P ও Q এর ক্রিয়ারেখার উপর একটি লম্ব $\overleftrightarrow{OA}$ অঙ্কন কর। $\overleftrightarrow{OA}$, P ও Q-এর ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। মনে কর P ও Q বল দুইটির লব্ধি বল R = P + Q এর ক্রিয়ারেখা $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাকে C বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং P.AC = Q.BC.

প্রথমে মনে কর, O বিন্দু P ও Q বলের একই দিকে অবস্থিত। সুতরাং O বিন্দু P, Q ও R বল তিনটিরই একই দিকে অবস্থিত এবং O বিন্দুর চারিদিকে উহাদের ভ্রামকগুলির একই চিহ্ন হইবে [চিত্রে ধনাত্মক, চিত্র (i)]।

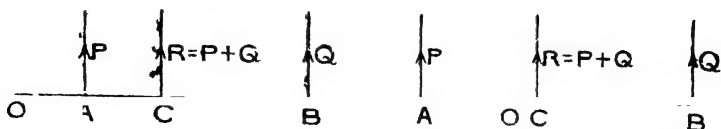
এক্ষণে, O বিন্দুর চারিদিকে P ও Q বলের ভ্রামকের বৈজিক যোগফল

$= P.OA + Q.OB$

$= P.(OC - AC) + Q.(OC + CB) = P.OC - P.AC + Q.OC + Q.CB$

$= P.OC + Q.OC \qquad [\because P.AC = Q.CB]$

$= (P + Q).OC = R.OC =$ O বিন্দুর চারিদিকে R বলের ভ্রামক।

এইবার মনে কর, O বিন্দু P ও Q বলের বিপরীত দিকে অবস্থিত। চিত্রে [চিত্র (ii)] Q ও R বলের ভ্রামক ধনাত্মক ও P বলের ভ্রামক ঋণাত্মক।

চিত্র 40

এক্ষণে, O বিন্দুর চারিদিকে P ও Q বলের ভ্রামকের বৈজিক যোগফল $= -P.OA + Q.OB.$

$=-P(AC-OC)+Q(OC+CB)$

$=-P.AC+P.OC+Q.OC+Q.CB.$

$=P.OC+Q.OC$ [যেহেতু $P.AC=Q.CB$]

$=(P+Q).OC=R.OC=O$ বিন্দুর চারিদিকে R বলের ভ্রামক।

অনুসিদ্ধান্ত 1. O বিন্দুটি লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখার উপর অবস্থিত হইলে, O বিন্দুর চারিদিকে লব্ধিবলের ভ্রামক শূন্য হয় ; সুতরাং এইক্ষেত্রে P ও Q বল দুইটির O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকের বৈজিক যোগফল শূন্য হইবে অর্থাৎ O বিন্দুর চারিদিকে P বলের ভ্রামক Q বলের ভ্রামকের সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে। অতএব বলা যায় যে,

যে কোন দুইটি বলের (যুগ্ম বল ভিন্ন) লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখার যে কোন বিন্দুর চারিদিকে বল দুইটির ভ্রামক দুইটি পরস্পর সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় অর্থাৎ ভ্রামক দুইটির বৈজিক যোগফল শূন্য হয়।

অনুসিদ্ধান্ত 2. সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দুর চারিদিকে উহাদের ভ্রামক দুইটির বৈজিক যোগফল শূন্য হইলে অর্থাৎ ভ্রামক দুইটি পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে, বিন্দুটি বল দুইটির লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখার উপর অবস্থিত হয় অথবা বল দুইটি সাম্যাবস্থায় থাকে (কারণ, লব্ধিবলের পরিমাপ শূন্য হইলে, লব্ধিবলের ভ্রামক শূন্য হয়।)

§. 4·6. **ভারিগ্‌ননের উপপাদ্যের সাধারণীকরণ (Generalisation of Varignon's Theorem) :**

একই সমতলে অবস্থিত যে কোন সংখ্যক বলের একটি লব্ধি বল থাকিলে, উহাদের সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর চারিদিকে ঐ বলগুলির ভ্রামক সমূহের বৈজিক যোগফল ঐ বিন্দুর চারিদিকে বলগুলির লব্ধি বলটির ভ্রামকের সমান হয়।

মনে কর P_1, P_2, P_3.......একই সমতলে অবস্থিত কয়েকটি প্রদত্ত বল এবং O উহাদের সমতলে অবস্থিত একটি প্রদত্ত বিন্দু।

এখানে O বিন্দুর চারিদিকে P_1 ও P_2 বলের ভ্রামকের বৈজিক যোগফল $=P_1$ ও P_2-র লব্ধি R_1 এর O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক। আবার R_1 ও P_3-র O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকের বৈজিক যোগফল $=$O বিন্দুর চারিদিকে R_1 ও P_3-র লব্ধি R_2-এর ভ্রামকের বৈজিক যোগফল$=$O বিন্দুর চারিদিকে P_1, P_2, P_3-র লব্ধি R_2-র ভ্রামক। অনুরূপে অগ্রসর হইয়া উদ্দিষ্ট উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. একই সমতলে অবস্থিত যে কোন সংখ্যক বলের একটি লব্ধি থাকিলে, ঐ লব্ধির ক্রিয়ারেখার যে কোন বিন্দুর চারিদিকে বলগুলির ভ্রামকসমূহের বৈজিক যোগফল শূন্য হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. একই সমতলে অবস্থিত যে কোন সংখ্যক বল সাম্যাবস্থায় থাকিলে, ঐ সমতলের যে কোন বিন্দুর চারিদিকে বলগুলির ভ্রামকসমূহের বৈজিক যোগফল শূন্য হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 3. একই সমতলে অবস্থিত যে কোন সংখ্যক বলের উহাদের সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দুর চারিদিকে, ভ্রামকসমূহের বৈজিক যোগফল শূন্য হইলে, বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকে, অথবা বিন্দুটি বলসমূহের লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখার উপর অবস্থিত হয়।

§ 5·7. (α, β) **বিন্দুতে প্রযুক্ত কোন বলের** (h, k) **বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক নির্ণয় :**

মনে কর P-বলের প্রয়োগ বিন্দু A-র স্থানাঙ্ক (α, β) এবং O′ (h, k) বিন্দুর চারিদিকে P-বলের ভ্রামক নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, x ও y-অক্ষের সমান্তরাল দিকে P-বলের বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে X ও Y.

চিত্র 41

সুতরাং X ও Y বলের লব্ধি P এবং O′ বিন্দুর চারিদিকে X ও Y বলদ্বয়ের ভ্রামকদ্বয়ের বৈজিক যোগফল =O′ বিন্দুর চারিদিকে P বলের ভ্রামক।

এক্ষণে O′ হইতে O′M ও O′N যথাক্রমে x ও y-অক্ষের উপর লম্ব টান। O′M ও O′N যথাক্রমে X ও Y-বলের ক্রিয়া রেখাকে M′ ও N′ বিন্দুতে ছেদ করে। A হইতে অক্ষদ্বয়ের উপর যথাক্রমে AK ও AL লম্ব টান।

এক্ষণে $O'M' = O'M - M'M = O'M - AK = k - \beta$.

$$O'N' = O'N - N'N = O'N - AL = h - \alpha.$$

সুতরাং O′ বিন্দুর চারিদিকে P-বলের ভ্রামক

= O′ বিন্দুর চারিদিকে X ও Y বলদ্বয়ের ভ্রামকের বৈজিক যোগফল

$$= X.O'M' - Y.O'N' = X(k - \beta) - Y(h - \alpha).$$

উদাহরণ 1. নিম্নের প্রত্যেকটি ক্ষেত্রে একটি বলের পরিমাপ ও একটি বিন্দু O হইতে বলটির ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্ব দেওয়া আছে। বলটির O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকের পরিমাপ নির্ণয় কর :—

(i) 4 কিলোগ্রাম ; 5 মিটার. (ii) 100 গ্রাম ; 1000 সে. মি.

(i) নির্ণেয় ভ্রামক = বলের পরিমাপ × লম্ব দূরত্ব কে. জি. ভার মিটার
= 4×5 কে. জি. ভার মিটার = 20 কে. জি. ভার মিটার।

(ii) নির্ণেয় ভ্রামক = 100×1000 গ্রামভার সেন্টিমিটার
= 100000 গ্রামভার সেন্টিমিটার।

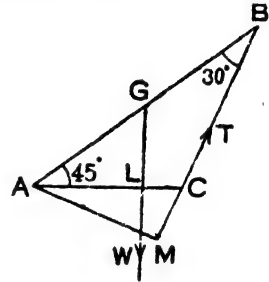
উদা. 2. একটি সমদণ্ড AB-র ভার W এবং ইহা A প্রান্তে আঁটা আছে। B বিন্দুতে বাঁধা একটি দড়ির দ্বারা দণ্ডটিকে অনুভূমিক তলের সহিত 45° নতিতে রাখা হইল। দড়িটি দণ্ডটির সহিত 30° কোণে নত হইলে, দড়িটির টান নির্ণয় কর।

মনে কর দড়িটি BC, উহার টান T এবং G দণ্ডটির মধ্যবিন্দু।

এক্ষণে দণ্ডটির উপর প্রযুক্ত বল তিনটি হইল,

(i) G বিন্দুতে উল্লম্বরেখায় নিম্নাভিমুখী প্রযুক্ত দণ্ডটির ভার W এবং

(ii) B বিন্দুতে প্রযুক্ত দড়ির টান T. ও

(iii) A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া R (চিত্রে দেখান হয় নাই।

চিত্র 42

যেহেতু দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া কোন আবর্তন হইতেছে না। [যেহেতু R বল, A বিন্দুগামী, সুতরাং A বিন্দুর চারিদিকে R বলের ভ্রামক শূন্য] সুতরাং T ও W-এর A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক দুইটি পরস্পর সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত। W এবং T-এর ক্রিয়ারেখার উপর A হইতে যথাক্রমে AL ও AM লম্ব টান।

$\therefore \quad W.AL = T.AM \cdots\cdots(1)$

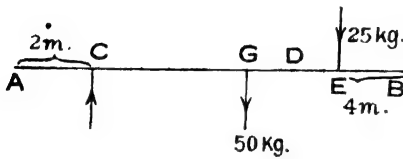
এক্ষণে, $\frac{AL}{AG} = \cos 45^\circ \quad \therefore \quad AL = AG \cos 45^\circ = AG \frac{1}{\sqrt{2}}$

আবার $\frac{AM}{AB} = \sin 30^\circ$, বা, $AM = AB.\sin 30^\circ = 2\ AG\ \frac{1}{2} = AG$

সুতরাং (1) হইতে পাই, $W.AG\ \frac{1}{\sqrt{2}} = T.AG$

$$\therefore \quad T = \frac{W}{\sqrt{2}} = \frac{W\sqrt{2}}{2}.$$

উদা. 3. 10 মিটার দীর্ঘ একটি সঙ্কীর্ণ সমভার তক্তা AB-র ভার 50 কেজি.। তক্তাটিকে C ও D দুইটি স্তম্ভের উপর অনুভূমিক অবস্থানে রাখা হইয়াছে। C স্তম্ভটি A প্রান্ত হইতে 2 মিটার দূরে এবং D স্তম্ভটি B প্রান্ত হইতে 4 মিটার দূরে অবস্থিত। একটি বালক D স্তম্ভ হইতে B প্রান্তের দিকে যাইতে লাগিল। বালকটির ওজন 25 কে. জি. হইলে, কতদূর যাওয়া তাহার পক্ষে নিরাপদ ?

মনে কর B ও D-র মধ্যে E বিন্দু পর্যন্ত বালকটি নিরাপদে যাইতে পারে এবং DE$=x$. এই বিন্দু পর্যন্ত বালকটি আসিলে তক্তাটির উল্টাইবার উপক্রম হইবে এবং C-র সহিত সংযোগ ছিন্ন হইবে ; ফলে C বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া শূন্য হইবে। মনে কর D বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া R. তক্তার উপর প্রযুক্ত অন্য দুইটি বল হইল (i) G বিন্দুতে প্রযুক্ত উল্লম্ব রেখায় নিম্নমুখী 50 কে. জি. ভার ও (ii) E বিন্দুতে প্রযুক্ত উল্লম্ব-রেখায় নিম্নাভিমুখী বালকের ভার 25 কে. জি.।

চিত্র 38

যেহেতু তক্তাটি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং D বিন্দুর চারিদিকে বলসমূহের ভ্রামকের বৈজিক যোগফল শূন্য।

$\therefore \quad 50 \times GD - 25 \times DE = 0,$

বা, $25 \times x = 50 \times 1 \qquad \therefore \quad x = 2$ মিটার।

সুতরাং D বিন্দু হইতে B প্রান্তের দিকে বালকটি নিরাপদে 2 মিটার পর্যন্ত যাইতে পারে।

উদা. 4. ভূমির উপর দণ্ডায়মান একটি খুঁটির সহিত 20 মিটার দীর্ঘ একটি দড়ি বাঁধিয়া এক ব্যক্তি দড়িটির অপর প্রান্তে একটি নির্দিষ্ট পরিমাপের বল প্রয়োগ করিয়া টানিতে লাগিল। খুঁটিটির কোথায় দড়িটি বাঁধিলে খুঁটিটিকে তুলিয়া ফেলা সর্বাপেক্ষা সুবিধাজনক হইবে ?

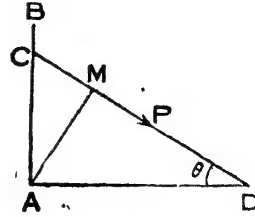
মনে কর খুঁটিটি হইল AB এবং C বিন্দুতে CD দড়িটি বাঁধা হইল।

মনে কর $m\angle CDA=\theta$ এবং AM, CD-র উপর লম্ব।

$\therefore \quad AM=AD \sin \theta$

$=CD \cos \theta \sin \theta.$

$=\frac{1}{2}CD \sin 2\theta=\frac{1}{2}\times 20 \sin \theta$

$=10 \sin 2\theta.$

চিত্র 44

এক্ষণে A বিন্দুর চারিদিকে নির্দিষ্ট পরিমাপের P-বলের ভ্রামক $=P.AM=P.10 \sin 2\theta=10\ P \sin 2\theta.$

সুতরাং ঐ ব্যক্তির পক্ষে বলপ্রয়োগ সর্বাপেক্ষা সুবিধাজনক হইবে যখন $10\ P \sin 2\theta$-র মান বৃহত্তম হইবে।

এক্ষণে এই মান বৃহত্তম হইবে, যখন $\sin 2\theta$-র মান বৃহত্তম হইবে অর্থাৎ 1 হইবে।

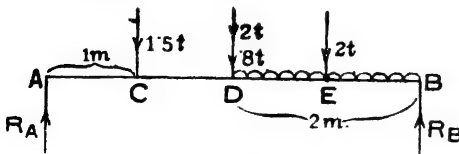
অর্থাৎ যখন $2\theta=90°$ বা, $\theta=45°$ হইবে।

$\therefore\ m\angle ACD=45°,\ \therefore\ AC=AD=CD \cos 45°=20.\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=10\sqrt{2}$ মি.

$\therefore$ দড়িটিকে ভূমি হইতে $10\sqrt{2}$ মিটার উচ্চে বাঁধিতে হইবে।

উদা 5. একটি চার মিটার দীর্ঘ সম-ভার দণ্ডকে উহার প্রান্তদ্বয়ে দুইটি স্তম্ভের উপর স্বাধীনভাবে স্থাপন করা হইল। দণ্ডটির বামপ্রান্ত হইতে 1 মিটার দূরে অবস্থিত একটি বিন্দুতে 1·5 টনের একটি ভার এবং উহার অপর প্রান্ত হইতে 2 মিটার দূরের একটি বিন্দুতে 2 টনের একটি ভার প্রযুক্ত হইল। দণ্ডটির ভার 0·8 টন এবং দক্ষিণ প্রান্ত হইতে 2 মিটার দৈর্ঘ্যে প্রতিমিটারে 1 টন এইরূপ ভার সমভাবে বিস্তৃত। স্তম্ভ দুইটিতে প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।
[c.f. State Council/Part. I—1975]

C বিন্দুটি বাম প্রান্ত A হইতে 1 মিটার দূরে এবং E বিন্দুটি দক্ষিণ প্রান্ত B হইতে 1 মিটার দূরে অবস্থিত। D বিন্দুটি সমভার দণ্ডটির মধ্যবিন্দু। এক্ষণে দণ্ডটির উপর নিম্নলিখিত বলসমূহ প্রযুক্ত :

চিত্র 45

(1) A বিন্দুতে ঊর্ধ্বমুখী প্রতিক্রিয়া R_A.

(2) C বিন্দুতে নিম্নাভিমুখী ভার $1·5t$.

(3) D বিন্দুতে সমভার দণ্ডের নিম্নাভিমুখী ভার 0·8*t*.

(4) D বিন্দুতে নিম্নাভিমুখী ভার 2*t*.

(5) E বিন্দুতে প্রতি মিটারে 1 টন হিসাবে 2 মিটার ব্যাপিয়া সমভাবে বিস্তৃত ভার 2 টনের নিম্নাভিমুখী লব্ধি ভার।

(6) B বিন্দুতে উর্ধ্বমুখী প্রতিক্রিয়া R_B.

এক্ষণে, যেহেতু দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় আছে,

অতএব, উর্ধ্বাভিমুখী বলগুলির লব্ধি = নিম্নাভিমুখী বলগুলির লব্ধি।

উর্ধ্বাভিমুখী বলগুলির লব্ধি $=(1·5+2+0·8+2)$ টন $=6·3$ টন এবং নিম্নাভিমুখী বলগুলির লব্ধি $=R_A+R_B$.

$\therefore\quad R_A+R_B=6·3$ টন······(1)

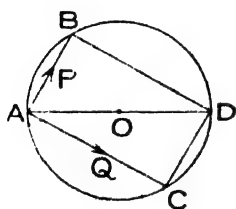
আবার যেহেতু বলগুলি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং উহাদের সমতলের যে-কোন বিন্দুর চারিদিকে বলগুলির ভ্রামকসমূহের বৈজিক যোগফল শূন্য।

সুতরাং A বিন্দুর চারিদিকে বলগুলির ভ্রামক লইয়া পাই,

$$R_B\times4-1·5\times1-(2+·8)\times2-2\times3=0,$$

বা, $4R=1·5+5·6+6$, বা, $R_B=\frac{13·1}{4}$ টন $=3·28$ টন (আসন্ন)

$\therefore$ (1) হইতে পাই, $R_A=6·3-3·28=3·02$ টন।

উদা. 6. P ও Q বল দুইটি একটি বৃত্তের পরস্পর সমকোণে নত দুইটি জ্যা AB ও AC দ্বারা প্রকাশিত হয়। AD, বৃত্তের একটি ব্যাস। প্রমাণ কর যে, D বিন্দুর চারিদিকে P ও Q বলদ্বয়ের ভ্রামক দুইটির পরিমাণ সমান।

চিত্র 46

BD ও CD যোগ কর। এক্ষণে ABDC একটি আয়তক্ষেত্র হইল।

$\therefore\quad m\triangle ABD=m\triangle ACD$

বা, $2m\triangle ABD=2m\triangle ACD$.

এক্ষণে, $2m\triangle ABD$ ও $2m\triangle ACD$ যথাক্রমে D বিন্দুর চারিদিকে P ও Q বলের ভ্রামকের পরিমাণ।

সুতরাং ভ্রামকদ্বয়ের পরিমাণ সমান।

উদা. 7. *a* দৈর্ঘ্যের একটি সমভার তক্তার ভার W-কে দুইটি কীলক C ও D-র উপর অনুভূমিকভাবে স্থাপন করা হইল। তক্তাটিকে না উল্টাইয়া

প্রান্তদ্বয়ে যে বৃহত্তম ভার পৃথক্‌ভাবে স্থাপন করা যায়, তাহাদের পরিমাণ যথাক্রমে P ও Q. যদি CD $= l$ হয়, প্রমাণ কর $\frac{P}{W+P}+\frac{Q}{W+Q}=\frac{2l}{a}$.

[চিত্র নিজে অঙ্কন কর।]

মনে কর তক্তাটি হইল AB এবং G উহার মধ্যবিন্দু। তক্তাটিকে না উল্টাইয়া A ও B প্রান্তে পৃথক্‌ভাবে যথাক্রমে P ও Q ভার স্থাপন করা যায়। প্রথমে মনে কর A প্রান্তে P ভার স্থাপন করা হইল। যেহেতু P প্রদত্ত বৃহত্তম ভার, সুতরাং তক্তাটির C বিন্দুতে সমস্ত চাপ পড়িবে এবং D বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া শূন্য হইবে। সুতরাং C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই,

$$P.AC = W.CG \cdots\cdots (1)$$

অনুরূপে যখন B প্রান্তে Q ভার স্থাপন করা হয়, তখন D বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই, $Q.BD = W.DG \cdots\cdots (2)$

(1) হইতে পাই, $\frac{CG}{AC}=\frac{P}{W}$ বা, $\frac{CG}{AC}+1=\frac{P}{W}+1$,

বা, $\frac{CG+AC}{AC}=\frac{P+W}{W}$, বা, $\frac{AG}{AC}=\frac{P+W}{W}$,

বা, $\frac{\frac{a}{2}}{AC}=\frac{P+W}{W}$, $\therefore$ $AC=\frac{W}{P+W}\cdot\frac{a}{2}$.

অনুরূপে (2) হইতে পাই, $BD=\frac{W}{Q+W}\cdot\frac{a}{2}$.

আবার (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই,

$P.AC+Q.BD = W.(CG+DG) = W.CD = W.l$.

বা, $\left(\frac{PW}{P+W}+\frac{QW}{Q+W}\right)\frac{a}{2}=W.l$

বা, $\frac{Wa}{2}\left(\frac{P}{P+W}+\frac{Q}{Q+W}\right)=W.l$ বা, $\frac{P}{P+W}+\frac{Q}{Q+W}=\frac{2l}{a}$.

উদা. 8. একটি গাড়ীর চাকার ভার W এবং ব্যাসার্ধ r ; h উচ্চতার একটি প্রতিবন্ধকের উপর দিয়া চাকাটিকে ঠেলিয়া পার করিতে হইবে। প্রমাণ কর যে এইজন্য অনুভূমিক বল F প্রয়োগ করিতে হইলে, F-এর পরিমাণ $\frac{W\sqrt{2rh-h^2}}{r-h}$ অপেক্ষা সামান্য অধিক হইলেই যথেষ্ট হইবে।

মনে কর, O চাকার কেন্দ্র এবং P প্রতিবন্ধক। P হইতে PM এবং O হইতে ON যথাক্রমে অনুভূমিক তলের উপর এবং PM-এর উপর লম্ব।

চিত্র 47

সুতরাং $PM = h$, $MN = r$;

$\therefore \quad PN = MN - PM = r - h.$

আবার $ON = \sqrt{OP^2 - PN^2}$

$= \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{2rh - h^2}.$

এক্ষণে, যদি F বলের প্রয়োগে প্রতিবন্ধকটি অতিক্রম করা যায়, তবে P বিন্দুর চারিদিকে F বলের ভ্রামক, P বিন্দুর চারিদিকে W বলের ভ্রামক অপেক্ষা সামান্য বেশী হইবে এবং উহাদের বিপরীত চিহ্ন হইবে।

$\therefore \quad F.PN > W.PK$ বা, $F.PN > W.ON$ বা, $F(r-h) > W.\sqrt{2rh - h^2}$

বা, $F > \dfrac{W\sqrt{2rh-h^2}}{r-h}.$

উদা. 9. P, Q এবং R বল ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{AB}$ বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, যদি উহাদের লব্ধি বল

(i) ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায় তবে

$P \operatorname{cosec} A + Q \operatorname{cosec} B + R \operatorname{cosec} C = 0$

(ii) ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দুর ভিতর দিয়া যায়, তবে

$P \sec A + Q \sec B + R \sec C = 0$

(iii) ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু উভয়েরই ভিতর দিয়া, যায় তবে

$$\frac{P}{\sin 2A \sin(B-C)} = \frac{Q}{\sin 2B \sin(C-A)} = \frac{R}{\sin 2C \sin(A-B)}.$$

P, Q এবং R বল ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{AB}$ বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। মনে কর বল তিনটির লব্ধিবল F.

(i) মনে কর ভরকেন্দ্র G এবং G হইতে GL, GM ও GN যথাক্রমে $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ ও $\overleftrightarrow{AB}$-র উপর লম্ব। মনে কর, A, B, C হইতে $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ ও $\overleftrightarrow{AB}$-র লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে p_1, p_2 ও p_3 $\quad \therefore \quad GL = \frac{1}{3} p_1$ এবং $ap_1 = 2m\triangle ABC$

$=2\Delta$ (মনে কর) $\therefore\ p_1=\dfrac{2\Delta}{a}$ $\therefore$ $GL=\dfrac{2}{3}\dfrac{\Delta}{a}$

অনুরূপে $GM=\frac{2}{3}\dfrac{\Delta}{b}$ ও $GN=\frac{2}{3}\dfrac{\Delta}{c}$

যেহেতু লব্ধিবল G বিন্দুগামী, $\therefore$ বল তিনটির G বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকসমূহের বৈজিক যোগফল শূন্য।

চিত্র 48

$\therefore\ P.GL+Q.GM+R.GN=0$

বা, $P.\dfrac{2}{3}\dfrac{\Delta}{a}+Q.\dfrac{2}{3}\dfrac{\Delta}{b}+R.\dfrac{2}{3}\dfrac{\Delta}{c}=0$

বা, $\dfrac{P}{a}+\dfrac{Q}{b}+\dfrac{R}{c}=0$

বা, $\dfrac{P}{2R'\sin A}+\dfrac{Q}{2R'\sin B}+\dfrac{R}{2R'\sin C}=0$

$\left[\because\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R'\right.$
(R', ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ)]

বা, $\dfrac{P}{\sin A}+\dfrac{Q}{\sin B}+\dfrac{R}{\sin C}=0$

বা $P\operatorname{cosec}A+Q\operatorname{cosec}B+R\operatorname{cosec}C=0$

(ii) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় হইতে বিপরীত বাহুগুলি উপর AL, BM ও CN লম্ব টান। মনে কর লম্ব তিনটি O বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং O ত্রিভুজের লম্ব বিন্দু।

এক্ষণে, OCL ত্রিভুজ হইতে পাই, $\dfrac{OL}{LC}=\tan OCL$,

বা $OL=LC\tan OCL=AC\cos ACL\tan OCL$

$=b\cos C\tan(90^\circ-B)$ [$\because$ ΔCNB সমকোণী ত্রিভুজ

$=b\cos C\cot B$ $\therefore\ m\angle NCB+m\angle B=90^\circ$]

$=b\cos C\ \dfrac{\cos B}{\sin B}=2R'\cos C\cos B$ $\left[\because\ \dfrac{b}{\sin B}=2R'\right]$

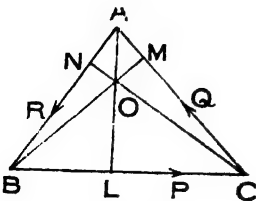
$=2R'\cos A\cos B\cos C\sec A$

চিত্র 49

অনুরূপে $OM=2R'\cos A\cos B\cos C\sec B$

এবং $ON=2R'\cos A\cos B\cos C\sec C$

এক্ষণে, বলসমূহের লব্ধি লম্ববিন্দুগামী, হওয়ায় লম্ববিন্দু O-র চারিদিকে বলসমূহের ভ্রামকসমূহের বৈজিক যোগফল শূন্য।

$\therefore\ P.OL+Q.OM+R.ON=0$

বা, $P.2R' \cos A \cos B \cos C \sec A + Q.2R' \cos A \cos B \cos C \sec B + R.2R' \cos A \cos B \cos C \sec C = 0.$

বা, $P \sec A + Q \sec B + R \sec C = 0$

(iii) যেহেতু বলসমূহের লব্ধি বল ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র এবং লম্ববিন্দুগামী, অতএব উপরের (i) ও (ii) হইতে আমরা যথাক্রমে পাই,

$P \operatorname{cosec} A + Q \operatorname{cosec} B + R \operatorname{cosec} C = 0 \cdots (1)$

$P \sec A + Q \sec B + R \sec C = 0 \cdots (2)$

এক্ষণে, (1) ও (2) হইতে বজ্রগুণন প্রক্রিয়া দ্বারা পাই

$$\frac{P}{\operatorname{cosec} B \sec C - \operatorname{cosec} C \sec B} = \frac{Q}{\operatorname{cosec} C \sec A - \operatorname{cosec} A \sec C} = \frac{R}{\operatorname{cosec} A \sec B - \sec A \operatorname{cosec} B}$$

বা, $$\frac{P}{\frac{1}{\sin B \cos C} - \frac{1}{\sin C \cos B}} = \frac{Q}{\frac{1}{\sin C \cos A} - \frac{1}{\sin A \cos C}} = \frac{R}{\frac{1}{\sin A \cos B} - \frac{1}{\cos A \sin B}}$$

বা, $$\frac{P}{\frac{\sin C \cos B - \sin B \cos C}{\sin B \sin C \cos B \cos C}} = \frac{Q}{\frac{\sin A \cos C - \sin C \cos A}{\sin C \sin A \cos C \cos A}} = \frac{R}{\frac{\sin B \cos A - \cos B \sin A}{\sin A \cos A \sin B \cos B}}$$

বা, $$\frac{P}{\frac{4 \sin (C-B)}{\sin 2B \sin 2C}} = \frac{Q}{\frac{4 \sin (A-C)}{\sin 2A \sin 2C}} = \frac{R}{\frac{4 \sin (B-A)}{\sin 2C \sin 2A}}$$

বা, $$\frac{P}{\frac{-\sin 2A \sin (B-C)}{\sin 2A \sin 2B \sin 2C}} = \frac{Q}{\frac{-\sin 2B \sin (C-A)}{\sin 2A \sin 2B \sin 2C}} = \frac{R}{\frac{-\sin 2C \sin (A-B)}{\sin 2A \sin 2B \sin 2C}}$$

বা, $$\frac{P}{\sin 2A \sin (B-C)} = \frac{Q}{\sin 2B \sin (C-A)} = \frac{R}{\sin 2C \sin (A-B)}$$

উদা. 10. সাম্যাবস্থায় আছে এরূপ চারিটি বলের একটি সম্পূর্ণরূপে প্রদত্ত, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বলের (যাহারা সমান্তরাল নহে) ক্রিয়ারেখা এবং চতুর্থ বলটির কেবলমাত্র পরিমাপ জানা আছে। প্রমাণ কর যে, চতুর্থ বলটির ক্রিয়ারেখা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে। [C. U. 1934]

মনে কর P, Q, R, S বল চারিটি সাম্যাবস্থায় আছে। P বল সম্পূর্ণরূপে প্রদত্ত ; Q এবং R বলদ্বয় সমান্তরাল নয় এবং তাহাদের ক্রিয়ারেখা জানা আছে এবং S বলের পরিমাপ প্রদত্ত। মনে কর Q এবং R বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখা O বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

যেহেতু বলগুলি সাম্যাবস্থায় আছে, সুতরাং উহাদের সমতলের যে কোন বিন্দুর চারিদিকে উহাদের ভ্রামকগুলির বৈজিক যোগফল শূন্য। মনে কর O হইতে P এবং S বলের ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে p ও s (p জানা আছে এবং s অজ্ঞাত)।

সুতরাং O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই, $\text{P}.p+\text{S}.s=0$.

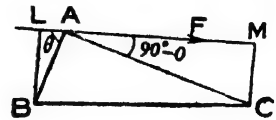
বা, $s=-\dfrac{\text{P}.p}{\text{S}}$. এক্ষণে শর্তানুসারে $\text{P}.p$ ও S প্রত্যেকটি নির্দিষ্ট

∴ $\dfrac{\text{P}.p}{\text{S}}$ নির্দিষ্ট।

সুতরাং নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে S বলের ক্রিয়ারেখার দূরত্ব ধ্রুবক।

সুতরাং S বলের ক্রিয়ারেখা Oকে কেন্দ্র করিয়া $\dfrac{\text{P}.p}{\text{S}}$ ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

উদা. 11. ABC সমকোণী ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13, 12 ও 5 একক। একটি বল Fএর A, B ও C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকসমূহ যথাক্রমে 0, 25 ও 144 একক। F বলটির পরিমাপ, দিক এবং ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর। [C. U. 1936]

যেহেতু A বিন্দুর চারিদিকে F বলের ভ্রামক শূন্য, অতএব F বলটি A বিন্দুগামী। আবার B ও C বিন্দুর চারিদিকে F বলের ভ্রামক একই চিহ্নযুক্ত হওয়ায় (এখানে ধনাত্মক) B ও C বিন্দুদ্বয় Fএর ক্রিয়ারেখার একই দিকে অবস্থিত। BL ও CM, Fএর ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব অঙ্কন কর এবং মনে কর $m\angle \text{BAL}=\theta$ ∴ $m\angle \text{CAM}=90^\circ-\theta$.

চিত্র 50

[$\because$ $\angle$BAC সমকোণ, কারণ $BC^2=13^2=12^2+5^2=CA^2+AB^2$]

এক্ষণে $BL=AB\sin\theta=5\sin\theta$.

এবং $CM=CA\sin(90^\circ-\theta)=12\cos\theta$.

যেহেতু B বিন্দুর চারিদিকে F-এর ভ্রামক 25 একক,

$\therefore\quad F.BL=25$ বা, $F.5\sin\theta=25\quad\therefore\quad F=\dfrac{5}{\sin\theta}$

আবার C বিন্দুর চারদিকের F বলের ভ্রামক 144 হওয়ায়,

$F.CM=144$ বা, $F.12\cos\theta=144\quad\therefore\quad F=\dfrac{12}{\cos\theta}$

$$\therefore\quad F=\frac{5}{\sin\theta}=\frac{12}{\cos\theta}=\sqrt{\frac{5^2+12^2}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=\frac{13}{1}=13$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{5}{F}=\frac{5}{13}=\sin C.\quad\therefore\ \theta=C.$$

সুতরাং F বলটির ক্রিয়ারেখা ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের A বিন্দুতে স্পর্শক এবং উহার পরিমাপ 13 একক।

উদা. 12. পরস্পর সমকোণে নত $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ দুইটি সরলরেখা। $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$কে স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় ধরিয়া ঐ সমতলের দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) ও (x', y')। ঐ সমতলের আর একটি বিন্দু O'-এ প্রযুক্ত একটি বলের পূর্বোক্ত বিন্দু দুইটির চারিদিকে ভ্রামক যথাক্রমে G ও G'. $(xy'-x'y)\neq 0$ হইলে প্রমাণ কর বলটির পরিমাপ R এবং $\overrightarrow{OX}$এর সহিত তাহার ক্রিয়ারেখার নতি θ হইলে

$$R^2=\frac{(xG'-x'G)^2+(yG'-y'G)^2}{(xy'-x'y)^2}\ \text{এবং}\ \tan\theta=\frac{yG'-y'G}{xG'-x'G}$$

[C. U. 1946]

$\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$এর দিকে বলটির বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে $R\cos\theta$ এবং $R\sin\theta$. এক্ষণে সমতলের যে কোন বিন্দুর চারিদিকে বিশ্লেষিতাংশ দুইটির ভ্রামক দুইটির বৈজিক যোগফল = ঐ বিন্দুর চারিদিকে বলটির ভ্রামক।

$\therefore\quad (x, y)$ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই,

$yR\cos\theta-xR\sin\theta=G\cdots(1)$

এবং (x', y') বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই

$y'R\cos\theta-x'R\sin\theta=G'\cdots(2)$

(1) ও (2) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই,

$R\cos\theta=\dfrac{xG'-x'G}{xy'-x'y}\cdots(3)$ এবং

$$R\sin\theta=\frac{yG'-y'G}{xy'-x'y}\cdots(4)$$

সমীকরণ (3) এবং (4)এর উভয় পক্ষের বর্গ লইয়া এবং যোগ করিয়া পাই,

$$R^2=\frac{(xG'-x'G)^2+(yG'-y'G)^2}{(xy'-x'y)^2}$$

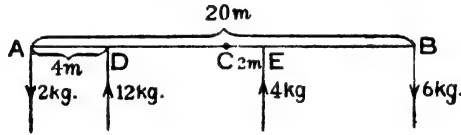
আবার সমীকরণ (4)কে সমীকরণ (3) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\tan\theta=\frac{yG'-y'G}{xG'-x'G}$$

প্রশ্নমালা 5

1. নিম্নের প্রত্যেকটি ক্ষেত্রে একটি বলের পরিমাপ ও একটি বিন্দু O হইতে বলটির ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্ব দেওয়া আছে। O বিন্দুর চারিদিকে বলটির ভ্রামকের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(i) 100 কে.জি. ; 50 মিটার (ii) 65 পাউণ্ড, $4\frac{5}{13}$ ফুট।

2. নীচের চিত্রে একটি ভারহীন দণ্ড AB অনুভূমিক অবস্থায় আছে। চিত্রে প্রদর্শিত বলগুলির A, B ও C (C, AB-র মধ্যবিন্দু) প্রত্যেকটি বিন্দুর চারিদিকে বলগুলির ভ্রামকসমূহের পরিমাণ ও চিহ্ন নির্ণয় কর।

চিত্র 51

3. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং ইহার প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 cm. 2, 4 এবং 8 কেজি. পরিমাপের তিনটি বল যথাক্রমে $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ ও $\vec{CA}$ রেখায় ক্রিয়াশীল। প্রত্যেক বলের বিপরীত শীর্ষের চারিদিকে ভ্রামক নির্ণয় কর।

4. যদি দুইটি বল একটি ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত দুইটি বাহু দ্বারা প্রকাশিত হয়, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর প্রান্তবিন্দু দুইটির প্রত্যেকটির চারিদিকে বল দুইটির ভ্রামকদ্বয়ের বীজগাণিতিক যোগফল সমান।

5. একটি ভারহীন অনুভূমিক দণ্ড AB-র দৈর্ঘ্য 10 মিটার A, C, D, E, F ও B দণ্ডটির 2 মিটার ব্যবধানে অবস্থিত ছয়টি পরপর বিন্দু। এই বিন্দু ছয়টি হইতে যথাক্রমে 1, 2, 4, 6, 8 ও 10 কে.জি. ওজনের কয়েকটি ভার ঝোলান আছে। দণ্ডটির কোন্ বিন্দুর চারিদিকে ভারগুলির ভ্রামকসমূহের বৈজিক যোগফল শূন্য হইবে?

6. 15 মিটার দীর্ঘ 30 কেজি. ভারের একটি সমদণ্ড দুইপ্রান্তে দুইটি কীলকের উপর স্থাপন করা হইল। একপ্রান্ত হইতে 8 মিটার দূরে দণ্ডের উপর একটি 160 কেজি.-ভার ঝোলান হইল। কীলক দুইটির উপর চাপ নির্ণয় কর।

7. একটি মসৃণ টেলিগ্রাফ্ পোস্ট উহার মধ্যবিন্দুতে অনুভূমিক তলের সহিত 60° কোণে নত একটি দড়ি দ্বারা উল্লম্বভাবে রক্ষিত। টেলিগ্রাফের তার অনুভূমিকভাবে টেলিগ্রাফ পোস্টের সহিত জড়ানো এবং উহার দুইটি অংশ পরস্পরের সহিত 60° কোণে নত। প্রমাণ কর যে দড়িটির টান টেলিগ্রাফ তারের টানের $4\sqrt{3}$ গুণ।

8. 6 মিটার দীর্ঘ 2 কেজি. ভারের একটি সমদণ্ডের দুইটি প্রান্ত দুইটি কীলকের উপর স্থাপন করা হইল। প্রত্যেকটি কীলক 13 কেজি.-র অধিক ভার সহ্য করিতে পারে না। দণ্ডটির কোন অংশে একটি 16 কেজি.-ভার স্থাপন করিলে, কোন কীলকই ভাঙ্গিয়া যাইবে না।

[State Council (W.B.) 1976]

9. একটি সমদণ্ডের ভার 50 কেজি.; ইহাকে দুইপ্রান্তে দুইটি উল্লম্ব দড়ির সাহায্যে অনুভূমিক ভাবে ঝুলাইয়া রাখা হইল। কোন দড়ি 40 কে.জি.র অধিক ভার বহন করিতে পারে না। দণ্ডের মধ্যবিন্দু হইতে কতদূরে একটি 25 কে. জি. ঝুলাইলে একটি দড়ি ছিড়িয়া যাইবার উপক্রম করিবে ?

10. 16 ইঞ্চি দীর্ঘ একটি দণ্ড 9 ইঞ্চি ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি কীলকের উপর রাখা আছে। কীলক দুইটি, দণ্ডটির মধ্যবিন্দু হইতে সমদূরবর্তী ; দণ্ডটির দুইপ্রান্ত হইতে পৃথক ভাবে যথাক্রমে সর্ব্বাপেক্ষা বেশী 4 পাউণ্ড ও 5 পাউণ্ড ভার ঝোলান যায়। দণ্ডটির ভার এবং ভারের প্রয়োগ বিন্দু নির্ণয় কর।

11. উভয় প্রান্তে স্বাধীন ভাবে আলম্বিত (simply supported) একটি 5 মিটার দীর্ঘ দণ্ডের উপর নিম্নলিখিত বলগুলি প্রযুক্ত হইল :

(i) বাম প্রান্ত হইতে 2 মিটার দূরে একটি 3 টন ভার

(ii) দক্ষিণ প্রান্ত হইতে 2 মিটার দূরে একটি 2 টন-ভার

(iii) দক্ষিণ প্রান্ত হইতে 3 মিটার দৈর্ঘ্যে প্রতি মিটারে 1 টন এইরূপে সমভাবে বিস্তৃত ভার।

দণ্ডটির ভার 1 টন হইলে, আলম্ব দুইটির প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

12. একটি স্তম্ভের সহিত একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একটি দড়ি বাধিয়া এক ব্যক্তি দড়িটির অপর প্রান্তে একটি নির্দিষ্ট পরিমাপের বলপ্রয়োগ করিয়া টানিতে

লাগিল। ভূমি হইতে কত উচ্চে দড়িটি বাধিলে স্তম্ভটিকে তুলিয়া ফেলা সর্বাপেক্ষা সুবিধাজনক হইবে ?

13. একটি সেতুর অনুভূমিক রাস্তা 12 মিটার দীর্ঘ এবং ওজন 5 টন। রাস্তাটি উভয়প্রান্তে দুইটি স্তম্ভের উপর আলম্বিত। 3 টন ওজনের একটি লরি একপ্রান্ত হইতে 8 মিটার দূরে অবস্থিত হইলে প্রত্যেক স্তম্ভের উপর কত চাপ পড়িবে ?

14. একটি বর্গক্ষেত্রের $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, এই চারিটি বাহু বরাবর ক্রিয়াশীল R, 2R, 3R ও 4R পরিমাপের বলগুলির লব্ধি বলের মান, দিক ও ক্রিয়ারেখার $\overleftrightarrow{AB}$-র সহিত ছেদ বিন্দু নির্ণয় কর।

15. এক ব্যক্তি ও তাঁহার পুত্র 5 মিটার দীর্ঘ, 15 কে. জি. ভারের একটি দণ্ডের সাহায্যে একটি 60 কে. জি. ভার বহন করে। ভারটি কোন্ স্থানে রাখিলে ঐ ব্যক্তি তাঁহার পুত্র অপেক্ষা 2 কে. জি. ভার বেশী বহন করিবে ?

16. একটি বর্গক্ষেত্রের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহুগুলি বরাবর 1, 2, 4 ও 5 পাউণ্ড পরিমাপের কতকগুলি বল ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, বলগুলির লব্ধিবল বর্গক্ষেত্রটির একটি কর্ণের সমান্তরাল ; লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা প্রথমবলের ক্রিয়ারেখাকে কোন্ বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা নির্ণয় কর। [C. U. 1937]

17. ABC সমকোণী ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5, 4 ও 3 দৈর্ঘ্য একক। A, B, C-র চারিদিকে একটি প্রদত্ত বলের ভ্রামক-সমূহ যথাক্রমে 0, 25 ও 144 ভ্রামক একক। বলটির পরিমাপ, দিক ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর।

18. (0, 0), (8, 0) ও (0, 4) বিন্দু তিনটির চারিদিকে একটি বলের ভ্রামকসমূহ যথাক্রমে 20, -12 ও 32 গ্রাম সেন্টিমিটার। বলটি x-অক্ষকে কোথায় ছেদ করে এবং অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল দিকে উহার উপাংশগুলি নির্ণয় কর।

19. a এবং b দৈর্ঘ্যের দুইটি ভারী সমদণ্ড AB ও BC-র ভার উহাদের দৈর্ঘ্যের সহিত সমানুপাতিক। B প্রান্তে উহারা দৃঢ়ভাবে এরূপে সংযুক্ত যে $\angle ABC$ একটি সমকোণ। সংযুক্ত দণ্ড দুইটিকে A বিন্দু হইতে ঝুলান হইল। প্রমাণ কর যে AB-র অনুভূমিক দিকের সহিত নতি θ হইলে,

$$\cot\theta = \frac{b^2}{a^2+2ab}$$

20. P, Q এবং R বল তিনটির ক্রিয়ারেখা ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ বাহু বরাবর এবং ইহাদের লব্ধি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র দিয়া যায়।

প্রমাণ কর যে, $P+Q+R=0$.

21. পূর্ব প্রশ্নের লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা যদি

(i) অন্তঃকেন্দ্রের পরিবর্তে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রগামী হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $P\cos A+Q\cos B+R\cos C=0$.

(ii) অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র উভয় বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়,

তবে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{P}{\cos B-\cos C}=\dfrac{Q}{\cos C-\cos A}=\dfrac{R}{\cos A-\cos B}$

22. প্রশ্ন 20-র লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা যদি ত্রিভুজের (i) অন্তঃকেন্দ্র এবং (ii) ভরকেন্দ্র উভয় বিন্দু দিয়া যায়,

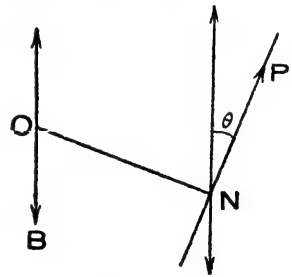
তবে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{P}{a(b-c)}=\dfrac{Q}{b(c-a)}=\dfrac{R}{c(a-b)}$.

(ii) লম্ব বিন্দু এবং পরিকেন্দ্রের মধ্য দিয়া যায়,

তবে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{P}{(b^2-c^2)\cos A}=\dfrac{Q}{(c^2-a^2)\cos B}=\dfrac{R}{(a^2-b^2)\cos C}$

§ 5·8. একটি অক্ষের চারিদিকে ভ্রামক :

মনে কর কোন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল একটি বল P এবং $\overleftrightarrow{AB}$ ঐ বস্তুর একটি স্থির অক্ষ।

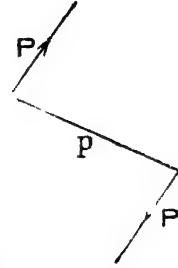
মনে কর ON, P-র ক্রিয়ারেখা এবং $\overleftrightarrow{AB}$-এর ক্ষুদ্রতম দূরত্ব (shortest distance). এক্ষণে, N বিন্দুর ভিতর দিয়া $\overleftrightarrow{AB}$-র সমান্তরাল সরলরেখা টান ; মনে কর এই সমান্তরাল সরলরেখা ও P-র ক্রিয়ারেখা θ কোণে নত।

চিত্র 52

এক্ষণে, $P.\sin\theta.ON$-কে $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার চারিদিকে P-বলের ভ্রামকের পরিমাণ বলা হয়। ভ্রামকের চিহ্ন, বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকের ন্যায় ঠিক করা হয়। আবার ভ্যারিগণনের উপপাদ্যের ন্যায় কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত একাধিক বলের একটি লব্ধিবল থাকিলে, ঐ বস্তুর কোন অক্ষের চারিদিকে বলসমূহের ভ্রামকের বৈজিক যোগফল ঐ অক্ষের চারিদিকে লব্ধিবলের ভ্রামকের সমান হয়।

ষষ্ঠ অধ্যায়

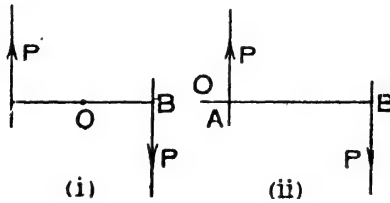
যুগ্মবল (Couple)

§ 6·1. **যুগ্মবল :** একই রেখায় ক্রিয়াশীল নয় এইরূপ দুইটি সমান ও অসদৃশ সমান্তরাল বলকে একটি **যুগ্মবল** বলে। কোন যুগ্মবলের বল দুইটির ক্রিয়ারেখাদ্বয়ের লম্বদূরত্বকে যুগ্মবলটির **বাহু** (Arm) বলে।

কোন যুগ্মবলের বলদ্বয় P, P এবং উহার বাহু p হইলে যুগ্মবলটিকে সাধারণতঃ (P, p) দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

চিত্র 53

§ 6·2. উপপাদ্য। **কোন যুগ্মবলের সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর চারিদিকে যুগ্মবলের বল দুইটির ভ্রামকের বৈজিক যোগফল ধ্রুবক।**

[The algebraic sum of the moments of the forces constituting a couple about any point in the plane of the couple is constant.]

মনে কর (P, p) একটি যুগ্মবল এবং O উহার সমতলের যে কোন বিন্দু। O বিন্দু হইতে যুগ্মবলের বাহু দুইটির ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব অঙ্কন কর। মনে কর এই লম্ব ক্রিয়ারেখা দুইটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং AB যুগ্মবলের বাহু এবং AB $= p$.

চিত্র 54

প্রথমে মনে কর O বিন্দু বল দুইটির একই দিকে অবস্থিত। [চিত্র (ii)]

এক্ষণে P, P বল দুইটির O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক দুইটির বৈজিক যোগফল $=$ P.OA $-$ P.OB $=$ P.(OA $-$ OB) $= -$ P.AB $= -$ P.p $=$ ধ্রুবক।

এইবার মনে কর O বিন্দু বল দুইটির বিপরীত দিকে অবস্থিত। সুতরাং বল দুইটির O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকদ্বয়ের বৈজিক যোগফল

$= -$ P.OA $-$ P.OB $= -$ P(OA $+$ OB) $= -$ P.AB $= -$ P.p $=$ ধ্রুবক।

অনুসিদ্ধান্ত। যেহেতু P ও p কোনটিই শূন্য হইতে পারে না,

$\therefore$ $P.p \neq 0$.

সুতরাং কোন যুগ্মবলের বল দুইটির ভ্রামকদ্বয়ের বৈজিক যোগফল শূন্য হইতে পারে না।

§ 6·3. **যুগ্মবলের ভ্রামক (Moment of a couple) :**

কোন যুগ্মবল (P, p)-র একটি বল P ও উহার বাহুর দৈর্ঘ্য p-র গুণফল P.p-কে যুগ্মবলটির ভ্রামক বলা হয়।

সুতরাং § 6·2. হইতে পাই, কোন যুগ্মবলের বল দুইটির যুগ্মবলের সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক দুইটির বৈজিক যোগফল যুগ্মবলের ভ্রামকের সমান। এই বৈজিক যোগফল ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইলে যুগ্মবলের ভ্রামককেও যথাক্রমে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক বলা হয়। আবার যুগ্মবলের ভ্রামকের এককও কোন বিন্দুর চারিদিকে কোন বলের ভ্রামকের একক দ্বারা ঠিক করা হয়।

§ 6·4. **যুগ্মবলের ভ্রামকের সম্বন্ধে ভৌত ধারণা (Physical concept of the moment of a couple) :**

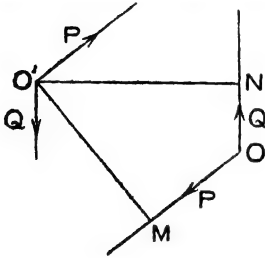
কোন যুগ্মবল কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত হইলে বস্তুটিকে সাম্যাবস্থায় রাখিতে পারে না। কারণ, বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকিলে উহার উপর প্রযুক্ত বল দুইটির ভ্রামকের বৈজিক যোগফল শূন্য হইবে ; কিন্তু § 6·2-এর অনুসিদ্ধান্ত-1 অনুযায়ী এই বৈজিক যোগফল শূন্য হইতে পারে না। কোন যুগ্মবল কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত হইলে যুগ্মবলের বল দুইটি বস্তুটিকে বিপরীত দিকে আবর্তিত করিতে চাহে এবং ফলে বস্তুটি আবর্তিত হয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় ঘড়িতে দম দেওয়ার সময় দুইটি আঙ্গুল দ্বারা ঘড়ির চাবিতে একটি যুগ্মবল প্রয়োগ করিয়া চাবিটি আবর্তিত করা হয়। লাট্টু ঘুরাইবার জন্য লাট্টুর উপর বৃদ্ধাঙ্গুষ্ঠ এবং অন্য একটি অঙ্গুলী দ্বারা লাট্টুর উপর যুগ্মবল প্রয়োগ করা হয়।

§ 6·5. **সমান ফলদায়ী যুগ্মবল (Equivalent Couples) :**

প্রতিজ্ঞা। একই সমতলে একটি দৃঢ় বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল দুইটি যুগ্মবলের ভ্রামক সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে, যুগ্মবল দুইটি পরস্পরকে অপসারিত করে।

[Two coplanar couples acting on a rigid body cancel each other if their moments be equal but of opposite signs.]

মনে কর একটি দৃঢ় বস্তুর উপর একই সমতলে ক্রিয়াশীল দুইটি যুগ্মবল (P, p) ও (Q, q) এবং উহাদের ভ্রামক P.p ও Q.q সমান ও বিপরীত

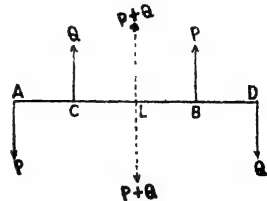
প্রথমে মনে কর P ও Q বলসমূহ পরস্পর সমান্তরাল নয় এবং একটি যুগ্মবলের একটি বল P-এর ক্রিয়ারেখা অপর যুগ্মবলের একটি বল Q-এর ক্রিয়া-রেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করে। মনে কর অপর বল দুইটি P ও Q-এর ক্রিয়ারেখাদ্বয় পরস্পরকে O′ বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু (P, p) এবং (Q, q) দুইটি যুগ্মবল, অতএব O বিন্দুগামী বল দুইটির ক্রিয়ারেখা দুইটি O′ বিন্দু দিয়া যাইবে না। এক্ষণে O বিন্দুগামী বলদ্বয়ের উপর O′M ও O′N লম্ব টান। ∴ O′M$=p$ এবং O′N$=q$.

চিত্র 55

এক্ষণে, O′ বিন্দুর চারিদিকে O বিন্দুগামী বল দুইটির ভ্রামক যথাক্রমে P.O′M ও Q.O′N অর্থাৎ P.p ও Q.q এবং উহারা বিপরীত চিহ্ন যুক্ত সুতরাং O′ বিন্দুর চারিদিকে O বিন্দুগামী বল দুইটির ভ্রামক দুইটির যোগফল শূন্য। অতএব এই বল দুইটির লব্ধিবল O′ বিন্দুগামী। অনুরূপে O′ বিন্দুতে প্রযুক্ত বল দুইটির লব্ধিবল O বিন্দুগামী। সুতরাং O′ ও O বিন্দুগামী বল দুইটির লব্ধিবল দুইটির ক্রিয়ারেখা ও অভিমুখিতা যথাক্রমে $\overrightarrow{O'O}$ ও $\overrightarrow{OO'}$. আবার যেহেতু O′ বিন্দুতে প্রযুক্ত বল দুইটি O বিন্দুতে প্রযুক্ত বল দুইটির সমান এবং একই কোণে নত, অতএব এই লব্ধিবল দুইটির পরিমাপ সমান।

সুতরাং লব্ধিবল দুইটি অর্থাৎ যুগ্মবল দুইটি পরস্পরকে অপসারিত করে।

এইবার মনে কর (P, p) যুগ্মবলের বল দুইটি, (Q, q) যুগ্মবলের বল দুইটির সমান্তরাল এবং ইহাদের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব একটি সরলরেখা বলগুলিকে A, B, C, D বিন্দুতে ছেদ করে। এক্ষণে, যেহেতু যুগ্মবল দুইটির ভ্রামক সমান,

অতএব P.AB$=$Q.CD$\cdots\cdots(1)$

মনে কর B ও C বিন্দুদ্বয়ে প্রযুক্ত সদৃশ, সমান্তরাল বল দুইটির লব্ধিবল P$+$Q, L বিন্দুতে প্রযুক্ত।

চিত্র 56

$\therefore \quad P.LB = Q.LC \cdots\cdots(2)$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই, $P.AL = Q.DL.$

সুতরাং A ও D বিন্দুতে প্রযুক্ত সদৃশ, সমান্তরাল বল দুইটির লব্ধিবল P+Q L বিন্দুতে প্রযুক্ত। কিন্তু এই দুইটি লব্ধিবলের অভিমুখিতা বিপরীত। অতএব লব্ধিবল দুইটি এবং সুতরাং যুগ্মবল দুইটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

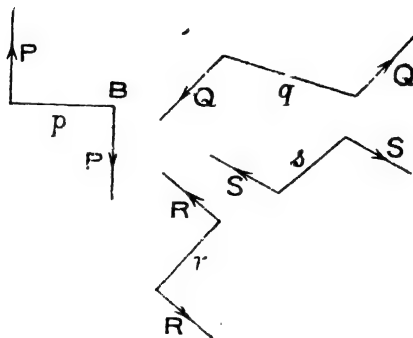
অনুসিদ্ধান্ত। উপরের প্রতিজ্ঞা হইতে নিম্নের গুরুত্বপূর্ণ অনুসিদ্ধান্তটি পাওয়া যায়। একই সমতলে ক্রিয়াশীল দুইটি যুগ্মবলের ভ্রামকের পরিমাণ সমান এবং একই চিহ্ন হইলে যুগ্মবল দুইটির একটির পরিবর্তে অপরটিকে লওয়া যাইবে।

উপপাদ্য। কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত একই সমতলে ক্রিয়মাণ একাধিক যুগ্মবলের লব্ধি একটি যুগ্মবল এবং এই লব্ধি-যুগ্মবলের ভ্রামক, যুগ্মবল সমূহের ভ্রামকগুলির বৈজিক যোগফলের সমান।

[The resultant of any number of coplanar couples acting on a body is a couple whose moment is equal to the algebraic sum of the moments of the couples.]

মনে কর কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত একই সমতলে ক্রিয়মাণ কয়েকটি যুগ্মবল (P, p), (Q, q), (R, r), (S, s) ইত্যাদি।

(P, p) যুগ্মবলের ভ্রামক $P.p$, (Q, q) যুগ্মবলের ভ্রামক $Q.q = \frac{Q.q}{p}.\, p.$

সুতরাং যদি $\left(\frac{Qq}{p}, p\right)$ যুগ্মবলের বল দুইটির ক্রিয়ারেখা (P, p) যুগ্মবলের

চিত্র 57

ক্রিয়ারেখা হয় এবং অভিমুখিতা এইরূপ হয় যে, $\left(\frac{Qq}{p}, p\right)$ ও (Q, q) যুগ্মবল

দুইটির ভ্রামকের একই চিহ্ন হয়, তবে (Q, q) যুগ্মবলের পরিবর্তে $\left(\frac{Qq}{p}, p\right)$ যুগ্মবলটি লওয়া যাইবে।

অনুরূপে (R, r), (S, s) ইত্যাদি যুগ্ম বলের পরিবর্তে যথাক্রমে $\left(\frac{Rr}{p}, p\right)$ $\left(\frac{Ss}{p}, p\right)$ ইত্যাদি যুগ্মবল লওয়া হইল। প্রত্যেক ক্ষেত্রে নূতন যুগ্মবলগুলির বলসমূহের ক্রিয়ারেখাগুলি (P, p) যুগ্মবলের ক্রিয়ারেখা বরাবর লওয়া হইল।

সুতরাং এক্ষণে যুগ্মবল-সমূহের পরিবর্তে একটি যুগ্মবল পাইলাম যাহার বাহু p এবং বলদ্বয়ের প্রত্যেকটি $\left(P+\frac{Qq}{p}+\frac{Rr}{p}+\frac{Ss}{p}+\cdots\right)$.

[এখানে প্রত্যেক ভ্রামককে তাহার যথাযথ চিহ্নসহ লইতে হইবে]

অতএব লব্ধি যুগ্মবলের ভ্রামক

$$=\left(P+\frac{Qq}{p}+\frac{Rr}{p}+\frac{Ss}{p}+\cdots\right).p$$

$$=P.p+Q.q+R.r+S.s+\cdots$$

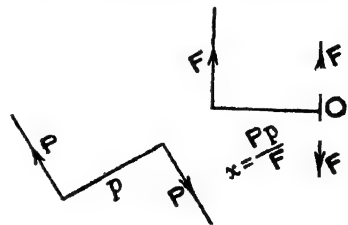
=যুগ্মবলগুলির ভ্রামকসমূহের বৈজিক যোগফল।

সুতরাং একাধিক যুগ্মবলের লব্ধি একটি যুগ্মবল এবং যুগ্মবলগুলির ভ্রামক-সমূহের বৈজিক যোগফল লব্ধি যুগ্মবলের ভ্রামকের সমান।

§ 6·6. একটি যুগ্মবল ও একটি বলের লব্ধি (Resultant of a couple and a force) :

উপপাদ্য। একই সমতলে ক্রিয়মাণ একটি যুগ্মবল ও একটি বলের লব্ধি একটি বল যাহা প্রদত্ত বলের সমান ও সমান্তরাল।

মনে কর একটি যুগ্মবল (P, p) এবং একটি বল F একই সমতলে ক্রিয়মাণ। এক্ষণে প্রদত্ত F বলের ক্রিয়ারেখায় উহার বিপরীত অভিমুখিতায় একটি বল F এবং ইহা হইতে $x=\frac{Pp}{F}$ দূরত্বে আর একটি সমান, অসদৃশ সমান্তরাল বল F, প্রদত্ত বলের সেইদিকে প্রয়োগ কর যাহাতে (F, x) যুগ্মবলের ভ্রামক এবং (P, p) যুগ্মবলের ভ্রামক একই চিহ্নযুক্ত হয়। এখানে (F, x) যুগ্মবলের

চিত্র 58

ভ্রামক$=F.x=F.\frac{Pp}{F}=P.p.$ সুতরাং প্রদত্ত যুগ্মবল (P, p) ও (F, x) যুগ্মবল দুইটি সমান ফলদায়ী। ∴ (P, p) যুগ্মবল ও F বলের লব্ধিবল (F, x)

যুগ্মবল ও F বলের লব্ধিবল। এখন প্রদত্ত বল F-এর ক্রিয়ারেখায় ক্রিয়মাণ দুইটি সমান ও বিপরীত বল F পরস্পরকে অপসারিত করিবে। অতএব প্রদত্ত যুগ্মবল ও বলের স্থলে প্রদত্ত বলের ক্রিয়ারেখা হইতে $x=\frac{Pp}{F}$ দূরত্বে একটি সমান্তরাল বল F রহিল এবং ইহাই নির্ণেয় লব্ধি।

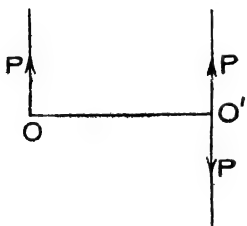
অনুসিদ্ধান্ত 1. একটি যুগ্মবল ও একটি বল কখনও সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে না।

অনুসিদ্ধান্ত 2. কোন যুগ্মবলের বল দুইটির লব্ধিবল থাকিতে পারে না। কারণ, যদি কোন যুগ্মবলের বল দুইটির একটি লব্ধিবল F থাকে, তবে ঐ যুগ্মবলও F বলের সমান এবং বিপরীতমুখী বল সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

§ 6·7 কোন বস্তুর কোন বিন্দুতে প্রযুক্ত একটি বলকে একটি সমান, সদৃশ ও সমান্তরাল বল এবং একটি যুগ্মবল দ্বারা প্রতিস্থাপিত করা যায়।

[A force acting at a point of a body can be replaced by an equal and parallel force together with a couple.]

মনে কর কোন বস্তুর উপর একটি বল P, O বিন্দুতে প্রযুক্ত। মনে কর O′ অপর যে কোন বিন্দু।

এক্ষণে O′ বিন্দুতে প্রদত্ত বল P-র সমান ও সমান্তরাল দুইটি বল একটি সদৃশ ও অপরটি অসদৃশ প্রয়োগ কর। এই বল দুইটি পরস্পর সমান, বিপরীতমুখী এবং উহাদের ক্রিয়ারেখা অভিন্ন; সুতরাং উহারা পরস্পরকে অপসারিত করে।

চিত্র 59

এক্ষণে O বিন্দুতে প্রযুক্ত বল P এবং O′ বিন্দুতে প্রযুক্ত অসদৃশ সমান্তরাল বল P একটি যুগ্মবল গঠন করে। সুতরাং O বিন্দুতে প্রযুক্ত বল P এবং এই যুগ্মবল ও O′ বিন্দুতে প্রযুক্ত সদৃশ সমান্তরাল বল P সমানফলদায়ী। অর্থাৎ প্রদত্ত বলকে একটি যুগ্মবল এবং একটি সমান, সদৃশ ও সমান্তরাল বলদ্বারা প্রতিস্থাপিত করা যায়।

এক্ষণে, এই যুগ্মবলের ভ্রামক $-P.OO'$ এবং O বিন্দুতে প্রযুক্ত প্রদত্ত বলের O′ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক $-P.OO'$.

সুতরাং নির্ণেয় যুগ্মবলটির ভ্রামক O′ বিন্দুর চারিদিকে প্রদত্ত বলের ভ্রামকের সমান।

§ 6·8 যদি কোন সমতলে ক্রিয়মাণ একাধিক বলকে একটি যুগ্মবল দ্বারা প্রতিস্থাপিত করা যায়, তবে ঐ সমতলের যে কোন বিন্দুর চারিদিকে বলসমূহের ভ্রামকগুলির বৈজিক যোগফল ধ্রুবক এবং ঐ যুগ্মবলের ভ্রামকের সমান হইবে।

[If a number of forces acting in one plane can be reduced to a single couple, then the algebraic sum of the moments of the forces about any point in their plane is constant and is equal to the moment of the couple.]

মনে কর একই সমতলে ক্রিয়মাণ P_1, P_2, P_3, ইত্যাদি বলসমূহকে একটি যুগ্মবলে পরিণত করা যায়। প্রমাণ করিতে হইবে যে, বল সমূহের সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর চারিদিকে বলসমূহের ভ্রামকগুলির বৈজিক যোগফল ধ্রুবক এবং ঐ যুগ্মবলের ভ্রামকের সমান।

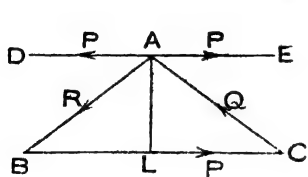
প্রমাণ। মনে কর প্রদত্ত বলসমূহের সমতলে O যে কোন বিন্দু। এক্ষণে § 6·7 অনুসারে প্রত্যেক বলকে একটি যুগ্মবল এবং O বিন্দুতে প্রযুক্ত একটি সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বারা প্রতিস্থাপিত করা যায়। প্রত্যেকক্ষেত্রে প্রত্যেক যুগ্মবলের ভ্রামক ধ্রুবক এবং অনুরূপ প্রদত্ত বলের O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকের সমান।

সুতরাং বলসমূহকে কতকগুলি যুগ্মবল এবং O বিন্দুতে প্রযুক্ত কতকগুলি বলে পরিণত করা হইল।

এক্ষণে এই যুগ্ম বলসমূহের লব্ধি একটি যুগ্মবল যাহার ভ্রামক যুগ্মবল-সমূহের ভ্রামকগুলির বৈজিক যোগফল অর্থাৎ ধ্রুবক এবং প্রদত্ত বলসমূহের O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকগুলির বৈজিক যোগফলের সমান। আবার O বিন্দুতে প্রযুক্ত বলসমূহ সাম্যাবস্থায় না থাকিলে, উহাদের একটি লব্ধিবল থাকিবে। সেক্ষেত্রে প্রদত্ত বলসমূহ একটি যুগ্মবল ও এই লব্ধিবলের সহিত সমান ফলদায়ী হইবে। কিন্তু শর্তানুসারে প্রদত্ত বলসমূহ একটি যুগ্মবলের সহিত সমান ফলদায়ী এবং একটি যুগ্মবল ও একটি বলের লব্ধি একটি যুগ্মবল হয় না (§ 6·6)। অতএব O বিন্দুতে প্রযুক্ত বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকিবে এবং প্রদত্ত বলসমূহ একটি যুগ্মবলে পরিণত হইবে যাহার ভ্রামক বলসমূহের O বিন্দুর চারিদিকে বলসমূহের ভ্রামকগুলির বৈজিক যোগফলের সমান। অর্থাৎ প্রদত্ত বলসমূহের O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকসমূহের বৈজিক যোগফল, যুগ্মবলটির ভ্রামকের সমান অর্থাৎ ধ্রুবক।

§ 6·9. একটি দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত তিনটি বলের মান, দিক ও অভিমুখিতা একটি ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহুদ্বারা প্রকাশ যোগ্য হইলে বল তিনটি একটি যুগ্মবলের সমান হয়। এই যুগ্মবলের ভ্রামকের পরিমাণ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

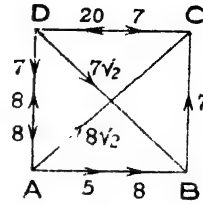
একটি দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত তিনটি বল P, Q ও R-এর মান, দিক ও অভিমুখিতা একটি ত্রিভুজ ABC-র ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহু $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ দ্বারা প্রকাশিত হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, বল তিনটি একটি যুগ্মবলের সমান এবং যুগ্মবলটির ভ্রামক ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

A বিন্দুর ভিতর দিয়া BC-র সমান্তরাল DE সরলরেখা অঙ্কন কর এবং A বিন্দুতে P বলের সমান সমান্তরাল এবং পরস্পর বিপরীত অভিমুখিতা-বিশিষ্ট

59(ক)

দুইটি বল P, Pকে $\overrightarrow{AE}$ ও $\overrightarrow{AD}$ রেখায় প্রয়োগ কর। যেহেতু সমান বল দুইটি একই রেখায় পরস্পর বিপরীত অভিমুখিতায় ক্রিয়াশীল, সুতরাং উহারা পরস্পরকে অপসারিত করে এবং উহাদের প্রয়োগে দৃঢ় বস্তুটির অবস্থার কোন পরিবর্তন হইবে না। এখানে A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $\overrightarrow{AE}$ রেখায় P, $\overrightarrow{CA}$ রেখায় Q এবং $\overrightarrow{AB}$ রেখায় R বল তিনটি ABC ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ বাহুত্রয় দ্বারা প্রকাশযোগ্য। সুতরাং বলের ত্রিভুজসূত্র অনুসারে বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে। অবশিষ্ট দুইটি বল $\overrightarrow{BC}$ রেখায় P এবং $\overrightarrow{AD}$ রেখায় P পরস্পর সমান, সমান্তরাল ও অসদৃশ হওয়ায় একটি যুগ্মবল গঠন করে। এই যুগ্মবলের ভ্রামক $= P \times AL$ [AL, A বিন্দু হইতে BC-র উপর লম্ব] $= BC \times AL = 2 \times \frac{1}{2}BC \times AL = 2m\triangle ABC$.

উদাহরণ 1. ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 10 সে. মি.। $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ এবং $\overrightarrow{DA}$ বাহু বরাবর 5, 7, 20, 8 কে. জি. ভার বল ক্রিয়মাণ এবং $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{DB}$ বরাবর $8\sqrt{2}$ এবং $7\sqrt{2}$ কেজি. ভার বল ক্রিয়া করে। বলগুলির লব্ধিবল নির্ণয় কর।

$\vec{AC}$ বরাবর $8\sqrt{2}$ কে.জি. ভার বলের $\vec{AB}$ ও $\vec{AD}$ বরাবর $8\sqrt{2}\cos 45°$, $8\sqrt{2}\cos 45°$ বা, $8\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}$, $8\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, 8, 8 কেজি. দুইটি উপাংশ। অনুরূপে $\vec{DB}$ বরাবর $7\sqrt{2}$ কে.জি. বলের $\vec{DC}$ ও $\vec{DA}$ বরাবর 7 ও 7 কে. জি. দুইটি উপাংশ।

চিত্র 60

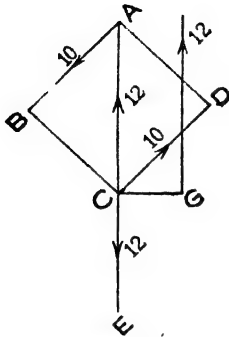
সুতরাং প্রদত্ত বলসমূহকে $\vec{AB}$ বরাবর $5+8=13$ কে. জি. বল; $\vec{BC}$ বরাবর 7 কে.জি. বল; $\vec{CD}$ বরাবর $20-7=13$ কে.জি. বল এবং $\vec{DA}$ বরাবর $7+8-8=7$ কে.জি. বল পরিমাণের চারিটি বলে পরিণত করা যায়।

আবার, $\vec{AB}$ ও $\vec{CD}$ বরাবর 13 কে. জি. পরিমাপের সমান, সমান্তরাল ও অসদৃশ বল দুইটি একটি যুগ্মবল যাহার বাহু 10 সে.মি. এবং ভ্রামক $13.10 = 130$ কে.জি. সে.মি.। অনুরূপে $\vec{BC}$ ও $\vec{DA}$ বরাবর 7 কে.জি. পরিমাপের সমান, সমান্তরাল ও অসদৃশ বল দুইটি একটি যুগ্মবল যাহার বাহু 10 সে. মি. এবং ভ্রামক $7.10=70$ কেজি. সে.মি.।

সুতরাং প্রদত্ত বলসমূহ দুইটি যুগ্মবলের সমান এবং এই দুইটি যুগ্মবল আবার একটি লব্ধি-যুগ্মবলের সমান যাহার ভ্রামক $(130+70)$ বা 200 কেজি. সে. মি.।

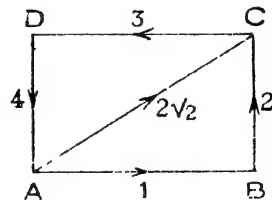
উদা. 2. 10 কে. জি, পরিমাপের দুইটি বল যথাক্রমে ABCD বর্গক্ষেত্রের $\vec{AB}$ ও $\vec{CD}$ বাহু বরাবর A হইতে B এবং C হইতে D-এর দিকে ক্রিয়মাণ; 12 কেজি. পরিমাপের একটি তৃতীয় বল $\vec{CA}$ বরাবর ক্রিয়া করে। বল তিনটির লব্ধিবল নির্ণয় কর।

$\vec{AB}$ ও $\vec{CD}$ বরাবর ক্রিয়মাণ প্রত্যেকটি 10 কে. জি. পরিমাপের অসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটি একটি যুগ্মবল, যাহার ভ্রামক 10.AD. এক্ষণে, এই ভ্রামককে একটি ধনাত্মক ভ্রামক (কারণ, প্রদত্ত যুগ্মবলের ভ্রামক ধনাত্মক) বিশিষ্ট একটি যুগ্মবল (12, $\frac{5}{6}$AD) দ্বারা প্রতিস্থাপিত করা যায়। কারণ, (12, $\frac{5}{6}$AD) যুগ্মবলের ভ্রামক $12.\frac{5}{6}AD=10AD$.

এক্ষণে, এই যুগ্মবলটি এরূপে লওয়া হইল যে, 12 কেজি. পরিমাপের একটি বল প্রদত্ত বলের বিপরীত দিকে অর্থাৎ $\vec{CE}$ বরাবর ক্রিয়া করে। অপর বলটি প্রদত্ত বলের সদৃশ, সমান্তরাল এবং উহাদের ক্রিয়া রেখাদ্বয়ের দূরত্ব $\frac{5}{6}$AD, এবং নূতন বলটির ক্রিয়ারেখা $\vec{AC}$-র সেইদিকে যাহাতে যুগ্মবলটির ভ্রামক ধনাত্মক হয়। সুতরাং এখন আমরা প্রদত্ত যুগ্মবল ও বলের পরিবর্তে C বিন্দুতে $\vec{CA}$ ও $\vec{CE}$ বরাবর ক্রিয়মাণ দুইটি বল 12 কে.জি., 12 কে.জি. এবং G বিন্দুতে ক্রিয়মাণ একটি সমান ও সমান্তরাল বল পাইলাম। C বিন্দুতে ক্রিয়মাণ সমান ও বিপরীত বল দুইটি পরস্পরকে অপসারিত করে। সুতরাং প্রদত্ত বল ও যুগ্মবলের লব্ধিবল 12 কে.জি. পরিমাপের একটি বল যাহা প্রদত্ত বলের সদৃশ ও সমান্তরাল।

চিত্র 61

উদা. 8. 1, 2, 3, 4, ও $2\sqrt{2}$ পরিমাপের পাঁচটি বল যথাক্রমে ABCD বর্গক্ষেত্রের $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$ বাহু এবং $\vec{AC}$ কর্ণ বরাবর ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে বলসমূহের লব্ধি একটি যুগ্মবল এবং উহার ভ্রামক নির্ণয় কর। [C. U. 1947]

$\vec{AC}$ বরাবর $2\sqrt{2}$ পরিমাপের বলের $\vec{AB}$ ও $\vec{AD}$ বরাবর উপাংশ যথাক্রমে $2\sqrt{2}\cos 45^\circ = 2\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2$ এবং $2\sqrt{2}\sin 45^\circ = 2\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2.$

সুতরাং প্রদত্ত বলসমূহকে $\vec{AB}$ বরাবর $1+2=3$ পরিমাপের একটি বল, $\vec{BC}$ বরাবর 2 পরিমাপের, $\vec{CD}$ বরাবর 3 পরিমাপের ও DA বরাবর $4-2=2$ পরিমাপের বলে পরিণত করা যায়। এক্ষণে এই চারিটি বল দুইটি যুগ্মবল (*i*) $\vec{AB}$ ও $\vec{CD}$ বরাবর প্রত্যেকটি 3 পরিমাপের বল ও (*ii*) $\vec{BC}$ ও $\vec{DA}$ বরাবর প্রত্যেকটি 2 পরিমাপের বল। এক্ষণে এই যুগ্মবল দুইটির ভ্রামক $3a$ ও $2a$ [বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য a মনে করিয়া]

চিত্র 62

আবার, এই যুগ্মবল দুইটির লব্ধি একটি যুগ্মবল যাহার ভ্রামক $3a+2a=5a$. সুতরাং প্রদত্ত বলসমূহকে $5a$ ভ্রামকবিশিষ্ট একটি যুগ্মবলে পরিণত করা যায়।

উদা. 4. 4, 6, 4, 6 কে. জি. ভারের চারিটি বল যথাক্রমে ABCD রম্বসের $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ এবং $\vec{DA}$ বাহু বরাবর প্রযুক্ত হইয়াছে। রম্বসের প্রত্যেক বাহু 6 মিটার দীর্ঘ এবং A কোণের পরিমাপ 60°। লব্ধি যুগ্মবলের ভ্রামক নির্ণয় কর।

BC ও AD-র দূরত্ব নির্ণয়ের জন্য B হইতে AD-র উপর BL লম্ব টান।

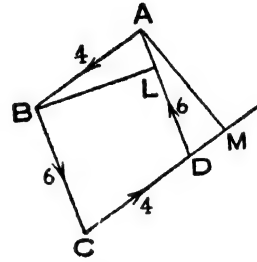
একণে $BL=AB \sin A=6. \sin 60^\circ=\frac{6.\sqrt{3}}{2}$ মি. $=3\sqrt{3}$ মি.।

আবার AB ও CD-র দূরত্ব $AM=AD \sin \angle ADM=6 \sin 60^\circ$

$$=\frac{6\sqrt{3}}{2} \text{ মি.}=3\sqrt{3} \text{ মি.।}$$

একণে $\vec{AB}$ ও $\vec{CD}$ বরাবর ক্রিয়মাণ 4 কে. জি. পরিমাপের সমান, অসদৃশ. সমান্তরাল বল দুইটি একটি যুগ্মবল যাহার ভ্রামক $4.AM=4.3\sqrt{3}$ কে. জি. মিটার $=12\sqrt{3}$ কে. জি. মিটার।

চিত্র 63

আবার, $\vec{BC}$ ও $\vec{DA}$ বরাবর ক্রিয়মাণ 6 কে. জি. পরিমাপের সমান, অসদৃশ, সমান্তরাল বল দুইটি একটি যুগ্মবল যাহার ভ্রামক $6. BL=6.3\sqrt{3}$ কে. জি. মিটার $=18\sqrt{3}$ কে. জি. মিটার।

একণে, এই যুগ্মবল দুইটির লব্ধি একটি যুগ্মবল যাহার ভ্রামক $(12\sqrt{3}+18\sqrt{3})=30\sqrt{3}$ কে.জি. মিটার।

অতএব প্রদত্ত বলসমূহের লব্ধি একটি যুগ্মবল যাহার ভ্রামক $30\sqrt{3}$ কে.জি. মিটার।

উদা. 5. একটি যুগ্মবলের বল দুইটির প্রয়োগবিন্দু A ও B এবং ভ্রামক G. যদি বল দুইটির ক্রিয়ারেখা 90° কোণে আবর্তিত হয়, তবে যুগ্ম বলটির ভ্রামক হয় H. যখন বল দুইটির ক্রিয়ারেখা AB-র উপর লম্ব হয়, প্রমাণ কর যে তখন যুগ্ম বলটির ভ্রামক হয় $\sqrt{G^2+H^2}$.

মনে কর বল দুইটির প্রত্যেকটির পরিমাপ P এবং প্রথমে উহারা AB-র সহিত θ কোণে নত।

সুতরাং প্রথমে যুগ্মবলের বাহু AB $\sin\theta$ এবং ভ্রামক P.AB $\sin\theta$

$\therefore \quad G = P.AB\sin\theta \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(1)$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বাহু AB $\sin(90^\circ+\theta) = AB\cos\theta$

এবং ভ্রামক P.AB $\cos\theta$.

$\therefore \quad H = P.AB\cos\theta \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(2)$

তৃতীয় ক্ষেত্রে বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখা AB-র উপর লম্ব হওয়ায়, যুগ্মবলের বাহু AB এবং ভ্রামক P.AB.

এক্ষণে (1) ও (2) হইতে পাই $G^2 + H^2 = P^2AB^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= P^2.AB^2.$

$\therefore \quad P.AB = \sqrt{G^2 + H^2}.$

সুতরাং তৃতীয় ক্ষেত্রে যুগ্মবলের ভ্রামক $= \sqrt{G^2+H^2}$.

উদা. 6. দুইটি সদৃশ, সমান্তরাল বল P ও Q-এর সমতলে একটি যুগ্মবল (F, a) ক্রিয়াশীল। প্রমাণ কর যে ইহাদের সম্মিলিত ক্রিয়ার ফলে P এবং Q-এর লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা $\frac{Fa}{P+Q}$ পরিমাণ দূরে সরিয়া যাইবে।

মনে কর সদৃশ সমান্তরাল P ও Q বল দুইটির প্রয়োগবিন্দু যথাক্রমে A ও B এবং উহাদের লব্ধিবল P+Q-এর প্রয়োগ বিন্দু C. এক্ষণে § 6·6 অনুসারে, এই বল P+Q ও যুগ্মবল (F, a)-র লব্ধিবল (P+Q) বলের সদৃশ, সমান্তরাল আর একটি বল P+Q, যাহার প্রয়োগবিন্দু D এবং $CD = \frac{Fa}{P+Q}$.

উদা. 7. P, Q, R তিনটি বলের প্রয়োগবিন্দু যথাক্রমে A, B ও C. বল তিনটি একই ক্রমে ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের স্পর্শক তিনটি বরাবর ক্রিয়াশীল। যদি বলসমূহকে একটি যুগ্মবলে পরিণত করা যায়, তবে প্রমাণ কর যে, $P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$.

মনে কর ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের A, B ও C বিন্দুতে স্পর্শকত্রয় যথাক্রমে $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{FD}$ ও $\overleftrightarrow{DE}$.

এক্ষণে $m\angle EAC = m\angle B$ (একান্তর বৃত্তাংশস্থিত) $= m\angle ECA$.

$\therefore$ $\triangle AEC$ হইতে পাই, $m\angle E = 180^\circ - 2m\angle B$.

অনুরূপে $m\angle F=180^\circ-2m\angle C$ এবং $m\angle D=180^\circ-2m\angle A$.

এক্ষণে, মনে কর DEF ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R′ এবং DL ⊥ EF.

$\therefore\quad DL=DE\sin(180^\circ-2B)$

$=2R'\sin F\sin 2B$

$$\left[\because\quad \triangle DEF\text{এ } \frac{EF}{\sin D}=\frac{FD}{\sin E}=\frac{DE}{\sin F}=2R'\right]$$

$=2R'\sin 2C\sin 2B.$

অনুরূপে EM ও FN যথাক্রমে FD ও DE-র উপর লম্ব হইলে,

$EM=2R'\sin 2C\sin 2A$ ও $FN=2R'\sin 2A\sin 2B$.

এক্ষণে যেহেতু, P, Q, R বল তিনটিকে একটি যুগ্মবলে পরিণত করা যায়,

∴ বল তিনটির D, E, F বিন্দু তিনটির চারিদিকে ভ্রামকগুলির বৈজিক যোগফল তিনটি ধ্রুবক। এক্ষণে D বিন্দুর চারিদিকে বল তিনটির ভ্রামকগুলির বৈজিক যোগফল$=P.DL+Q.0+R.0$

$=P.2R'\sin 2B\sin 2C.$

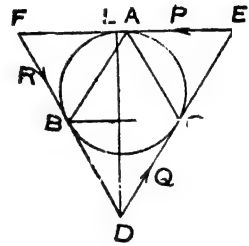
অনুরূপে E ও F বিন্দুর চারিদিকে বল তিনটির ভ্রামকগুলির বৈজিক যোগফল যথাক্রমে,

$Q.2R'\sin 2C\sin 2A$ এবং $R.2R'\sin 2A.\sin 2B$

চিত্র 64

$\therefore\quad P.2R'\sin 2B\sin 2C$

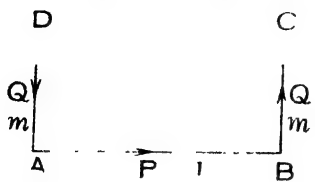
$Q.2R'\sin 2C\sin 2A=R.2R'\sin 2A\sin 2B$

বা, $\dfrac{P}{\sin 2A}=\dfrac{Q}{\sin 2B}=\dfrac{R}{\sin 2C}$.

দ্রী. 8. ABCD আয়তক্ষেত্রের $AB=CD=l$ এবং $BC=DA=m$. $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}$ ও $\vec{DA}$ বরাবর P, Q, P ও Q পরিমাপের চারিটি বল ক্রিয়াশীল। প্রমাণ কর A এবং C বিন্দুতে প্রযুক্ত বলগুলির লব্ধিবল দুইটির লম্ব দূরত্ব

$$=\frac{Ql+Pm}{\sqrt{P^2+Q^2}}$$

A বিন্দুতে প্রযুক্ত P ও Q বল দুইটির লব্ধি বল A বিন্দুতে প্রযুক্ত $\sqrt{P^2+Q^2}$ এবং C বিন্দুতে প্রযুক্ত P ও Q বল দুইটিরও লব্ধিবল C বিন্দুতে প্রযুক্ত $\sqrt{P^2+Q^2}$. আবার এই লব্ধিবল দুইটির ক্রিয়ারেখা দুইটি $\vec{AB}$ ও $\vec{CD}$-র সহিত একই কোণে নত। সুতরাং লব্ধিবল দুইটি একটি যুগ্মবল

$(\sqrt{P^2+Q^2}, d)$ (মনে কর)।

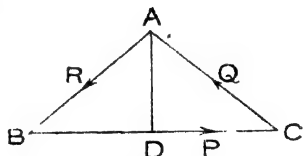
আবার, AB ও CD বরাবর ক্রিয়াশীল P পরিমাপের বল দুইটি একটি যুগ্মবল

চিত্র 65

(P, m) এবং $\vec{BC}$ ও $\vec{CD}$ বরাবর ক্রিয়াশীল Q পরিমাপের বল দুইটি একটি যুগ্মবল (Q, l). সুতরাং (P, m) ও (Q, l) যুগ্মবল দুইটির লব্ধিবল $(\sqrt{P^2+Q^2}.\,d)$ যুগ্মবল।

$$\therefore \quad Pm+Ql=\sqrt{P^2+Q^2}.d. \quad \text{বা,} \quad d=\frac{Pm+Ql}{\sqrt{P^2+Q^2}}.$$

সুতরাং লব্ধিবল দুইটির ক্রিয়ারেখা দুইটির দূরত্ব $\dfrac{Pm+Ql}{\sqrt{P^2+Q^2}}$

উদা. 9. একটি ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহু তিনটি বলের ক্রিয়ারেখা এবং বল তিনটি একটি যুগ্মবল গঠন করে। প্রমাণ কর যে ঐ বাহুত্রয় দ্বারা বল তিনটিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ বাহু যথাক্রমে তিনটি বল P, Q ও R এর ক্রিয়ারেখা অর্থাৎ উহাদের দিক ও অভিমুখিতা প্রকাশ করে। এখানে এই বল তিনটি একটি যুগ্ম বল গঠন করে। যেহেতু বল তিনটি একটি যুগ্ম বল গঠন করে, সেজন্য বল তিনটির A, B, C প্রত্যেক বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক সমূহের বৈজিক যোগফল সমান। এখানে, A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই, ভ্রামকগুলির বৈজিক যোগফল $=P.AD+Q.0+R0=P.AD$

65(ক)

(AD, BC-র উপর লম্ব।)

$$=P.2.\tfrac{1}{2}\frac{BC.AD}{BC}=P.\frac{2\Delta}{a} \quad (\Delta, \text{ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল})$$

অনুরূপে B ও C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকসমূহের বৈজিক যোগফল যথাক্রমে $Q.\dfrac{2\Delta}{b}$ ও $R.\dfrac{2\Delta}{c}$.

$$\therefore \quad P.\frac{2\Delta}{a}=Q.\frac{2\Delta}{c}=R.\frac{2\Delta}{c}, \text{ বা, } \frac{P}{a}=\frac{Q}{b}=\frac{R}{c}$$

সুতরাং বল তিনটির পরিমাপ, ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্যের সহিত সমানুপাতী। সুতরাং বল তিনটির পরিমাপ, দিক ও অভিমুখিতা ত্রিভুজটির ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহু তিনটির দ্বারা প্রকাশিত হয়।

প্রশ্নমালা 6

1. ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 10 সে. মি. ; $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ এবং $\vec{DA}$ বরাবর যথাক্রমে 1, 2, 8 এবং 5 কে. জি. ভারের চারিটি বল এবং $\vec{AC}$ ও $\vec{DB}$ বরাবর যথাক্রমে $5\sqrt{2}$ ও $2\sqrt{2}$ কে.জি. ভারের দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রমাণ কর যে বলসমূহ একটি যুগ্মবলের সহিত সমানফলদায়ী এবং এই সমানফলদায়ী যুগ্ম বলটির ভ্রামক নির্ণয় কর।

2. 3, 5, 3 এবং 5 পাউণ্ড ভারের চারিটি বল একটি বর্গক্ষেত্রের একই ক্রমে গৃহীত বাহু চারিটি বরাবর ক্রিয়াশীল। বলসমূহের লব্ধি নির্ণয় কর।
[C. U. 1932]

3. দুইটি যুগ্মবলের ভ্রামক দুইটি সমান পরিমাপের, কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত। যদি যুগ্মবল দুইটির বলগুলি একটি সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি বরাবর ক্রিয়াশীল হয়, তবে প্রমাণ কর যে যুগ্মবল দুইটির বলগুলির পরিমাপ সামান্তরিকটির বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সহিত সমানুপাতিক।

4. একটি চতুর্ভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহুগুলি বরাবর ক্রিয়াশীল চারটি বলকে একটি যুগ্মবলে পরিণত করা যায়। প্রমাণ কর যে, বলগুলি চতুর্ভুজটির বাহুগুলির সহিত সমানুপাতিক।

5. P এবং Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল। একটি অসদৃশ সমান্তরাল বল P + Q-এর ক্রিয়ারেখা P ও Q-এর ক্রিয়ারেখাদ্বয়ের মধ্যে একই সমতলে ঐ ক্রিয়ারেখাদ্বয় হইতে যথাক্রমে a ও b দূরত্বে অবস্থিত। লব্ধি-যুগ্মবলটির ভ্রামক নির্ণয় কর।

6. ABCD একটি আয়তক্ষেত্র এবং $AB = CD = l$ এবং $BC = DA = m$. P পরিমাপের দুইটি বল $\vec{AD}$ ও $\vec{CB}$ বরাবর এবং Q পরিমাপের দুইটি বল $\vec{AB}$ ও $\vec{CD}$ বরাবর ক্রিয়াশীল। প্রমাণ কর যে, A বিন্দুতে প্রযুক্ত P ও Q বলদ্বয়ের এবং C বিন্দুতে প্রযুক্ত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধিবল দুইটির ক্রিয়ারেখাদ্বয়ের দূরত্ব $\dfrac{Pl - Qm}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$.

7. একই সমতলে অবস্থিত ABCD ও EFGH দুইটি সামান্তরিক। $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ $\overline{CG}$ ও $\overline{DH}$ দ্বারা প্রকাশিত চারিটি বল ঐ সমতলে ক্রিয়াশীল। প্রমাণ কর যে বল চারিটির লব্ধি একটি যুগ্মবল।

8. একটি যুগ্মবল $(4, 2\frac{1}{2})$ এবং 5 একক পরিমাণ বলের লব্ধি নির্ণয় কর।

9. ছয়টি বল একটি সুষম ষড়্ভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহুগুলিদ্বারা প্রকাশিত। প্রমাণ কর যে বল ছয়টির লব্ধি একটি যুগ্মবল। যুগ্মবলটির ভ্রামক নির্ণয় কর।

10. A, B, C বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বলের ক্রিয়ারেখা ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর লম্ব এবং বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে বলগুলির ক্রিয়ারেখাসমূহ যদি একই অভিমুখে একটি নির্দিষ্ট কোণে আবর্তিত হয়, তবে বলগুলির লব্ধি একটি যুগ্মবল হয়।

11. ABC সমবাহু ত্রিভুজের $\overline{BC}$, CA ও $\overline{AB}$ বাহু যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হইল। P পরিমাণের তিনটি বল D, E ও F বিন্দুতে যথাক্রমে BC, CA ও ABর উপর লম্ব সরলরেখায় ত্রিভুজের বহির্দিকে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে ঐ বলত্রয় $\frac{1}{2}Pa$ ভ্রামক বিশিষ্ট একটি যুগ্মবল গঠন করে, যেখানে ত্রিভুজের প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য a. [H. S. Tech. '72]

12. প্রমাণ কর যে, যে কোন দুইটি বলের সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দুর চারিদিকে ঐ দুইটি বলের ভ্রামকের বীজগণিতীয় সমষ্টি যদি ধ্রুবক হয়, তবে বল দুইটি একটি যুগ্মবল গঠন করে।

13. যে যুগ্মবলের প্রত্যেকটি বল 25 কে. জি. এবং বাহু 4 সে. মি., সেই যুগ্মবলের সমান ফলদায়ী অপর যে যুগ্মবলের প্রত্যেকটি বল 20 কে. জি. তাহার বাহু কত?

14. ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 একক। উহার ক্রমানুসারে গৃহীত $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ বাহুর বরাবর a, b, c, d বলসমূহ এবং $\overline{AC}$ ও $\overline{DB}$ বরাবর যথাক্রমে $p\sqrt{2}$ ও $q\sqrt{2}$ বলদ্বয় ক্রিয়াশীল। যদি $p+q=c-a$ এবং $p-q=d-b$ হয়, তবে দেখাও যে বলসমূহ একটি যুগ্মবল গঠন করে; যাহার ভ্রামক $a+b+c+d$ [P. U.]

15. ABCD একটি আয়তক্ষেত্র; $p.\overline{AB}, q.\overline{BC}, r.\overline{CD}$ এবং $s.\overline{DA}$ বলসমূহ যথাক্রমে $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ এবং $\overline{DA}$ বাহু বরাবর সক্রিয়। দেখাও যে, বলসমূহের একটি যুগ্মবল গঠন করিবার পক্ষে $p=r$ এবং $q=s$ শর্তদ্বয় প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট।

16. একটি ভারহীন দৃঢ় দণ্ডের দৈর্ঘ্য 140 সে. মি. এবং ইহার একপ্রান্ত A ভূমিতে উল্লম্বদিকের সহিত 30° কোণে আটকান আছে। 10 কে. জি. ওজনের একটি ভার অপরপ্রান্ত B হইতে ঝুলান হইল। কি পরিমাপের ভ্রামকের একটি যুগ্মবল দণ্ডটিকে A বিন্দু হইতে উৎপাটিত করিতে পারে?

17. একটি সুষম বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু ছয়টি বরাবর 1, 2, 3, 2, P এবং Q পরিমাপের ক্রিয়াশীল ছয়টি বল একটি যুগ্মবল গঠন করে। P ও Q-এর পরিমাপ এবং যুগ্ম বলটির ভ্রামক নির্ণয় কর।

সপ্তম অধ্যায়

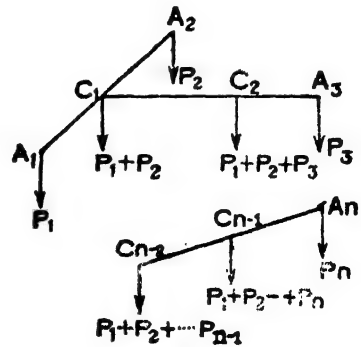
ভারকেন্দ্র (Centre of gravity)

§ 7·1. কোন দৃঢ় বস্তুকে (rigid body-কে) দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ বস্তুকণার সমষ্টি হিসাবে কল্পনা করা যায়। নিউটনের অভিকর্ষ সূত্র অনুযায়ী (Newton's gravitational law) প্রতিটি বস্তুকণা পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে আকৃষ্ট হইতেছে ; আকর্ষণ বলের পরিমাপ বস্তুকণার ভরের (mass) সহিত সমানুপাতিক এবং বস্তুকণাটির পৃথিবীর কেন্দ্র হইতে দূরত্বের বর্গের সহিত ব্যস্ত অনুপাতিক ও ইহা পৃথিবীর কেন্দ্র অভিমুখী। এই বলকে বস্তুকণার **ওজন** বা **ভার** (weight) বলা হয়। এখন যদি দৃঢ় বস্তুটির আকৃতি পৃথিবীর তুলনায় ক্ষুদ্র হয়, তবে বস্তুকণাগুলির ভারসমূহকে সমান্তরাল বল হিসাবে ধরা যাইতে পারে। এই সব সমান্তরাল বলের লব্ধি যে বিন্দু দিয়া যায় তাহাকে বস্তুটির **ভারকেন্দ্র** বলে। অতএব ভারকেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইলে কতকগুলি সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় করিতে হইবে। এইজন্য পরবর্তী অনুচ্ছেদে কতকগুলি সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় করিবার পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

§ 7·2. **সমান্তরাল বলসমূহের কেন্দ্র (Centre of parallel forces) :**

মনে কর একটি দৃঢ় বস্তুর $A_1, A_2, \cdots, A_n$ বিন্দুতে $P_1, P_2, \ldots, P_n$ সদৃশ সমান্তরাল বল প্রযুক্ত হইয়াছে। এই সকল বলের লব্ধি নির্ণয় করিতে হইবে।

চিত্র 66

এক্ষণে সমান্তরাল বল সংক্রান্ত উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা জানি যে, A_1 বিন্দুতে P_1 বল এবং A_2 বিন্দুতে P_2 বলের লব্ধির পরিমাপ P_1+P_2 হইবে এবং ইহা A_1A_2 রেখাংশের অন্তঃস্থ C_1 বিন্দুতে ক্রিয়া করে যেখানে $A_1C_1 : A_2C_1 = P_2 : P_1$। আবার C_1 বিন্দুতে P_1+P_2 এবং A_3 বিন্দুতে P_3 বলের লব্ধির পরিমাপ হইবে $P_1+P_2+P_3$ এবং ইহা C_1A_3 রেখাংশের অন্তঃস্থ C_2 বিন্দু দিয়া যায়,

যেখানে $C_1C_2 : C_2A_3 = P_3 : (P_1+P_2)$। এইরূপে অগ্রসর হইয়া, $(n-1)$ বার লব্ধি নির্ণয় করিয়া আমরা C_{n-1} বিন্দু পাই যেখানে প্রদত্ত সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি $P_1+P_2+\cdots+P_n$ ক্রিয়া করে এবং C_{n-1} হইল $C_{n-2}A_n$ রেখাংশের অন্তঃস্থ একটি বিন্দু যেখানে

$$C_{n-2}C_{n-1} : C_{n-1}A_n = P_n : (P_1+P_2+\cdots+P_{n-1}).$$

নিম্নে উপরোক্ত আলোচনাটি স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সাহায্যে করা হইতেছে।

মনে কর $A_1, A_2, \cdots, A_n$ বিন্দুসমূহ একই সমতলে অবস্থিত এবং এই তলের উপর সুবিধাজনকভাবে দুইটি অক্ষ $\overrightarrow{Ox}$ এবং $\overrightarrow{Oy}$ লওয়া হইল।

মনে কর এই অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে $A_1, A_2, \cdots, A_n$ বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$।

মনে কর $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে

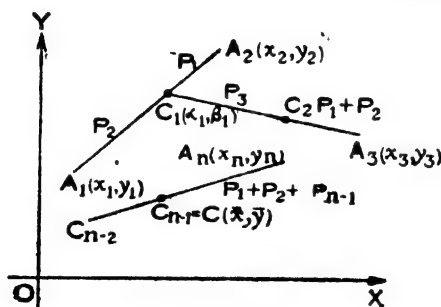
$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \cdots, (\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})।$$

এক্ষণে, যেহেতু C_1 বিন্দু $\overline{A_1A_2}$-কে $P_2 : P_1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, সেজন্য স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সূত্র হইতে পাই,

$$\alpha_1 = \frac{P_1x_1+P_2x_2}{P_1+P_2}, \quad \beta_1 = \frac{P_1y_1+P_2y_2}{P_1+P_2}.$$

আবার C_2 বিন্দু $\overline{C_1A_3}$-কে $P_3 : (P_1+P_2)$ অনুপাতে ভাগ করে বলিয়া পাই,

$$\alpha_2 = \frac{(P_1+P_2)\alpha_1+P_3x_3}{P_1+P_2+P_3} = \frac{P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3}{P_1+P_2+P_3}$$

(উপরোক্ত ফল হইতে)

চিত্র 67

এবং $$\beta_2 = \frac{(P_1+P_2)\beta_1+P_3y_3}{P_1+P_2+P_3} = \frac{P_1y_1+P_2y_2+P_3y_3}{P_1+P_2+P_3}$$

এইভাবে অগ্রসর হইয়া, প্রদত্ত সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি যে বিন্দু C_{n-1} দিয়া ক্রিয়া করে, তাহার স্থানাঙ্ক পাই,

$$\alpha_{n-1} = \frac{P_1x_1+P_2x_2+\cdots+P_nx_n}{P_1+P_2+\cdots+P_n}$$

$$\beta_{n-1} = \frac{P_1y_1+P_2y_2+\cdots+P_ny_n}{P_1+P_2+\cdots+P_n}$$

C_{n-1} বিন্দুকে C বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করিয়া এবং ইহার স্থানাঙ্ককে $(\bar{x}, \bar{y})$ ধরিয়া আমরা পাই,

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{P_1x_1+P_2x_2+\cdots\cdots+P_nx_n}{P_1+P_2+\cdots\cdots+P_n}=\frac{\Sigma Px}{\Sigma P}\\ \text{এবং}\quad \bar{y}&=\frac{P_1y_1+P_2y_2+\cdots\cdots+P_ny_n}{P_1+P_2+\cdots\cdots+P_n}=\frac{\Sigma Py}{\Sigma P}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

সুতরাং $A_1, A_2, \cdots, A_n$ বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $P_1, P_2, \cdots, P_n$, সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি সর্বদা $C(\bar{x}, \bar{y})$ বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়। (1) হইতে স্পষ্টতঃ দেখা যাইতেছে যে $(\bar{x}, \bar{y})$ অর্থাৎ C বিন্দুর অবস্থান সমান্তরাল বলসমূহের দিক (direction)-এর উপর নির্ভর করে না। ইহা বল-সমূহের অবস্থান এবং পরিমাপের উপর নির্ভরশীল।

উপরোক্ত আলোচনাটি নিম্নলিখিতভাবে বিবৃত করা যায়।

যদি দৃঢ়ভাবে (rigidly) আবদ্ধ বিন্দুসমূহে প্রযুক্ত সমান্তরাল বলসমূহের পরিমাপ এবং প্রয়োগবিন্দু একই থাকে, তবে বলসমূহের যে-কোন দিকের জন্য বলসমূহের লব্ধি সর্বদা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়। এই বিন্দুটিকে **সমান্তরাল বলসমূহের কেন্দ্র** বলা হয়।

দ্রষ্টব্য ঃ (1) হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে, কোন প্রদত্ত সমান্তরাল বল-শ্রেণীর একটি এবং একটি মাত্রই কেন্দ্র থাকিতে পারে।

(2) যদি একটি দৃঢ় বস্তুর বিভিন্ন বিন্দুতে সমান্তরাল বলসমূহ ক্রিয়া করে, এবং ঐ বস্তুটির স্থান যদি যে কোন প্রকারে পরিবর্তন করা হয়, যাহাতে সমান্তরাল বলসমূহের প্রয়োগবিন্দু একই থাকে এবং বলগুলি সমান্তরাল থাকে, তবে বলসমূহের কেন্দ্র একই থাকিবে।

(3) উপরোক্ত আলোচনায় সমান্তরাল বলসমূহ সদৃশ (like) না হইলেও চলিবে। যদি কোন বল P_k অসদৃশ (unlike) হয়, তবে সূত্র (1)-এ, P_k-এর স্থলে $-P_k$ লইতে হইবে। অবশ্য সূত্রটি প্রয়োগ করা যাইবে যদি $\Sigma P \neq 0$ হয়।

§ 7·3. দৃঢ়বস্তু এবং দৃঢ়ভাবে যুক্ত বস্তুকণাসমূহের ভারকেন্দ্র (Centre of gravity of a rigid body and rigidly connected particles) ঃ

এই অধ্যায়ের প্রথম অনুচ্ছেদে বলা হইয়াছে যে একটি দৃঢ় বস্তুকে কতিপয় বস্তুকণার সমষ্টি হিসাবে কল্পনা করা যায় এবং এইসব বস্তুকণা পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে আকৃষ্ট হইতেছে ; আকর্ষণ-বলকে বস্তুকণা-সমূহের ভার বা ওজন বলা

হয়। এখন বস্তুটি যদি ক্ষুদ্র হয় তবে পৃথিবীর কেন্দ্রের সহিত বস্তুটির বিভিন্ন অংশের সংযোজক রেখাসমূহকে সমান্তরাল ধরা যায় (কারণ, পৃথিবীপৃষ্ঠ হইতে পৃথিবীর কেন্দ্রের দূরত্ব প্রায় 4000 মাইল)। এক্ষণে বস্তুকণা-সমূহের ভার এইসব সমান্তরাল রেখা বরাবর ক্রিয়াশীল। § **7·2 অনুযায়ী** এই সকল সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় করা যায় এবং এই লব্ধি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়। লব্ধির পরিমাপকে বস্তুটির **ভার** বা **ওজন** বলা হয় এবং সমান্তরাল বলসমূহের কেন্দ্রকে বস্তুর **ভারকেন্দ্র** (centre of gravity) বলা হয়। যেহেতু সমান্তরাল বলসমূহের কেন্দ্র বল-সমূহের দিক-নিরপেক্ষ, সেজন্য বস্তুর ভারকেন্দ্র বস্তুর বিভিন্ন অবস্থানের জন্য একই থাকে। সুতরাং কোন বস্তুর বা বস্তুকণাসমূহের ভারকেন্দ্রের সংজ্ঞা নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা : কোন বস্তুর (বা বস্তুকণা-সমূহের) ভারকেন্দ্র হইতেছে একটি বিন্দু, যে বিন্দু দিয়া বস্তুর যে কোন অবস্থানের জন্য উহার ভার সর্বদা ক্রিয়াশীল।

দ্রষ্টব্য : (1) বস্তুর ভার অভিকর্ষজ আকর্ষণের জন্য হয়। এখন যদি বস্তুটিকে পৃথিবীর বাহিরে যেখানে অভিকর্ষজ আকর্ষণ নাই, এমন স্থানে লইয়া যাওয়া হয়, তবে বস্তুর কোন ভার থাকিবে না এবং সেইহেতু ভারকেন্দ্রের ধারণা অর্থহীন হইয়া পড়িবে। ভারকেন্দ্রের ধারণা অর্থহীন হইয়া পড়িলেও অন্য একটি কেন্দ্রের ধারণা নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা : কোন বস্তুর কণা-সমূহের উপর উহাদের ভরের অনুপাতে সমান্তরাল বল প্রযুক্ত হইলে এই সকল বলের কেন্দ্রকে **ভরকেন্দ্র** (centre of mass) বলা হয়।

যেহেতু অভিকর্ষজ আকর্ষণ বস্তুকণার ভরের সমানুপাতিক এবং যেহেতু সমান্তরাল বল-সমূহের প্রতিটির মান একটি নির্দিষ্ট গুণ বাড়াইয়া দিলে উহাদের কেন্দ্রর পরিবর্তন হয় না, সেইহেতু বস্তুর ভারকেন্দ্র এবং ভরকেন্দ্র একই বিন্দু হইবে। তবে পৃথিবীর আকর্ষণের বাহিরে ভারকেন্দ্রর অস্তিত্ব নাই, কিন্তু ভরকেন্দ্র সর্বত্রই আছে।

(2) যেহেতু সমান্তরাল বল-সমূহের একটি মাত্রই কেন্দ্র থাকে, অতএব বস্তুর একটি মাত্রই ভারকেন্দ্র থাকিতে পারে।

(3) পৃথিবীর তুলনায় বস্তুর আকার যদি ছোট না হয়, তবে বস্তুর কণাসমূহের উপর ক্রিয়াশীল ভারগুলি সমান্তরাল হইবে না এবং সেইহেতু বস্তুর ভারকেন্দ্র নাও থাকিতে পারে।

§ 7·4. অবিচ্ছিন্ন বস্তুর ভারকেন্দ্র বাহির করিবার পদ্ধতি (Method of finding the centre of gravity of a continuous body) :

কোন বস্তু বা দৃঢ়ভাবে সংযুক্ত বস্তুকণা-সমূহের ভারকেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইলে সাধারণতঃ বস্তু বা বস্তুকণা-সমূহকে সুবিধাজনকভাবে কয়েকটি অংশে ভাগ করিয়া লওয়া হয়, যাহাতে প্রতিটি অংশের ভার ও ভারকেন্দ্র পৃথকভাবে নির্ণয় করা যায়। এখন এই সব ভার-সমূহের ভারকেন্দ্র হইতেছে বস্তুটির ভারকেন্দ্র।

মনে কর একটি সমতলে $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \cdots\cdots$ ইত্যাদি ভারযুক্ত বস্তুকণা আছে এবং সুবিধাজনক অক্ষদ্বয়ের নির্বাচনের জন্য মনে কর $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \cdots\cdots$ ইত্যাদির অবস্থানের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots\cdots$ ইত্যাদি।

যদি $(\bar{x}, \bar{y})$ বস্তুকণা-সমূহের ভারকেন্দ্র হয় তবে § 7·2 সূত্র-(1) অনুযায়ী,

$$\bar{x} = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 + \cdots}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \cdots\cdots} = \frac{\Sigma \omega x}{\Sigma \omega}$$

এবং $$\bar{y} = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \cdots}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \cdots} = \frac{\Sigma \omega y}{\Sigma \omega}.$$

এইবার মনে কর কোন সমতলে একটি অবিচ্ছিন্ন বস্তু আছে এবং উহার ভারকেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে। প্রথমে বস্তুটিকে সুবিধাজনকভাবে অনেকগুলি অংশে ভাগ করিয়া লও যাহাতে প্রতিটি ভাগের ভার এবং ভারকেন্দ্র জানা থাকে। মনে কর এইরূপ একটি ভাগের ভার $\delta\omega$ এবং ভারকেন্দ্র (ξ, η)। যদি বস্তুটির ভারকেন্দ্র $(\bar{x}, \bar{y})$ হয়, তবে $\bar{x}$ এবং $\bar{y}$-এর আসন্ন মান হইবে যথাক্রমে $\frac{\Sigma \xi \delta\omega}{\Sigma \delta\omega}$ এবং $\frac{\Sigma \eta \delta\omega}{\Sigma \delta\omega}$ যেখানে যোগফলটি সমস্ত বিভাজিত অংশের উপর লওয়া হইয়াছে। এখন মনে কর ভাগের সংখ্যা অনির্দিষ্টভাবে বাড়াইয়া দেওয়া হইল, যাহাতে প্রতিটি অংশের ভার $\delta\omega \to 0$ হয়। এইক্ষেত্রে $\Sigma \xi \delta\omega$, $\Sigma \eta \delta\omega$ এবং $\Sigma \delta\omega$ যথাক্রমে নিশ্চিত সমাকল $\int \xi d\omega$, $\int \eta d\omega$ এবং $\int d\omega$-এর দিকে অগ্রসর হইবে। এইক্ষেত্রে $\bar{x}$ এবং $\bar{y}$-এর মান সুনির্দিষ্ট (exact) হইবে এবং আমরা লিখিতে পারি, $\bar{x} = \frac{\int \xi d\omega}{\int d\omega}$ এবং $\bar{y} = \frac{\int \eta d\omega}{\int d\omega} \cdots (1)$ যেখানে (ξ, η) হইতেছে $\delta\omega$ অংশের ভারকেন্দ্র এবং নির্দিষ্ট সমাকলগুলি সমগ্র বস্তুর উপর লওয়া হইয়াছে।

যদি $\delta\omega$ ভার যুক্ত অংশের ভর δm হয়, তবে $\delta\omega = g\delta m$ যেখানে g হইতেছে অভিকর্ষজ ত্বরণ। উপরোক্ত সূত্রদ্বয়কে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায় :

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int \xi d\omega}{\int d\omega} = \frac{\int \xi.gdm}{\int gdm} = \frac{\int \xi dm}{\int dm} \\ \text{এবং} \quad \bar{y} &= \frac{\int \eta d\omega}{\int d\omega} = \frac{\int \eta.gdm}{\int gdm} = \frac{\int \eta dm}{\int dm} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

যেখানে নিশ্চিত সমাকলন সমগ্র বস্তুর উপর করিতে হইবে।

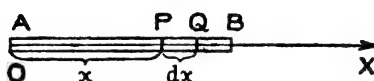
দ্রষ্টব্য : 1. সূত্র-(2)-কে ভরকেন্দ্র (centre of mass) নির্ণয় করিবার সূত্র বলা যায়।

2. সূত্র-(1) এবং সূত্র-(2) হইতে স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে ভারকেন্দ্র এবং ভরকেন্দ্র একই বিন্দু।

§ 7·5. কয়েকটি প্রাথমিক (elementary) বস্তুর ভারকেন্দ্র :

(A) সুষম-দণ্ডের ভারকেন্দ্র (c.g. of a uniform rod) :

মনে কর $\overline{AB}$ একটি সমদণ্ড যাহার দৈর্ঘ্য l, অর্থাৎ $AB = l$. A-কে মূলবিন্দু

A P Q B
O x dx X

চিত্র 68

$\overrightarrow{AB}$-কে x-অক্ষ এবং $\overrightarrow{AB}$-র উপর একটি লম্ব সরলরেখাকে y-অক্ষ মনে কর। মনে কর A হইতে x-দূরত্বে P একটি বিন্দু এবং P বিন্দুর নিকট সমদণ্ডের $PQ = dx$ অংশ লওয়া হইয়াছে। $\therefore$ $dm = \rho dx$ যেখানে ρ হইতেছে সমদণ্ডের একক দৈর্ঘ্যের ভর। এখানে x-এর সীমা 0 হইতে l পর্যন্ত।

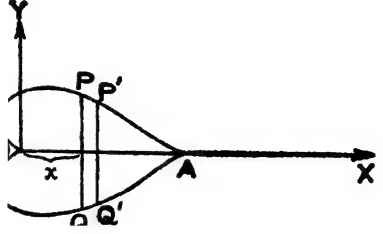
$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^l x dx}{\int_0^l dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l}{[x]_0^l} = \frac{\frac{l^2}{2}}{l} = \frac{l}{2}.$$

এবং স্পষ্টতঃ $\bar{y} = 0$. সুতরাং সমদণ্ডের ভারকেন্দ্র A বিন্দু হইতে $\frac{l}{2}$ দূরত্বে অবস্থিত, অর্থাৎ সমদণ্ডের মধ্য বিন্দুতে অবস্থিত।

(B) প্রতিসম অক্ষযুক্ত সমপাতের ভারকেন্দ্র (c.g., of uniform a lamina having axis of symmetry) :

কোন পাতের সমতলের উপর অবস্থিত একটি সরলরেখাকে উক্ত পাতের প্রতিসম অক্ষ বলা হয়, যদি অক্ষের যে কোন দিকে অবস্থিত পাতের কোন অংশের জন্য অক্ষের অপর দিকে সমপরিমাণ দূরত্বে পাতের অপর একটি অংশ

পাওয়া যায় (অর্থাৎ প্রতিসম অক্ষ বরাবর পাতটিকে ভাঁজ করিলে পাতের দুইটি অংশ সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যাইবে)।

মনে কর কোন সম-পাতের প্রতিসম অক্ষ $\overrightarrow{OA}$-কে x-অক্ষ লওয়া হইল এবং O বিন্দুতে $\overrightarrow{OA}$-এর উপর লম্বকে y-অক্ষ লওয়া হইল। মনে কর O বিন্দু হইতে x-দূরত্বে y-অক্ষের সমান্তরাল dx বেধ বিশিষ্ট একটি পাত PQQ′P′ লওয়া হইল। P-এর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে এই পাতের দৈর্ঘ্য = PQ = $2y$;

চিত্র 69

বেধ $= dx$, সুতরাং ভর $= dm = 2y.dx.\sigma$, যেখানে $\sigma =$ একক আয়তনের পাতের ভর। এক্ষণে যেহেতু পাতটি x-অক্ষে প্রতিসম সেজন্য PQ-এর মধ্যবিন্দু $\overrightarrow{Ox}$-এর উপর অবস্থিত হইবে। সুতরাং PQQ′P′ পাতের ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হইবে $(x, 0)$, $\therefore \quad \eta = 0$.

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{\int \eta dm}{\int dm} = \frac{\int 0.dm}{\int dm} = 0.$$

অতএব, পাতটির ভারকেন্দ্র $\overrightarrow{Ox}$-এর উপর অবস্থিত হইবে। সুতরাং প্রতিসম অক্ষ যুক্ত কোন পাতের ভারকেন্দ্র প্রতিসম অক্ষের উপর অবস্থিত হইবে।

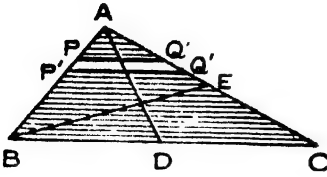
দ্রষ্টব্য : (1) উপবৃত্তাকার সুষম পাতের ভারকেন্দ্র উক্ত উপবৃত্তের কেন্দ্রটি হইবে। কারণ, যেহেতু উপাক্ষ এবং মূলাক্ষ উপবৃত্তের প্রতিসম অক্ষ সেজন্য ভারকেন্দ্র ঐ দুই অক্ষের উভয়ের উপর অবস্থিত হইবে, এবং সেইজন্য উহাদের ছেদ বিন্দুতে অর্থাৎ উপবৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত হইবে।

(2) অনুরূপে সমবর্গক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদ বিন্দুতে হইবে। কারণ উভয় কর্ণ বর্গক্ষেত্রের প্রতিসম অক্ষ।

(3) বৃত্তাকার সম-পাত বা বৃত্তাকার সম-তার উভয়ের ভারকেন্দ্র হইবে বৃত্তের কেন্দ্র। কোন বস্তুর ভারকেন্দ্র, বস্তুটির একটি বিন্দু নাও হইতে পারে।

(C) **সমবেধযুক্ত ত্রিকোণাকার পাতের ভারকেন্দ্র** (c. g. of a uniform triangular lamina) :

মনে কর ABC একটি ত্রিকোণ পাত। পাতটিকে BC বাহুর সমান্তরাল কতকগুলি সমদণ্ডে ভাগ করা হইল। PQQ′P′ এইরূপ একটি সমদণ্ড। মনে কর

D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু। এখন যেহেতু PQ ∥ BC এবং D, BC-র মধ্যবিন্দু, সুতরাং DA, PQকে মধ্যবিন্দুতে ছেদ করিবে এবং এই ছেদবিন্দু PQQ′P′ সমদণ্ডের ভারকেন্দ্র। এইরূপে দেখান যায় যে, BC-র সমান্তরাল যে-কোন দণ্ডের ভারকেন্দ্র AD মধ্যমার উপর অবস্থিত। এখন ABC-ত্রিভুজের ভার-কেন্দ্র হইতেছে এই সব দণ্ডের ভারসমূহের লব্ধি যে বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়। যেহেতু প্রতিটি দণ্ডের ভারকেন্দ্র AD-মধ্যমার উপর অবস্থিত, সেজন্য এই সব দণ্ডের ভারকেন্দ্র, অর্থাৎ ABC-ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র AD-মধ্যমার উপর অবস্থিত হইবে। অনুরূপে ABC-ত্রিভুজকে CA বাহুর সমান্তরাল রেখার দ্বারা সমদণ্ডসমূহে ভাগ করিয়া দেখান যায়, ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্র BE মধ্যমার উপর অবস্থিত। অতএব ভারকেন্দ্র AD এবং BE মধ্যমার ছেদবিন্দু G। সুতরাং একটি ত্রিকোণ সমপাতের ভারকেন্দ্র হইতেছে উহার মধ্যমাগুলির ছেদবিন্দু G।

চিত্র 70

দ্রষ্টব্য ঃ আমরা জানি G, মধ্যমা AD, বা BE বা CFকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

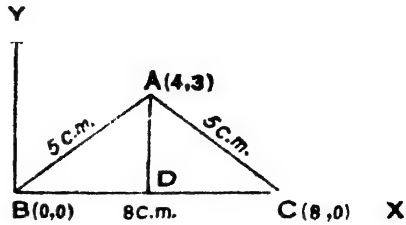
অনুসিদ্ধান্ত 1. ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ বিন্দুতে যদি তিনটি সমান ভারের কণা স্থাপন করা হয়, তবে কণা তিনটি এবং ত্রিভুজাকার পাতের ভারকেন্দ্র একই হইবে।

প্রমাণ ঃ মনে কর A, B, C বিন্দুতে ω-ভারযুক্ত তিনটি কণা স্থাপন করা হইয়াছে। এখন B এবং C বিন্দুতে অবস্থিত সমান দুইটি ভার ω-এর লব্ধি হইবে 2ω এবং ইহা BC বাহুর মধ্যবিন্দু D দিয়া যাইবে। এখন D বিন্দুতে 2ω ভার এবং A বিন্দুতে ω ভারের লব্ধি AD রেখায় উপর G বিন্দু দিয়া যাইবে যেখানে AG : GD = 2 : 1।

সুতরাং ভার তিনটির ভারকেন্দ্র G হইতেছে মধ্যমা তিনটির ছেদবিন্দু, অর্থাৎ ত্রিকোণ পাতের ভারকেন্দ্রের সহিত মিলিয়া যাইতেছে।

দ্রষ্টব্য ঃ ত্রিভুজাকার পাতের ভারকেন্দ্র সম্বন্ধীয় প্রশ্নের সমাধানে পাতের ω-ভারকে তিনটি কৌণিক বিন্দুতে অবস্থিত $\frac{\omega}{3}$ ভারযুক্ত তিনটি কণার সমান লওয়া যায়।

অনুসিদ্ধান্ত 2. ত্রিকোণ পাতের ভারকেন্দ্র, ঐ ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু তিনটিতে অবস্থিত সমভার বিশিষ্ট তিনটি কণার ভারকেন্দ্রের সহিত একই হইবে।

উদাহরণ 1. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি BC-র দৈর্ঘ্য 8 সে. মি. এবং অপর বাহু দুইটির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 5 সে. মি. ; A, B, C বিন্দুত্রয়ে যথাক্রমে 3, 4 ও 5 গ্রাম ভার স্থাপন করা হইল। ভারত্রয়ের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

চিত্র 71

B বিন্দুকে মূলবিন্দু, $\overrightarrow{BC}$-কে x-অক্ষ এবং B বিন্দুতে $\overrightarrow{BC}$-র উপর লম্ব $\overrightarrow{BY}$-কে y-অক্ষ মনে কর।

সুতরাং ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক

B (0, 0), C (8, 0) ও A (4, 3)

[চিত্রে $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$]

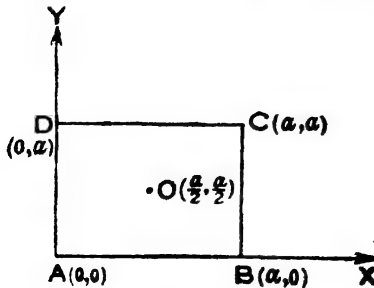
সুতরাং G $(\bar{x}, \bar{y})$ নির্ণেয় ভারকেন্দ্র হইলে,

$$\bar{x}=\frac{3.4+4.0+5.8}{3+4+5}=\frac{52}{12}=\frac{13}{3}.$$

$$\bar{y}=\frac{3.3+4.0+5.0}{3+4+5}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}.$$

সুতরাং $\overrightarrow{BX}$ ও $\overrightarrow{BY}$-কে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরিয়া নির্ণেয় ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{13}{3}, \frac{3}{4})$।

উদা. 2. একটি সমবর্গক্ষেত্র ABCD-র ভার 10 পাউণ্ড ; ইহার A, B, C, D বিন্দুতে যথাক্রমে 20, 30, 40 ও 50 পাউণ্ড ভার স্থাপন করা হইয়াছে। ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর। [C. U. 1945]

মনে কর বর্গক্ষেত্রটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a. বর্গক্ষেত্রের ভার উহার কেন্দ্র O বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

চিত্র 72

এক্ষণে Aকে মূলবিন্দু, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ মনে কর। সুতরাং A, B, C, D ও O বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, 0), $(a,0)$, (a,a), $(0,a)$ এবং $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

মনে কর ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\bar{x}, \bar{y})$.

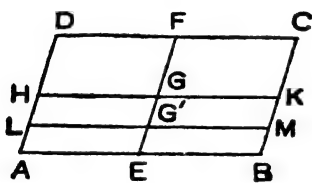
$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{20 \times 0 + 30 \times a + 40 \times a + 50 \times 0 + 10 \times \frac{a}{2}}{20+30+40+50+10} = \frac{75a}{150} = \frac{a}{2}.$$

$$\bar{y} = \frac{20 \times 0 + 30 \times 0 + 40 \times a + 50 \times a + 10 \times \frac{a}{2}}{20+30+40+50+10} = \frac{95a}{150} = \frac{19}{30}a.$$

স্বতরাং নির্ণেয় ভারকেন্দ্র AB ও AD হইতে যথাক্রমে $\frac{19}{30}a$ ও $\frac{a}{2}$ দূরত্বে অবস্থিত বর্গক্ষেত্রের অভ্যন্তরস্থ বিন্দুটি।

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, কোন সামান্তরিকের আকারের সম-পাতের ভারকেন্দ্র উহার বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু।

ABCD একটি সামান্তরিকের আকারের সম-পাত (uniform lamina in the form of a parallelogram).

ABCD পাতটিকে AB-র সমান্তরাল কতকগুলি অতিক্ষুদ্র প্রস্থচ্ছেদের সমদণ্ডের সমষ্টিরূপে কল্পনা করা যায় এবং মনে কর LM এইরূপ একটি সমদণ্ড। LM সমদণ্ডের ভারকেন্দ্র উহার মধ্যবিন্দু G′. এক্ষণে, E ও F যথাক্রমে AB ও CD-র মধ্যবিন্দু হইলে, EF, AB-র সমান্তরাল সকল সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

চিত্র 73

স্বতরাং G′, EF-এর একটি বিন্দু। অনুরূপে AB-র সমান্তরাল অন্য যে-কোন দণ্ডের ভারকেন্দ্র EF-এর উপর থাকিবে।

∴ সমগ্র পাতটির ভারকেন্দ্র EF-এর উপর থাকিবে।

অনুরূপে, H ও K যথাক্রমে AD ও BC-র মধ্যবিন্দু হইলে সমগ্র পাতটির ভারকেন্দ্র HK-র উপর থাকিবে।

∴ পাতটির ভারকেন্দ্র EF ও HK-র ছেদবিন্দু G

স্বতরাং কোন সামান্তরিকের আকারের সম-পাতের ভারকেন্দ্র উহার বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু।

উদা. 4. ABC ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহুত্রয় একই পদার্থের, সমান প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট তিনটি সরু সমদণ্ড এবং D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB-র মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর সমদণ্ড তিনটির ভারকেন্দ্র DEF ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

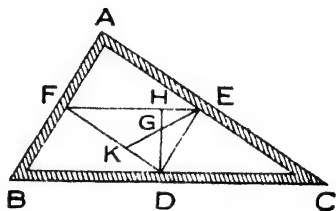
AB ও AC সমদণ্ড দুইটির ভার উহাদের মধ্যবিন্দু F ও E-তে নীচের দিকে ক্রিয়াশীল এবং দণ্ড দুইটির ভার উহাদের দৈর্ঘ্যের সহিত সমানুপাতিক। এই

দুইটি সমান্তরাল বলের লব্ধিবল FE-র একটি বিন্দু H-এ ক্রিয়া করে এবং

$$\frac{FH}{HE}=\frac{\text{E বিন্দুতে ক্রিয়াশীল ভার}}{\text{F বিন্দুতে ক্রিয়াশীল ভার}}=\frac{\text{AC-র দৈর্ঘ্য}}{\text{AB-র দৈর্ঘ্য}}=\frac{DF}{DE}$$ (কারণ, $DF=\frac{1}{2}AC$, $DE=\frac{1}{2}AB$)

সুতরাং DH, ∠EDF-এর সমদ্বিখণ্ডক।

আবার BC সমদণ্ডের মধ্যবিন্দু D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দণ্ডটির ভার এবং AB ও AC সমদণ্ড দুইটির ভারদ্বয়ের লব্ধি ভারের লব্ধি DH-এর কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করিবে। সুতরাং সমদণ্ড তিনটির ভারকেন্দ্র DH-এর একটি বিন্দু।

অনুরূপে, প্রথমে AB ও BC সমদণ্ড দুইটির ভারদ্বয়ের লব্ধিভার নির্ণয় করিয়া এবং পরে AB, BC ও AC দণ্ড তিনটির লব্ধিভার নির্ণয় করিলে দেখিবে যে, নির্ণেয় ভারকেন্দ্র ∠DEF-এর সমদ্বিখণ্ডক EK-র যে কোন বিন্দু। সুতরাং নির্ণেয় ভারকেন্দ্র ∠EDF ও ∠DEF প্রত্যেকটির সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। অতএব ভারকেন্দ্রটি এই সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু অর্থাৎ △DEF-এর অন্তঃকেন্দ্রই নির্ণেয় ভারকেন্দ্র।

চিত্র 74

উদা. 5. ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F. A, B, C বিন্দু তিনটিতে যথাক্রমে W_1, W_2 ও W_3 ভার এবং D, E, F বিন্দু তিনটিতে যথাক্রমে m_1, m_2 ও m_3 ভার স্থাপন করা হইল।

যদি W_1, W_2, W_3-র ভারকেন্দ্র এবং m_1, m_2 ও m_3-র ভারকেন্দ্র একই বিন্দু হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{W_1}{m_2+m_3}=\frac{W_2}{m_3+m_1}=\frac{W_3}{m_1+m_2}.$$

মনে কর উভয়ক্ষেত্রেই ভারকেন্দ্র G এবং AM ও GL, BC-র উপর লম্ব।

এক্ষণে, D, E, F বিন্দুতে যথাক্রমে স্থাপিত m_1, m_2, m_3 ভারের পরিবর্তে যথাক্রমে B ও C বিন্দুর প্রত্যেকটিতে $\frac{m_1}{2}$, $\frac{m_1}{2}$ ভার, C ও A বিন্দুর প্রত্যেকটিতে $\frac{m_2}{2}$, $\frac{m_2}{2}$ এবং A ও B বিন্দুর প্রত্যেকটিতে $\frac{m_3}{2}$, $\frac{m_3}{2}$ ভার লওয়া যায়

অতএব, D, E, F বিন্দুর m_1, m_2, m_3 ভার তিনটির পরিবর্তে, A, B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে $\frac{1}{2}(m_2+m_3)$, $\frac{1}{2}(m_3+m_1)$ ও $\frac{1}{2}(m_1+m_2)$ ভার লওয়া যায়।

এক্ষণে, BC-র চারিদিকে ভ্রামক লইয়া উভয়ক্ষেত্রে পাই,

$$(W_1+W_2+W_3)GL=W_1.AM$$

এবং $(m_1+m_2+m_3)GL=\frac{1}{2}(m_2+m_3).AM$

$$\therefore \quad \frac{W_1}{\frac{1}{2}(m_2+m_3)}=\frac{W_1+W_2+W_3}{m_1+m_2+m_3}=K \text{ (মনে কর)}$$

অনুরূপে যথাক্রমে CA ও AB-র চারিদিকে ভ্রামক লইয়া প্রমাণ করা যাইবে যে,

$$\frac{W_2}{\frac{1}{2}(m_3+m_1)}=\frac{W_3}{\frac{1}{2}(m_1+m_2)}=K.$$

সুতরাং $\frac{W_1}{m_2+m_3}=\frac{W_2}{m_3+m_1}=\frac{W_3}{m_1+m_2}$

উদা. 6. একটি সরু সম তারকে একটি ত্রিভুজাকারে বাঁকান হইল। যদি ত্রিভুজটিকে ABC দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজাকার তারটির ভারকেন্দ্র এবং A, B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে স্থাপিত $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$ ও $\frac{a+b}{2}$ ভারত্রয়ের ভারকেন্দ্র একই বিন্দু। [C. U. 1946]

মনে কর তারটির একক দৈর্ঘ্যের ভার ω. সুতরাং BC, CA ও AB বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু D, E, F-এ যথাক্রমে $a\omega$, $b\omega$ ও $c\omega$ ভার ক্রিয়াশীল।

এক্ষণে, D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $a\omega$ ভার = B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে ক্রিয়াশীল $\frac{a\omega}{2}$ ও $\frac{a\omega}{2}$ ভার ;

E বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $b\omega$ ভার = C ও A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $\frac{b\omega}{2}$ ও $\frac{b\omega}{2}$

এবং F বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $c\omega$ ভার = A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $\frac{c\omega}{2}$ ও $\frac{c\omega}{2}$ ভার।

সুতরাং ত্রিভুজাকার তারটির ভারকেন্দ্র A, B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে ক্রিয়াশীল $\frac{b\omega}{2}+\frac{c\omega}{2}$, $\frac{c\omega}{2}+\frac{a\omega}{2}$ ও $\frac{a\omega}{2}+\frac{b\omega}{2}$ ভার তিনটির ভারকেন্দ্র একই বিন্দু।

আবার শীর্ষবিন্দু তিনটিতে স্থাপিত $\frac{b+c}{2}\omega$, $\frac{c+a}{2}\omega$ ও $\frac{a+b}{2}\omega$ ভার তিনটির ভারকেন্দ্র এবং $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$ ও $\frac{a+b}{2}$ ভার তিনটির ভারকেন্দ্র একই বিন্দু।

সুতরাং ত্রিভুজাকার তারটির ভারকেন্দ্র এবং A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে স্থাপিত $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$ ও $\frac{a+b}{2}$ ভার তিনটির ভারকেন্দ্র একই বিন্দু।

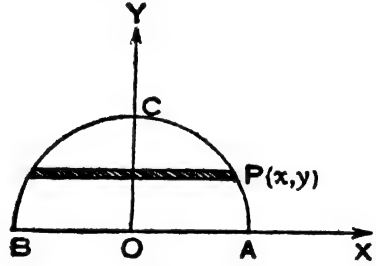
উদা. 7. একটি a-ব্যাসার্ধবিশিষ্ট অর্ধ-বৃত্তাকার সমপাতের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

ACB একটি অর্ধবৃত্তাকার সমপাত এবং OA$=a$.

O, AB-র মধ্যবিন্দু (অর্থাৎ অর্ধবৃত্তটি যে বৃত্তের অংশ তাহার কেন্দ্র O)।

মনে কর O বিন্দুতে OA-র উপর লম্ব $\overrightarrow{OY}$, অর্ধবৃত্তকে C বিন্দুতে ছেদ করে O বিন্দুকে মূলবিন্দু, $\overrightarrow{OA}$কে x-অক্ষের ধনাত্মক দিক এবং $\overrightarrow{OC}$কে y-অক্ষের ধনাত্মক দিক মনে কর।

সুতরাং অর্ধবৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$, $y\geqslant0$.

মনে কর অর্ধবৃত্তের ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\bar{x}, \bar{y})$. এক্ষণে যেহেতু

চিত্র 75

অর্ধবৃত্তটি $\overrightarrow{OC}$ অর্থাৎ y-অক্ষে প্রতিসম, সুতরাং ভারকেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত। $\therefore \quad \bar{x}=0.$

এক্ষণে, সমপাতটিকে AB-র সমান্তরাল কতকগুলি অতিক্ষুদ্র প্রস্থচ্ছেদের সমদণ্ডের সমষ্টিরূপে কল্পনা করা যায়। এক্ষণে P(x, y) সমপাতটির পরিধির একটি বিন্দু এবং P বিন্দুগামী এইরূপ একটি সমদণ্ডের ক্ষেত্রফল $2x.\delta y$ এবং ভারকেন্দ্র উহার মধ্যবিন্দু $(0, y)$. এক্ষণে অর্ধবৃত্তটির জন্য y-এর সীমা 0 হইতে a.

$$\bar{y}=\frac{\int_0^a y2xdy}{\int_0^a 2xdy}=\frac{\int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}dy}{\int_0^a \sqrt{a^2-y^2}dy}$$

$$=\frac{a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta d\theta}{a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta}\quad [\ y=a\sin\theta \text{ মনে করিয়া }]$$

$$=a\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{4a}{3\pi}.$$

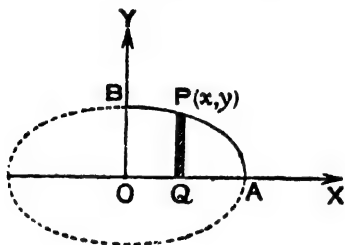
সুতরাং অর্ধবৃত্তাকার পাতটির ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(0, \frac{4a}{3\pi}\right)$ অর্থাৎ ভারকেন্দ্রটি OC-ব্যাসাধের উপর O বিন্দু হইতে $\frac{4a}{3\pi}$ দূরত্বে অবস্থিত।

উদা. 8. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের একটি পাদের আকারের একটি সমপাতের ভারকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর। [P. P. 1935]

মনে কর সমপাতটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের প্রথম পাদ AOB.

সমপাতটিকে y-অক্ষের সমান্তরাল কয়েকটি সরু সমদণ্ডের সমষ্টিরূপে কল্পনা করা যায়। মনে কর PQ এইরূপ একটি সমদণ্ড এবং P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y). এই সমদণ্ডটির ক্ষেত্রফল $y.\delta x$ এবং ভারকেন্দ্র উহার মধ্যবিন্দু $\left(x, \frac{y}{2}\right)$ বিন্দু। উপবৃত্তের এই পাদে x-এর সীমা 0 হইতে a.

চিত্র 76

সুতরাং যদি সমপাতটির ভারকেন্দ্র G $(\bar{x}, \bar{y})$ বিন্দু হয়,

$$\text{তবে } \bar{x}=\frac{\int_0^a x.ydx\rho}{\int_0^a ydx\rho}\quad [\ \rho=\text{পাতটির একক বর্গের ভর }]$$

$$=\frac{\int_0^a xy\,dx}{\int_0^a ydx}=\frac{\int_0^a x.\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx}{\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx}$$

$$=\frac{a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta} \quad [\, x=a\sin\theta \text{ ধরিয়া} \,]$$

$$=a.\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}}=\frac{4a}{3\pi}$$

$$\bar{y}=\frac{\int_0^a \frac{y}{2}.\, ydx\rho}{\int_0^a ydx\rho}=\frac{1}{2}\frac{\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx}{\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{b}{a}.\frac{\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta d\theta} \quad [\, x=a\sin\theta \text{ মনে করিয়া} \,]$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{b}{a^3}\frac{\frac{2}{3}a^3}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta}=\frac{b}{3.\frac{\pi}{4}}=\frac{4b}{3\pi}.$$

উদা. 9. একটি **বৃত্তকলার** আকারের সমপাতের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

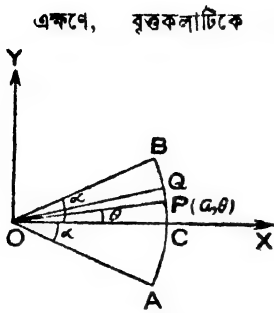
মনে কর AOBCA একটি বৃত্তকলার আকারের সমপাত এবং বৃত্তকলার কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ a ও বৃত্তকলা কেন্দ্রে 2α পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করে।

মনে কর $\overrightarrow{OC}$, $\angle$AOB-র সমদ্বিখণ্ডক। O-কে মূল বিন্দু $\overrightarrow{OC}$কে x-অক্ষ এবং O বিন্দুতে $\overrightarrow{OC}$-র উপর লম্ব $\overrightarrow{OY}$-কে y-অক্ষ মনে কর।

যেহেতু $\overrightarrow{OC}$, $\angle$AOB-র সমদ্বিখণ্ডক, সুতরাং $\overline{OC}$ বৃত্তকলাটির প্রতিসাম্য-অক্ষ। অতএব বৃত্তকলার ভারকেন্দ্র $\overline{OC}$-র উপর অবস্থিত।

$\therefore$ G$(\bar{x}, \bar{y})$, বৃত্তকলার ভারকেন্দ্র হইলে $\bar{y}=0$.

চিত্র 77

এক্ষণে, বৃত্তকলাটিকে O বিন্দুগামী কয়েকটি সরু ত্রিভুজাকার সমপাতের সমষ্টিরূপে কল্পনা করা যায়। মনে কর POQ এইরূপ একটি সমপাত। যদি $m\angle POX=\theta$ হয়, তবে POQ দণ্ডের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}a^2\sin\delta\theta=\frac{1}{2}a^2\delta\theta$ ($\because$ $\delta\theta$ ক্ষুদ্র, $\therefore$ $\sin\delta\theta=\delta\theta$) এবং উহার ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2a}{3}\cos\theta, \frac{2a}{3}\sin\theta\right)$.

$$\bar{x}=\frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{2}a^2d\theta.\frac{2a}{3}\cos\theta.\rho}{\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{2}a^2d\theta\rho}$$ [ρ, বৃত্তকলার একক ক্ষেত্রের ভর]

$$=\frac{2}{3}a\frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha}d\theta}=\frac{2}{3}a\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

সুতরাং বৃত্তকলাকৃত পাতের ভারকেন্দ্র ঐ কলার সমদ্বিখণ্ডক রেখার উপর কেন্দ্র হইতে $\frac{2}{3}a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ দূরে অবস্থিত বিন্দুটি।

উদা. 10. একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 2α রেডিয়ান্ পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তচাপটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

মনে কর বৃত্তচাপটি ACB, বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\overrightarrow{OC}$, $\angle$AOB-র সমদ্বিখণ্ডক। O বিন্দুকে মূলবিন্দু, $\overrightarrow{OC}$কে x-অক্ষ এবং O বিন্দুতে $\overrightarrow{OC}$-র উপর লম্ব সরলরেখাকে y-অক্ষ মনে কর। যেহেতু বৃত্তচাপটি $\angle$AOB-র সমদ্বিখণ্ডক OC-র সাপেক্ষে প্রতিসম, সুতরাং চাপটির ভারকেন্দ্র $\overrightarrow{OC}$-র উপর অবস্থিত। অতএব চাপের কেন্দ্র G$(\bar{x}, \bar{y})$ হইলে $\bar{y}=0$.

মনে করে বৃত্তচাপের ব্যাসার্ধ a এবং P বৃত্তচাপের এরূপ একটি বিন্দু যে $m\angle POX=\theta$ ও চাপের PQ ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য δs.

এক্ষণে, $\delta s=a\delta\theta$ ($\because$ বৃত্তের ক্ষেত্রে $s=a\theta$).

আবার PQ-অংশের ভারকেন্দ্রের x-স্থানাঙ্ক $a \cos \theta$.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} a \cos \theta \, a d\theta \rho}{\int_{-\alpha}^{\alpha} a d\theta \rho} = a \frac{\left[\sin \theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}}{\left[\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}} = a \frac{2 \sin \alpha}{2\alpha} = a \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

প্রশ্নমালা 6(A)

1. কোন প্রদত্ত রেখা হইতে একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্ব z_1, z_2, z_3 হইলে, ঐ রেখা হইতে ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর। [C. U. 1947]

2. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটিতে তিনটি সমান ও সমান্তরাল বল ক্রিয়াশীল। সমান্তরাল বল-শ্রেণীর কেন্দ্র নির্ণয় কর (i) যখন বল তিনটি পরস্পর সদৃশ এবং (ii) যখন C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বলটি অপর দুইটির সহিত অসদৃশ।

3. 2, 4, 8 এবং 10 কেজি. ভার যথাক্রমে ABCD বর্গক্ষেত্রের A, B, C, D শীর্ষ চারটিতে ক্রিয়মাণ। সমান্তরাল বলশ্রেণীর কেন্দ্র নির্ণয় কর।

4. তিন ব্যক্তি W ভারের একটি ত্রিভুজাকার সম-পাত শীর্ষবিন্দু তিনটিতে বহন করিলে প্রত্যেকের উপর কত ভার পড়িবে নির্ণয় কর।

5. L, M, N বিন্দুত্রয়ে একটি কণা P, যথাক্রমে μ.PL, μ.PM ও μ.PN পরিমাপের তিনটি বলদ্বারা আকৃষ্ট হইতেছে। প্রমাণ কর যে, LM, MN, NL দ্বারা সীমাবদ্ধ সমপাতের কেন্দ্র G হইলে, বল তিনটির লব্ধিবল 3μ.PG. [C. U. 1967]

6. একটি সরু সম-তার একটি ত্রিভুজের আকারে বাঁকান হইল। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজাকার তারটির ভারকেন্দ্র এবং ঐ ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র একই বিন্দু হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু।

7. একটি সরু সম-তার ত্রিভুজাকারে বাঁকান হইল। ত্রিভুজটির বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য a, b, c হইলে প্রমাণ কর যে, সম্পূর্ণ ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্রের বাহু তিনটি হইতে দূরত্বের অনুপাত $\frac{b+c}{a} : \frac{c+a}{b} : \frac{a+b}{c}$. [P. U. 1940]

8. $5a$ দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ডকে বাঁকাইয়া এক সুষমষড়্‌ভুজের পাঁচটি বাহুতে পরিণত করা হইল। প্রমাণ কর যে দণ্ডটির প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের যে কোনটি হইতে দণ্ডটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{a}{10}\sqrt{133}$.

9. একটি সুষম ষড়্ভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত শীর্ষবিন্দুগুলিতে যথাক্রমে 5, 4, 6, 2, 7 এবং 3-এর সহিত সমানুপাতিক ভার চাপান হইল। প্রমাণ কর যে, ভার ছয়টির ভারকেন্দ্র ষড়্ভুজটির কেন্দ্র।

10. একটি উপবৃত্তাকার সম-পাতকে উপাক্ষ (minor axis) বরাবর কাটিয়া একটি অর্ধ-উপবৃত্তাকার সম-পাত পাওয়া গেল। $2a$ এবং $2b$ যথাক্রমে উপবৃত্তের পরাক্ষ ও উপাক্ষ হইলে অর্ধ-উপবৃত্তাকার পাতটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর। [C. U. 1964]

11. 8 একক দৈর্ঘ্যের একটি দ্বিগুণ কোটি দ্বারা ছিন্ন একটি অধিবৃত্তের আকারের সরু সম-পাতের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর। [C. U. 1963]

12. $x=h$ সরলরেখা, x-অক্ষ এবং $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

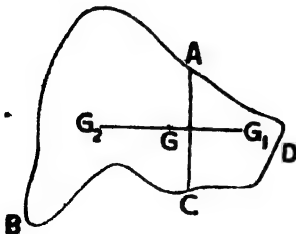
13. একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্য a এবং উহার যে-কোন বিন্দুতে ঘনত্ব, উহার একটি প্রান্ত A হইতে দূরত্বের সহিত সমানুপাতিক। দণ্ডটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

14. $y=\sin x$ বক্র এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর। $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

15. $y^2=x$ অধিবৃত্ত, x-অক্ষ এবং $x=2$ ও $x=3$ কোটি দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

16. একটি সরু সম-তারকে বাঁকাইয়া একটি 5 সে. মি. ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তচাপে পরিণত করা হইল। তারটির প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব 8 সে. মি. হইলে, উহার ভারকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর। [C. U. 1968]

§ 7·6. দুইটি বস্তুর সংযুক্তির ভারকেন্দ্র (C. G. of the join of two bodies) :

মনে কর দুইটি বস্তু ADC ও ABC-র ভার W_1 এবং W_2 এবং উহাদের ভারকেন্দ্রদ্বয় যথাক্রমে G_1 এবং G_2. এই দুইটি বস্তুকে একত্র করিলে যে সংযুক্ত বস্তু হয় তাহার ভারকেন্দ্র মনে কর G। সুতরাং G বিন্দু হইতেছে G_1 বিন্দুতে W_1 বল এবং G_2 বিন্দুতে W_1-এর সমান্তরাল বল W_2-এর লব্ধি বলের প্রয়োগ বিন্দু।

চিত্র 78

$$\text{সুতরাং } \frac{W_1}{GG_2}=\frac{W_2}{GG_1}=\frac{W_1+W_2}{G_1G_2}$$

$$\text{অর্থাৎ } GG_2=\frac{W_1}{W_1+W_2}\,G_1G_2 \text{ এবং } GG_1=\frac{W_2}{W_1+W_2}\,G_1G_2.$$

W_1, W_2 এবং G_1G_2 জানা আছে। অতএব G_1 এবং G_2 বিন্দু হইতে সংযুক্ত বস্তুর ভারকেন্দ্র G-এর দূরত্ব নির্ণয় করা যাইবে।

দ্রষ্টব্য : যদি G_1G_2 রেখার উপর O একটি বিন্দু থাকে যাহা হইতে G_1 এবং G_2 বিন্দুর দূরত্ব OG_1 এবং OG_2 জানা আছে, তবে O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই, $(W_1+W_2).OG = W_1.OG_1+W_2.OG_2$

বা, $OG=\dfrac{W_1.OG_1+W_2.OG_2}{W_1+W_2}$

কোন সুবিধাজনক অক্ষের সাপেক্ষে G_1, G_2 এবং G-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং $(\bar{x}, \bar{y})$ হইলে পাই,

$$\bar{x}=\frac{W_1.x_1+W_2.x_2}{W_1+W_2},\quad \bar{y}=\frac{W_1.y_1+W_2.y_2}{W_1+W_2}.$$

§ 7·7. **কোন বস্তুর এবং উহা হইতে অপসারিত এক অংশের ভারকেন্দ্র জানা থাকিলে অপর অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় (C. G. of a cut off body) :**

মনে কর সমগ্র বস্তুর ভার W এবং ভারকেন্দ্র G এবং ঐ বস্তু হইতে অপসারিত এক অংশের ভার W_1 এবং ভারকেন্দ্র G_1. সুতরাং অবশিষ্ট বস্তুর ভার $W-W_1$ এবং মনে কর উহার ভারকেন্দ্র G_2. সুতরাং সমগ্র বস্তুটি দুইটি বস্তুর সংযোগ। একটি বস্তুর ভার W_1 এবং ভারকেন্দ্র G_1 এবং অপর বস্তুটির ভার $W-W_1$ এবং ভারকেন্দ্র G_2। ইহাদের সম্মিলিত ভারকেন্দ্র G. সুতরাং G হইল G_1 ও G_2 রেখাংশের মধ্যে অবস্থিত একটি বিন্দু এবং $\dfrac{W-W_1}{GG_1}=\dfrac{W_1}{GG_2}=\dfrac{W}{G_1G_2}$

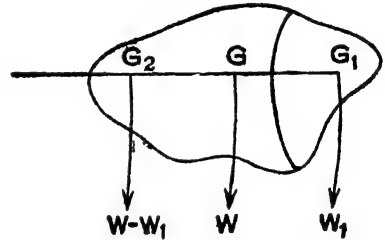
চিত্র 79

$$GG_2=\frac{W_1}{W-W_1}.GG_1$$ । এক্ষণে W, W_1 এবং GG_1 জানা আছে।

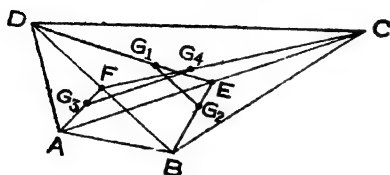
অতএব GG_2-এর মান বাহির করিয়া G_2 বিন্দু নির্ণয় করা যাইবে।

দ্রষ্টব্য : (1) GG_1-এর রেখার উপর O একটি বিন্দু হইলে, আমরা পাই,

$$W.OG=W_1.OG_1+(W-W_1)OG_2$$

$$\therefore\quad OG_2=\frac{W.OG-W_1.OG_1}{W-W_1}$$

যদি G_1, G এবং G_2-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং $(\bar{x}, \bar{y})$ হয়, তবে $\bar{x}=\dfrac{W.x_2-W_1.x_1}{W-W_1}$ এবং $\bar{y}=\dfrac{W.y_2-W_1.y_1}{W-W_1}$.

উদা. 1. একটি চতুর্ভুজাকার সম-পাতের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

ABCD একটি চতুর্ভুজাকার সম-পাত। উহার ভারকেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে। AC যোগ কর এবং মনে কর ইহার মধ্যবিন্দু E.

চিত্র 80

BE ও DE যোগ কর।

মনে কর △ADC ও △ABC-র ভার যথাক্রমে W_1 ও W_2.

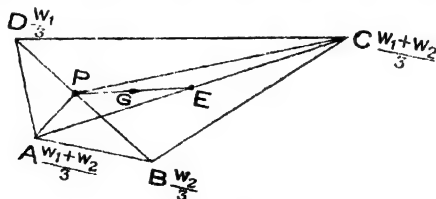
এক্ষণে, △ADC-র ভারকেন্দ্র G_1 হইলে, $EG_1=\frac{1}{3}ED$ এবং △ABC-র ভারকেন্দ্র G_2 হইলে, $EG_2=\frac{1}{3}EB$. G_1G_2 যোগ কর।

সুতরাং সম্পূর্ণ পাতটির ভারকেন্দ্র G হইলে $G_1G : G_2G = W_2 : W_1$, অর্থাৎ ভারকেন্দ্র G_1G_2-র উপর অবস্থিত।

অনুরূপে BD-যোগ করিয়া চতুর্ভুজটিকে △ABD ও △DBC-এ ভাগ করিয়া দেখান যায় যে, এই ত্রিভুজ দুইটির ভারকেন্দ্র G_3, G_4 হইলে সম্পূর্ণ পাতটির ভারকেন্দ্র G_3G_4-এর উপর অবস্থিত হইবে।

সুতরাং নির্ণেয় ভারকেন্দ্র হইল G_1G_2 ও G_3G_4-এর ছেদবিন্দু।

বিকল্প পদ্ধতি : মনে কর, △ACD ও △ACB-র ভার যথাক্রমে W_1 ও W_2.

এক্ষণে △ACD-র ভারকেন্দ্র এবং A, C ও D বিন্দুর প্রত্যেকটিতে $\frac{W_1}{3}$, $\frac{W_1}{3}$, $\frac{W_1}{3}$ ভার তিনটির ভারকেন্দ্র একই বিন্দু। আবার △ACB-র

চিত্র 81

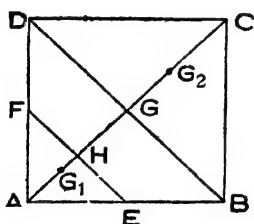
ভারকেন্দ্র এবং A, C ও B বিন্দু তিনটির প্রত্যেকটিতে $\frac{W_2}{3}$, $\frac{W_2}{3}$, $\frac{W_2}{3}$ ভার তিনটির ভারকেন্দ্র একই বিন্দু।

সুতরাং A বিন্দুতে $\frac{W_1}{3}+\frac{W_2}{3}$, C বিন্দুতে $\frac{W_1}{3}+\frac{W_2}{3}$, B বিন্দুতে $\frac{W_2}{3}$ ও D বিন্দুতে $\frac{W_1}{3}$ ভার চারটির ভারকেন্দ্র এবং সমগ্র পাতটির ভারকেন্দ্র একই বিন্দু।

মনে কর DB, P বিন্দুতে $W_2 : W_1$ অনুপাতে বিভক্ত হইল। সুতরাং D ও B বিন্দুতে যথাক্রমে $\frac{W_1}{3}$ ও $\frac{W_2}{3}$ ভার দুইটির পরিবর্তে P বিন্দুতে $\frac{W_1+W_2}{3}$ ভার লওয়া যায়।

অতএব সমগ্র পাতটির ভারকেন্দ্র এবং A, P, C বিন্দু তিনটির প্রত্যেকটিতে $\frac{W_1+W_2}{3}$ পরিমাপের তিনটি ভারের ভারকেন্দ্র একই বিন্দু। আবার A, P, C বিন্দু তিনটির প্রত্যেকটিতে $\frac{W_1+W_2}{3}$ পরিমাপের তিনটি ভারের ভারকেন্দ্র এবং $\triangle$APC-র ভারকেন্দ্র একই বিন্দু।

এক্ষণে $\triangle$APC-র ভারকেন্দ্র PE-র (E, AC-র মধ্যবিন্দু) এরূপ একটি বিন্দু G যে $PG=\frac{2}{3}PE$.

উদা. 2. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। E এবং F বিন্দু AB এবং AD বাহুর মধ্যবিন্দু। ত্রিভুজ AEF কাটিয়া ফেলিলে অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।
[C. U. 1955]

চিত্র 82

AC, EFকে H বিন্দুতে ছেদ করিলে H, EF ও AG-এর মধ্যবিন্দু। (চিত্র দেখ)।

সুতরাং $\triangle$AEF-এর ভারকেন্দ্র G_1, AH-এর এরূপ একটি বিন্দু যে $AG_1=\frac{2}{3}AH$. অতএব অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র G_2 হইলে, G_2, AC-র উপর অবস্থিত হইবে। এক্ষণে, মনে কর বর্গক্ষেত্রের ভার W এবং প্রত্যেকটি কর্ণের দৈর্ঘ্য l.

সুতরাং সমগ্র বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}l^2$ এবং $\triangle$AEF-এর ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}AH.EF=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}AG.\frac{1}{2}BD=\frac{1}{8}AG.BD.=\frac{1}{8}.\frac{1}{2}AC.BD=\frac{1}{16}l^2$.

সুতরাং, $\frac{\text{সমগ্র বর্গক্ষেত্র ABCD-র ক্ষেত্রফল}}{\triangle\text{AEF-এর ক্ষেত্রফল}}=\frac{\frac{1}{2}l^2}{\frac{1}{16}l^2}=\frac{8}{1}$

$\therefore$ $\triangle$AEF-এর ভার$=\frac{W}{8}$ এবং অবশিষ্টাংশের ভার$=\frac{7W}{8}$.

এক্ষণে $AG_1 = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}AG = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}l = \frac{1}{6}l.$ $\therefore$ $GG_1 = \frac{1}{2}l - \frac{1}{6}l = \frac{1}{3}l.$

এক্ষণে যেহেতু সমগ্র বর্গক্ষেত্র, $\triangle AEF$ ও অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র যথাক্রমে G, G_1 ও G_2,

$$\therefore \quad \frac{7W}{8} \times GG_2 = \frac{1}{8}W \times GG_1$$

$$\therefore \quad GG_2 = \frac{1}{7}GG_1 = \frac{1}{7} \times \frac{1}{3}l = \frac{1}{21}l. = \frac{1}{21}. AC.$$

সুতরাং অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র $\overline{AC}$-র একটি বিন্দু G_2 এবং ইহার $\overline{AC}$-র মধ্যবিন্দু হইতে বা বর্গক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র হইতে দূরত্ব $\frac{1}{21}AC$.

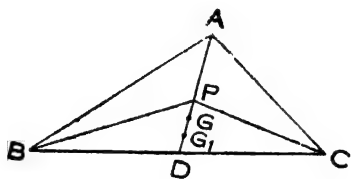
উদা. ৪. ABC একটি সরু ত্রিভুজাকার সম-পাত। ত্রিভুজের অন্তঃস্থ এরূপ একটি বিন্দু P নির্ণয় কর যে, যদি সমগ্র ত্রিভুজটি হইতে PBC ত্রিভুজটি কাটিয়া ফেলা হয়, তবে অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র P বিন্দুটিই হইবে।

[C. U. 1963]

মনে, কর $\triangle ABC$ ও $\triangle PBC$-র ভারকেন্দ্র যথাক্রমে G ও G_1.

এক্ষণে BC-র মধ্যবিন্দু D হইলে G ও G_1 যথাক্রমে AD ও PD-র উপর অবস্থিত হইবে। এক্ষণে অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র P হইলে P, G ও G_1 একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

চিত্র 83

$\therefore$ P, AD-র একটি বিন্দু।

এক্ষণে, যেহেতু G_1, $\triangle PBC$-র ভারকেন্দ্র,

$\therefore \quad G_1D = \frac{1}{3}PD.$ আবার $GD = \frac{1}{3}AD.$

মনে কর $PD = x$ এবং $AD = l.$

মনে কর, $\triangle ABC$ ও $\triangle PBC$-র উচ্চতা যথাক্রমে h ও h_1 এবং উহাদের ভার যথাক্রমে W ও W_1.

সুতরাং অবশিষ্টাংশের ভার $W_2 = W - W_1$.

সুতরাং সম-পাতটির একক ক্ষেত্রফলের ভার w হইলে,

$W = \frac{1}{2}BC.h.w$; $W_1 = \frac{1}{2}BC.h_1.w$ এবং $W_2 = \frac{1}{2}BC.w(h - h_1)$

এক্ষণে, যেহেতু G, G_1 ও P যথাক্রমে $\triangle ABC$, $\triangle PBC$ ও অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র, $\therefore \quad W_1.G_1G = W_2.PG,$

বা, $\frac{W_1}{W_2} = \frac{PG}{GG_1}$, বা, $\frac{h_1}{h - h_1} = \frac{PG}{GG_1}$,

বা, $h_1GG_1 = (h - h_1)PG$, বা, $h_1(GG_1 + PG) = h.PG$,

বা, $\frac{PG_1}{PG} = \frac{h}{h_1}$; এক্ষণে, $\frac{AD}{PD} = \frac{h}{h_1} = \frac{PG_1}{PG} = \frac{\frac{2}{3}PD}{PD - \frac{1}{3}AD} = \frac{2PD}{3PD - AD}$,

বা, $\frac{l}{x}=\frac{2x}{3x-l}$, বা, $3xl-l^2=2x^2$,

বা, $2x^2-3xl+l^2=0$, বা, $(2x-l)(x-l)=0$.

$\therefore$ $x=\frac{l}{2}$ বা l. কিন্তু $x \neq l$,

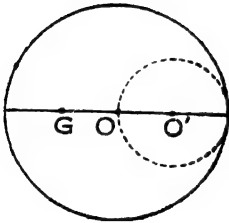
$\therefore$ $x=\frac{l}{2}$. অতএব, P বিন্দু AD-র মধ্যবিন্দু।

উদা. 4. r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পাত হইতে উহার একটি ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত বৃত্ত কাটিয়া ফেলা হইল ; অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর। [U. P. B. 1942]

কর্তিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\frac{r}{2}$.

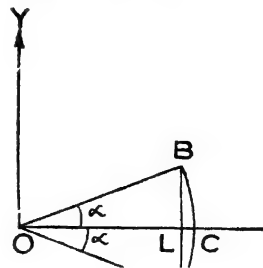
সুতরাং সমগ্র বৃত্তের ক্ষেত্রফল πr^2, কর্তিত বৃত্তের ক্ষেত্রফল $\pi\frac{r^2}{4}$ এবং

চিত্র 84

বৃত্তের অবশিষ্ট অংশের ক্ষেত্রফল$=\frac{3}{4}\pi r^2$. অতএব সমগ্র বৃত্তের ভার W হইলে কর্তিত বৃত্তের ভার $\frac{W}{4}$ এবং অবশিষ্টাংশের ভার $\frac{3}{4}$W.

সমগ্র বৃত্তের এবং কর্তিত বৃত্তের ভারকেন্দ্র যথাক্রমে উহাদের কেন্দ্র O এবং O′. এক্ষণে অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র G হইলে, G, O ও O′ একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে এবং

$$\frac{3}{4}W.OG=\frac{1}{4}W.OO'=\frac{1}{4}W.\frac{r}{2}, \quad \therefore \quad OG=\frac{r}{6}.$$

উদা. 5. একটি বৃত্তাংশের আকারবিশিষ্ট সম-পাতের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

মনে কর O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r. এই বৃত্তের একটি বৃত্তাংশ ACBLA-র আকারের একটি সম-পাতের ভারকেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে। OA ও OB যোগ কর। সম-পাতটিকে AOBCA বৃত্তকলার আকারের একটি সমপাত হইতে $\triangle$AOB-র আকারের একটি সম-পাত ছিন্ন করিয়া পাওয়া গিয়াছে মনে করা যাইতে পারে।

চিত্র 85

এক্ষণে, মনে কর $m\angle AOB=2\alpha$ এবং সম-পাতটির একক ক্ষেত্রফলের ভার

W. মনে কর OL, AB-র উপর লম্ব এবং বৃত্তাংশের চাপকে C বিন্দুতে ছেদ করে। $\overrightarrow{OC}$-কে x-অক্ষ, O-কে মূলবিন্দু এবং O বিন্দুতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপর লম্ব $\overrightarrow{OY}$কে y-অক্ষ মনে কর। যেহেতু বৃত্তাংশটি OC-র সাপেক্ষে প্রতিসম, অতএব বৃত্তাংশের ভারকেন্দ্রের y-স্থানাঙ্ক 0.

এখন, বৃত্তকলা OACBO-র ক্ষেত্রফল $=\pi r^2 . \dfrac{2\alpha}{2\pi}=r^2\alpha$.

সুতরাং বৃত্তকলার ভার $r^2\alpha$.W.

আবার বৃত্তকলার ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2}{3}r\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}, 0\right)$ (উদা 9, পৃষ্ঠা 127)

ত্রিভুজ OAB-র ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}$OL.AB$=\frac{1}{2}r\cos\alpha . 2r\sin\alpha$

$=r^2\sin\alpha\cos\alpha$ এবং ভার $=r^2\sin\alpha\cos\alpha$.W.

আবার $\triangle$OAB-র ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{2}{3}r\cos\alpha, 0)$;

সুতরাং বৃত্তাংশের ভারকেন্দ্র $(\bar{x}, \bar{y})$ হইলে,

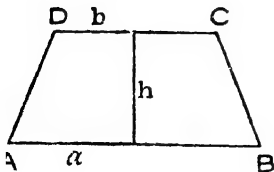
$$\bar{x}=\frac{r^2\alpha . \frac{2}{3}r\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}W-r^2\sin\alpha\cos\alpha . \frac{2}{3}r\cos\alpha . W}{r^2\alpha . W-r^2\sin\alpha\cos\alpha . W}$$

$$=\tfrac{2}{3}r\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=\tfrac{2}{3}r\frac{\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\tfrac{2}{3}r\frac{\sin^3\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}.$$

এবং স্পষ্টতঃ $\bar{y}=0$.

সুতরাং নির্ণেয় ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2}{3}r\dfrac{\sin^3\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}, 0\right)$.

উদা. 6. একটি ট্রাপিজিয়মের দুইটি সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং b এবং উহাদের দূরত্ব h. প্রমাণ কর যে a দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বাহু হইতে ট্রাপিজিয়মের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\dfrac{h}{3}.\dfrac{a+2b}{a+b}$.

মনে কর প্রদত্ত ট্রাপিজিয়মটি ABCD এবং ইহার AB ∥ DC, AB $=a$ ও CD $=b$. এবং AB ও CD-র দূরত্ব h.

চিত্র 86

এক্ষণে ট্রাপিজিয়ম ABCD

$=\triangle$ABC$+\triangle$ACD.

মনে কর ট্রাপিজিয়মের একক বর্গের ক্ষেত্রফলের ভার ω.

এক্ষণে, $m\triangle$ABC$=\frac{1}{2}$AB.$h=\frac{1}{2}ah$ এবং

$m\triangle ACD=\frac{1}{2}DC.h=\frac{1}{2}bh$. সুতরাং উহাদের ভার যথাক্রমে $\frac{1}{2}ah\omega$ ও $\frac{1}{2}bh\omega$. আবার $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$-র ভারকেন্দ্রদ্বয়ের AB হইতে দূরত্ব যথাক্রমে $\frac{h}{3}$ ও $\frac{2h}{3}$.

সুতরাং AB বাহু হইতে ট্রাপিজিয়মের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব

$$=\frac{\frac{1}{2}ah\times\frac{h}{3}\omega+\frac{1}{2}bh\times\frac{2h}{3}\omega}{\frac{1}{2}ah\omega+\frac{1}{2}bh\omega}$$

$$=\frac{\frac{h^2\omega}{6}(a+2b)}{\frac{h\omega}{2}(a+b)}=\frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}.$$

প্রশ্নমালা 7B

1. ABCD বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O. যদি বর্গক্ষেত্রটি হইতে Δ AOB কাটিয়া ফেলা হয়, তবে অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

2 একই ভূমি BC-র বিপরীত দিকে দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC ও DBC অবস্থিত এবং ত্রিভুজ দুইটির উচ্চতা যথাক্রমে h_1 ও h_2. ABDC ক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

3. 36 সে. মি. ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার সম-পাত হইতে 12 সে. মি. ব্যাসার্ধের এরূপ একটি অংশ অপসারিত করিতে হইবে যেন অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র বৃত্তের ভারকেন্দ্র হইতে 2 সে. মি. দূরে অবস্থিত হয়। অপসারিত অংশের কেন্দ্র নির্ণয় কর।

4. একটি বৃত্তাকার পাতে একটি বর্গাকার ছেঁদা করা হইল, বৃত্তের ব্যাসার্ধ বর্গের কর্ণ। যদি বৃত্তের ব্যাস a হয়, তাহা হইলে দেখাও যে অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র বৃত্তের কেন্দ্র হইতে $\frac{a}{8\pi-4}$ দূরে অবস্থিত। [H. S. 1967]

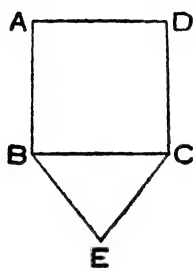
5. AB এবং AC যথাক্রমে $2a$ এবং $2b$ দৈর্ঘ্যের দুইটি সমদণ্ড। যদি $m\angle ABC=\theta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে A হইতে দণ্ড দুইটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব

$$\frac{(a^4+2a^2b^2\cos\theta+b^4)^{\frac{1}{2}}}{a+b}.$$

6. একটি চতুর্ভুজের সমতলে অবস্থিত একটি সরলরেখা হইতে চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির এবং উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর দূরত্ব যথাক্রমে a, b, c, d এবং e. প্রমাণ কর যে, ঐ সরলরেখা হইতে চতুর্ভুজটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব

$$\frac{1}{3}(a+b+c+d-e).$$

7. একটি ত্রিভুজাকার সম-পাত হইতে উহার ভূমির সমান্তরাল একটি সরলরেখাদ্বারা ত্রিভুজের উপরদিক হইতে এক-চতুর্থাংশ আয়তন অপসারিত হইল। অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

8. একটি ত্রিভুজাকার সম-পাত ABC-র B ও C শীর্ষ বিন্দুদ্বয়ে উহাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল সরলরেখাদ্বারা △ABC-র ক্ষেত্রফলের $\frac{1}{n}$ অংশ ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজাকার অংশ অপসারিত হইল। সম-পাতটির অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

চিত্র 87

9. পাশের চিত্রে ABCD একটি বর্গক্ষেত্র, BCE একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য 12 সে. মি. এবং ত্রিভুজটির উচ্চতা 6 সে. মি.। AD রেখা হইতে সমগ্রক্ষেত্র ABECDA-র ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

10. ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। সামান্তরিকটি হইতে △BOC কাটিয়া ফেলা হইলে অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

অষ্টম অধ্যায়

একই সমতলে ক্রিয়াশীল বলসমূহের সাম্যাবস্থার শর্ত

• § 8·1. **উপপাদ্য। একটি দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত একই সমতলে ক্রিয়াশীল সসীম সংখ্যক বল সাম্যাবস্থায় না থাকিলে, উহাদের একটিমাত্র বলে অথবা একটিমাত্র যুগ্মবলে পরিণত করা যাইবে।**

মনে কর, P_1 P_2, P_3, $P_4 \cdots\cdots P_n$, n-সংখ্যক বল একই সমতলে ক্রিয়াশীল এবং একটি দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত। প্রমাণ করিতে হইবে যে, এই বলসমূহকে একটিমাত্র লব্ধি বলে অথবা একটিমাত্র যুগ্মবলে পরিণত করা যায়।

এই উপপাদ্যটি প্রমাণের পূর্বে আমরা নিম্নলিখিত প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণ করিব।

প্রতিজ্ঞা। কোন দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত তিনটি বল একই সমতলে ক্রিয়াশীল হইলে উহাদের দুইটি বলে পরিণত করা যাইবে।

মনে কর বল তিনটি P, Q, R. এক্ষণে P, Q পরস্পর ছেদী হইলে, (উহাদের ছেদবিন্দুতে উহাদের প্রয়োগবিন্দু স্থানান্তরিত করিয়া বলের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী উহাদের একটিমাত্র বল F-এ পরিণত করা যাইবে। সুতরাং P, Q ও R-এর স্থলে আমরা দুইটি বল R ও F পাইলাম।

এইবার মনে কর P ও Q পরস্পর সদৃশ সমান্তরাল অথবা অসমান ও অসদৃশ সমান্তরাল। প্রত্যেকক্ষেত্রেই P ও Q-এর একটি লব্ধিবল F পাওয়া যাইবে। সুতরাং বল তিনটির স্থলে F ও R দুইটি বল পাওয়া যাইবে। যদি P ও Q একটি যুগ্মবল গঠন করে, তবে P ও R-এর লব্ধি F' ও Q দুইটি বল পাওয়া যাইবে। এইক্ষেত্রে P ও R ও একটি যুগ্মবল গঠন করিলে Q ও R পরস্পর সদৃশ সমান্তরাল এবং উহাদের একটি লব্ধিবল $Q+R$ পাওয়া যাইবে। সুতরাং এইক্ষেত্রেও আমরা দুইটি বল P ও $Q+R$ পাইব।

অতএব দেখা গেল সকলক্ষেত্রেই একটি দৃঢ় বস্তুর উপর একই সমতলে প্রযুক্ত তিনটি বলকে দুইটি বলে পরিণত করা যাইবে।

এক্ষণে, উপরের প্রতিজ্ঞা অনুযায়ী P_1, P_2 ও P_3 বল তিনটিকে দুইটি বল Q_1 ও Q_2-এ পরিণত করা যাইবে। আবার Q_1, Q_2 ও P_4কে দুইটি বল R_1 ও R_2-এ পরিণত করা যাইবে এবং R_1 ও R_2 ও P_4কে দুইটি বল S_1, S_2-এ পরিণত করা যাইবে। এইভাবে প্রদত্ত n-সংখ্যক বল P_1, P_2, P_3,……, P_n-কে শেষ পর্যন্ত T_1 ও $T_2 \equiv P_n$ এই দুইটি বলে পরিণত করা যাইবে। এক্ষনে T_1 ও T_2 হয় একটি যুগ্মবল নতুবা উহাদের একটি লব্ধিবল থাকিবে। সুতরাং উপপাদ্যটি সম্পূর্ণরূপে প্রমাণিত হইল।

§ 8·2. **উপপাদ্য। একটি দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত একই সমতলে ক্রিয়াশীল বলসমূকে শেষ পর্যন্ত একটি প্রদত্ত বিন্দুতে ক্রিয়াশীল একটি বল এবং একটি যুগ্মবলে পরিণত করা যায়। ঐ বলটির যে কোন দিকে বিশ্লেষিতাংশ ঐ দিকে বলসমুহের বিশ্লেষিতাংশ সমূহের বৈজিক যোগফলের সমান হয় এবং ঐ যুগ্মবলটির ভ্রামক প্রদত্ত বলসমুহের ঐ প্রদত্ত বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকসমূহের বৈজিক যোগফলের সমান হয়।**

মনে কর, একটি দৃঢ় বস্তুর উপর প্রযুক্ত এবং একটি সমতলে ক্রিয়াশীল $P_1, P_2, \cdots, P_n$; n-সংখ্যক বল এবং O দৃঢ়বস্তুটির একটি বিন্দু। এক্ষণে, O বিন্দুতে P_1 বলের সুমান, সমান্তরাল কিন্তু বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল দুইটি বল (সুতরাং একটি P_1 বলের সদৃশ এবং অপরটি ঐ বলের অসদৃশ) P_1, P_1 প্রয়োগ কর। পরস্পর সমান ও বিপরীত এবং একই বিন্দুতে প্রযুক্ত হওয়ায় উহারা পরস্পরকে অপসারিত করে এবং উহাদের প্রয়োগে বস্তুটির অবস্থার কোন পরিবর্তন হয় না। এক্ষণে প্রদত্ত বল P_1 এবং O বিন্দুতে প্রযুক্ত উহার সমান ও অসদৃশ সমান্তরাল বল P_1 একটি যুগ্মবল গঠন করে। সুতরাং প্রদত্ত P_1 বলের স্থলে এখন একটি যুগ্মবল এবং O বিন্দুতে প্রযুক্ত প্রদত্ত P_1 বলের সমান ও সদৃশ সমান্তরাল একটি বল P_1 পাওয়া গেল। অনুরূপে প্রদত্ত $P_2, P_3, \cdots, P_n$ বলের প্রত্যেকটির স্থলে একটি যুগ্মবল এবং O বিন্দুতে প্রযুক্ত উহার সমান ও সদৃশ সমান্তরাল বল পাওয়া যায়। অতএব, $P_1, P_2, \cdots P_n$ বলের পরিবর্তে n-সংখ্যক যুগ্মবল (P_1, p_1), (P_2, p_2), $\cdots$ (P_n, p_n) [$p_1, p_2 \cdots, p_n$ যথাক্রমে O বিন্দু হইতে প্রদত্ত বল $P_1, P_2, \cdots P_n$-এর ক্রিয়ারেখা সমূহের লম্ব দূরত্ব] এবং O বিন্দুতে প্রযুক্ত n-সংখ্যক বল $P_1, P_2, \cdots P_n$ পাওয়া গেল। এক্ষণে, n-সংখ্যক যুগ্মবলকে একটি যুগ্মবল (P, p) এবং O বিন্দুতে প্রযুক্ত n-সংখ্যক বলকে একটি মাত্র বলে পরিণত করা যায়। সুতরাং শেষ পর্যন্ত প্রদত্তব লসমূহকে একটি মাত্র লব্ধিবল F ও একটি যুগ্মবলে পরিণত করা যায়।

যেহেতু F, O বিন্দুতে প্রযুক্ত P_1, $P_2, \cdots P_n$ বলসমূহের লব্ধি এবং এই বলগুলি যথাক্রমে প্রদত্ত বলসমূহ $P_1, P_2, \cdots, P_n$-এর সদৃশ, সমান্তরাল, অতএব F-এর যেকোন দিকে বিশ্লেষিতাংশ, প্রদত্ত বলসমূহের ঐ একই দিকে বিশ্লেষিতাংশ সমূহের বৈজিক যোগফলের সমান। আবার যেহেতু শেষ পর্যন্ত প্রাপ্ত (P, p) যুগ্মবল (P_1, p_1), $(P_2, p_2) \cdots$, (P_n, p_n) যুগ্মবল সমূহের লব্ধি,

অতএব (P, p) যুগ্মবলের ভ্রামক $(P_1, p_1), (P_2, p_2), \cdots (P_n, p_n)$-এর ভ্রামক সমূহের বৈজিক যোগফল $= \pm P_1p_1 \pm P_2p_2 \pm P_3p_3 (+) \pm - \pm P_np_n$

$= O$ বিন্দুর চারিদিকে $P_1, P_2, \cdots, P_n$ বলসমূহের ভ্রামক সমূহের বৈজিক যোগফল।

উদা. 1. তিনটি বল P, Q, R, ABC ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{AB}$ বাহু তিনটিতে ক্রিয়াশীল। প্রমাণ কর যে বল তিনটির লব্ধিবল

$$\sqrt{P^2+Q^2+R^2-2QR\cos\alpha-2RP\cos\beta-2PQ\cos\gamma}.$$

$[\alpha = m\angle BAC, \beta = m\angle ABC, \gamma = m\angle BCA]$

মনে কর প্রদত্ত বল তিনটির লব্ধিবল F এবং উহা $\overrightarrow{BC}$-র সহিত θ-কোণে নত। এক্ষণে, বল তিনটি ও উহার লব্ধিবল F-কে $\overrightarrow{BC}$-র দিকে ও $\overrightarrow{BC}$-র লম্ব সরলরেখার $\overrightarrow{OY}$-র দিকে বিশ্লেষিত করিয়া পাই,

$$F\cos\theta = P - Q\cos BCA - R\cos ABC$$
$$= P - Q\cos\gamma - R\cos\beta. \cdots (1).$$

এবং $F\sin\theta = Q\sin BCA - R\sin ABC$
$$= Q\sin\gamma - R\sin\beta \cdots (2).$$

চিত্র ৫৪

(1) ও (2)-এর বর্গ করিয়া এবং যোগ করিয়া পাই,

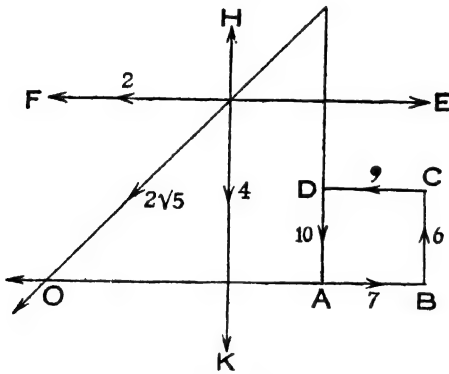
$$F^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = (P - Q\cos\gamma - R\cos\beta)^2 + (Q\sin\gamma - R\sin\beta)^2$$

$$= P^2 + Q^2\cos^2\gamma + R^2\cos^2\beta + 2QR\cos\beta\cos\gamma - 2RP\cos\beta - 2PQ\cos\gamma + Q^2\sin^2\gamma + R^2\sin^2\beta - 2QR\sin\beta\sin\gamma$$

বা, $F^2=P^2+Q^2(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma)+R^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)$
$+2QR\,(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)-2RP\cos\beta-2PQ\cos\gamma$
$=P^2+Q^2+R^2+2QR\cos(\beta+\gamma)-2RP\cos\beta-2PQ\cos\gamma.$
$=P^2+Q^2+R^2+2QR\cos(180°-\alpha)-2RP\cos\beta-2PQ\cos\gamma$
$[\because\ \alpha+\beta+\gamma=180°]$
$=P^2+Q^2+R^2-2QR\cos\alpha-2RP\cos\beta-2PQ\cos\gamma.$

$\therefore\ F=\sqrt{P^2+Q^2+R^2-2QR\cos\alpha-2RP\cos\beta-2PQ\cos\gamma}$

উদা. 2. 7, 6, 9 ও 10 কে. জি. ভারের চারিটি বল যথাক্রমে ABCD বর্গক্ষেত্রের $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ ও $\overline{DA}$ বাহুতে ক্রিয়াশীল। প্রমাণ কর যে, বল চারিটির লব্ধিবল $\overrightarrow{AB}$ কে O বিন্দুতে ছেদ করিলে $OA=\frac{15}{4}AB$.

$\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ রেখায় ক্রিয়াশীল পরস্পর অসদৃশ, সমান্তরাল 7 কে.জি. ও 9 কে. জি. বল দুইটির লব্ধিবল 9 কে.জি. ভার বলটির সদৃশ ও সমান্তরাল একটি 2 কে.জি. ভার বল। মনে কর এই বলের ক্রিয়ারেখা $\overrightarrow{EF}$, আবার $\overrightarrow{DA}$ ও $\overrightarrow{BC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল দুইটি পরস্পর অসদৃশ, সমান্তরাল বল 10 কেজি. ভার ও 6 কে.জি. ভার বল দুইটির লব্ধিবল 10 কে.জি. ভার বলটির সদৃশ ও সমান্তরাল একটি 4 কে.জি. ভার বল।

চিত্র 89

মনে কর, এই বলটির ক্রিয়ারেখা $\overrightarrow{HK}$. সুতরাং প্রদত্ত বল চারিটির লব্ধিবল $\overrightarrow{EF}$ ও $\overrightarrow{HK}$ রেখায় ক্রিয়াশীল যথাক্রমে 2 কে.জি. ভার ও 4 কে.জি. ভার বল দুইটির লব্ধিবল $\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ কে.জি. ভার বল।

এক্ষণে, মনে কর এই লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা $\overleftrightarrow{AB}$-কে O বিন্দুতে ছেদ করে। এক্ষণে প্রদত্ত চারিটি বলের O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক সমূহের বৈজিক যোগফল

$=$O বিন্দুর চারিদিকে উহাদের লব্ধিবল $2\sqrt{5}$ কে. জি. ভার বলের ভ্রামকের সমান।

অতএব, $7.0+6.OB+9.AD-10.OA=0$

[∵ লব্ধিবলটি O বিন্দুগামী]

বা, $6(OA+AB)+9.AB-10.OA=0$ [∵ $AB=AD$]

বা, $15AB=4.OA$ বা, $OA=\frac{15}{4}AB.$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের সমতলে ক্রিয়াশীল কোন বলকে ঐ ত্রিভুজের বাহুত্রয়ে ক্রিয়াশীল তিনটি বলে বিশ্লেষিত করা যাইবে।

মনে কর F বলটি ABC ত্রিভুজের সমতলে ক্রিয়াশীল এবং F-এর ক্রিয়ারেখা $\overleftrightarrow{BC}$-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। AD যোগ কর। এক্ষণে, F বলকে $\overleftrightarrow{DC}$ ও $\overleftrightarrow{DA}$ রেখায় ক্রিয়াশীল দুইটি উপাংশে বিশ্লেষিত কর। আবার $\overleftrightarrow{DA}$ রেখায় ক্রিয়াশীল উপাংশটিকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল দুইটি উপাংশে বিশ্লেষিত করা যায়। সুতরাং শেষ পর্যন্ত প্রদত্ত বল F, ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয়ে ক্রিয়াশীল তিনটি বলে বিশ্লেষিত হইল।

যদি F-এর ক্রিয়ারেখা BC-র সমান্তরাল হয়, তবে মনে কর উহা $\overrightarrow{CA}$-কে E বিন্দুতে ছেদ করে। এখন পূর্বের ন্যায় F-কে ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয়ে ক্রিয়াশীল তিনটি বলে বিশ্লেষিত করা যাইবে। যদি F-এর ক্রিয়ারেখা ত্রিভুজের কোন বাহু হয়, তবে নির্ণেয় উপাংশ তিনটি হইবে F, 0, 0.

উদা. 4. একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এরূপ তিনটি বিন্দু A, B, C-র চারিদিকে একই সমতলে ক্রিয়াশীল একটি বলশ্রেণীর ভ্রামক সমূহের বৈজিক যোগফল যথাক্রমে L, M ও N. প্রমাণ কর বল শ্রেণীর লব্ধি বল F হইলে,

$$F^2=\frac{\Sigma a^2(L-M)(L-N)}{4\Delta^2}\ ;\ a, b, c \text{ ও } \Delta$$

যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য ও ক্ষেত্রফল।

প্রদত্ত বলশ্রেণীর প্রত্যেকটি বলকে ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয়ে ক্রিয়াশীল তিনটি উপাংশে বিশ্লেষিত করা যায়। সুতরাং প্রদত্ত বলশ্রেণীকে ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয়ে ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q, R-এ পরিণত করা যাইবে।

সুতরাং A বিন্দুর চারিদিকে প্রদত্ত বলশ্রেণীর ভ্রামক সমূহের বৈজিক যোগফল $L=\overleftrightarrow{BC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল P বলের A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক (কারণ অন্য বল দুইটির ক্রিয়ারেখা A বিন্দুগামী);

$\therefore\ P.\frac{2\Delta}{a}=L$ (কারণ, A বিন্দু হইতে BC-র দূরত্ব $\frac{2\Delta}{a}$). $\therefore\ P=\frac{aL}{2\Delta}$

অনুরূপে $Q=\frac{bM}{2\Delta}$ এবং $R=\frac{cN}{2\Delta}$.

আবার উপরের উদাহরণ 1-এর ন্যায় P, Q ও R-এর লব্ধিবল F হওয়ায়,

$$F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 - 2QR \cos A - 2RP \cos B - 2PQ \cos C$$

বা, $$F^2 = \frac{a^2L^2}{4\Delta^2} + \frac{b^2M^2}{4\Delta^2} + \frac{c^2N^2}{4\Delta^2} - \frac{2bcMN}{4\Delta^2}\cos A - \frac{2caNL}{4\Delta^2}\cos B - \frac{2abLM}{4\Delta^2}\cos C$$

বা, $$F^2 = \frac{1}{4\Delta^2}\left\{\Sigma a^2L^2 - \Sigma 2bcMN\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\right\}$$

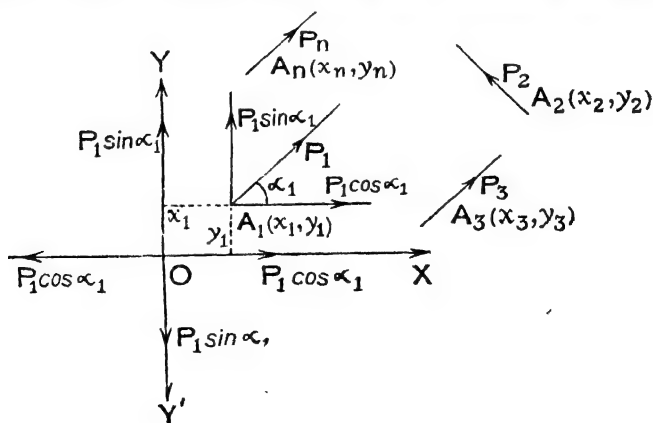
[cos A, cos B, cos C-র মান বসাইয়া]

$$= \frac{1}{4\Delta^2}\{\Sigma a^2L^2 - \Sigma MN(b^2+c^2-a^2)\}$$

$$= \frac{1}{4\Delta^2}\{\Sigma a^2(L^2 + MN - NL - LM)\}$$

$$= \frac{1}{4\Delta^2}\Sigma a^2(L-M)(L-N).$$

উদা. 5. একই সমতলে ক্রিয়াশীল একটি বলশ্রেণীকে G_1 ভ্রামকের একটি যুগ্মবলে পরিণত করা যায়। যদি প্রত্যেক বলের ক্রিয়ারেখা উহার প্রয়োগ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একই দিকে 90° ঘুরিয়া যায়, তবে বলসমূহ G_2 ভ্রামকের একটি যুগ্মবলে পরিণত হয়। প্রমাণ কর যে প্রত্যেক বল তাহার প্রয়োগ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া θ কোণে ঘুরিয়া গেলে বলশ্রেণীকে একটি G ভ্রামকের যুগ্মবলে পরিণত করা যায় এবং $G = G_1 \cos\theta + G_2 \sin\theta$.

মনে কর, $\vec{OX}$ ও $\vec{OY}$ পরস্পর লম্ব সরলরেখাকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরিয়া

চিত্র 90

$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ বলসমূহের প্রয়োগবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1),

(x_2, y_2) .... (x_n, y_n). এবং x-অক্ষের সহিত বলসমূহের ক্রিয়ারেখাগুলির নতি যথাক্রমে $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$.

এক্ষণে বলগুলিকে x ও y-অক্ষের সমান্তরাল দিকে যথাক্রমে $P_1 \cos \alpha_1$, $P_2 \cos \alpha_2, \cdots, P_n \cos \alpha_n$ এবং $P_1 \sin \alpha_1, P_2 \sin \alpha_2, \cdots, P_n \sin \alpha_n$ বলসমূহে বিশ্লেষিত করা হইল। এক্ষণে O বিন্দুতে এই সকল বলের প্রত্যেকটি বলের সমান সদৃশ ও অসদৃশ সমান্তরাল দুইটি করিয়া বল x-অক্ষ ও y-অক্ষরেখায় প্রয়োগ কর। প্রত্যেক বলযুগল সমান ও বিপরীত হওয়ায় পরস্পরকে অপসারিত করিবে এবং উহাদের প্রয়োগে বলশ্রেণীর লব্ধি-র কোন পরিবর্তন হইবে না।

এক্ষণে (x_1, y_1) বিন্দুতে প্রযুক্ত $P_1 \cos \alpha_1$ বল এবং O বিন্দুতে প্রযুক্ত x-অক্ষে ক্রিয়াশীল সমান, অসদৃশ সমান্তরাল বল $P_1 \cos \alpha_1$ একটি যুগ্মবল গঠন করে যাহার ভ্রামক $-y_1 P_1 \cos \alpha_1$; সুতরাং P_1 বলের $P_1 \cos \alpha_1$ বিশ্লেষিতাংশের পরিবর্তে একটি যুগ্মবল (যাহার ভ্রামক $-y_1 P_1 \cos \alpha_1$) এবং x-অক্ষে ক্রিয়াশীল এই বিশ্লেষিতাংশের সমান, সদৃশ ও সমান্তরাল O বিন্দুতে প্রযুক্ত একটি বল $P_1 \cos \alpha_1$ পাওয়া গেল। অনুরূপে $P_1 \sin \alpha_1$ বিশ্লেষিতাংশের পরিবর্তে একটি যুগ্মবল (যাহার ভ্রামক $x_1 P_1 \sin \alpha_1$) এবং O বিন্দুতে প্রযুক্ত y-অক্ষে ক্রিয়াশীল এই বিশ্লেষিতাংশের সমান, সদৃশ ও সমান্তরাল একটি বল $P_1 \sin \alpha_1$ পাওয়া যায়।

সুতরাং প্রদত্ত P_1 বলের পরিবর্তে O বিন্দুতে প্রযুক্ত যথাক্রমে x ও y অক্ষে ক্রিয়াশীল দুইটি বল $P_1 \cos \alpha_1$, $P_1 \sin \alpha_1$, ও $x_1 P_1 \sin \alpha_1 - y_1 P_1 \cos \alpha_1$ ভ্রামকের একটি যুগ্মবল পাওয়া যায়। অনুরূপে $P_2, P_3 \cdots P_n$ বলসমূহের জন্য (*i*) যথাক্রমে O বিন্দুতে প্রযুক্ত x-অক্ষে ক্রিয়াশীল $P_2 \cos \alpha_2$, $P_3 \cos \alpha_3, \cdots, P_n \cos \alpha_n$ বলসমূহ (*ii*) O বিন্দুতে প্রযুক্ত y-অক্ষে ক্রিয়াশীল $P_2 \sin \alpha_2, P_3 \sin \alpha_3, \cdots P_n \sin \alpha_n$ বলসমূহ এবং (*iii*) $x_2 P_2 \sin \alpha_2 - y_2 P_2 \cos \alpha_2, x_3 P_3 \sin \alpha_3 - y_3 P_3 \cos \alpha_3, \cdots\cdots, x_n P_n \sin \alpha_n - y_n P_n \cos \alpha_n$ ভ্রামকের যুগ্মবলসমূহ পাওয়া যাইবে।

এক্ষণে, x-অক্ষে ক্রিয়াশীল বলসমূহকে $\Sigma P_1 \cos \alpha_1$ পরিমাপের একটি লব্ধিবলে, y-অক্ষে ক্রিয়াশীল বলসমূহকে $\Sigma P_1 \sin \alpha_1$ পরিমাপের একটি লব্ধিবলে এবং n-সংখ্যক যুগ্মবলকে $\Sigma(x_1 P_1 \sin \alpha_1 - y_1 P_1 \cos \alpha_1)$ ভ্রামকের একটি যুগ্মবলে পরিণত করা যায়। অর্থাৎ প্রদত্ত বলসমূহের পরিবর্তে x অক্ষ ও y-অক্ষে ক্রিয়াশীল O বিন্দুতে প্রযুক্ত যথাক্রমে $\Sigma P_1 \cos \alpha_1$,

$\Sigma P_1 \sin \alpha_1$ পরিমাপের দুইটি বল ও $\Sigma(x_1P_1 \sin \alpha_1 - y_1P_1 \cos \alpha_1)$ ভ্রামকের একটি যুগ্মবল পাওয়া যায়।

এক্ষণে বলসমূহকে G_1 ভ্রামকের একটি যুগ্মবলে পরিণত করা যায় বলিয়া

$$\Sigma P_1 \cos \alpha_1 = 0 = \Sigma P_1 \sin \alpha_1 \cdots\cdots(1)$$

$$G_1 = \Sigma(x_1P_1 \sin \alpha_1 - y_1P_1 \cos \alpha_1) \cdots\cdots(2)$$

এক্ষণে, যখন প্রত্যেক বলের ক্রিয়ারেখা উহার প্রয়োগবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া θ কোণে ঘুরিয়া যায়, তখন x ও y-অক্ষে বলশ্রেণীর বিশ্লেষিতাংশ সমূহের বৈজিক যোগফল যথাক্রমে $\Sigma P_1 \cos(\alpha_1+\theta)$ ও $\Sigma P_1 \sin(\alpha_1+\theta)$.

এক্ষণে $\Sigma P_1 \cos(\alpha_1+\theta) = \Sigma P_1 (\cos \alpha_1 \cos \theta - \sin \alpha_1 \sin \theta)$

$= \cos \theta \, \Sigma P_1 \cos \alpha_1 - \sin \theta \Sigma P_1 \sin \alpha$

$= \cos \theta . 0 - \sin \theta . 0$ [(1) হইতে] $= 0$.

আবার, $\Sigma P_1 \sin(\alpha_1+\theta) = \Sigma P_1(\sin \alpha_1 \cos \theta + \cos \alpha_1 \sin \theta)$

$= \cos \theta \Sigma P_1 \sin \alpha_1 + \sin \theta \Sigma P_1 \cos \alpha_1$

$= \cos \theta . 0 + \sin \theta . 0$ [(1) হইতে] $= 0$.

সুতরাং বলশ্রেণী এইক্ষেত্রেও একটি যুগ্মবলে পরিণত হইবে এবং এই যুগ্মবলের ভ্রামক

$$G = \Sigma\{x_1P_1 \sin(\alpha_1+\theta) - y_1P_1 \cos(\alpha_1+\theta)\}$$

$$= \Sigma\{x_1P_1 (\sin \alpha_1 \cos \theta + \cos \alpha_1 \sin \theta) - y_1P_1 (\cos \alpha_1 \cos \theta - \sin \alpha_1 \sin \theta)\}$$

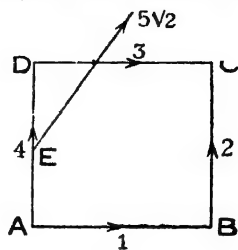
$$= \cos \theta \, \Sigma(x_1P_1 \sin \alpha_1 - y_1P_1 \cos \alpha_1) + \sin \theta \Sigma(x_1P_1 \cos \alpha_1 + y_1P_1 \sin \alpha_1) \cdots\cdots(3)$$

এক্ষণে যদি $\theta = 90°$ হয়, অর্থাৎ বলসমূহের ক্রিয়ারেখা উহাদের প্রয়োগ-বিন্দুর চারিদিকে 90° কোণে ঘুরিয়া যায়, তবে $\theta = 90°$ বসাইয়া পাই, বলশ্রেণী একটি যুগ্মবলে পরিণত হইবে এবং (3) হইতে পাই এই যুগ্মবলের ভ্রামক $G_2 = \Sigma(x_1P_1 \cos \alpha_1 + y_1P_1 \sin \alpha_1)$

সুতরাং (3) হইতে পাই, $G = G_1 \cos \theta + G_2 \sin \theta$.

উদা. 6. 1, 2, 4 ও 3-এর সহিত সমানুপাতি চারিটি বল ABCD বর্গক্ষেত্রের $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AD}$ ও $\vec{DC}$ বাহু চারিটিতে ক্রিয়াশীল; বর্গক্ষেত্রটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 ফুট। বল চারিটির লব্ধিবলের মান ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর।

মনে কর বল চারিটির পরিমাপ যথাক্রমে 1, 2, 4 ও 3 একক।

এক্ষণে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল 1 একক এবং 3 একক সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধিবল $\overrightarrow{AB}$-র সমান্তরাল ও সদৃশ 4 এককের একটি বল এবং $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{AD}$ রেখায় ক্রিয়াশীল 2 একক এবং 4 একক সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধিবল উহাদের সদৃশ ও সমান্তরাল আর একটি 6 এককের বল।

চিত্র 91

এক্ষণে ABCD একটি বর্গক্ষেত্র হওয়ায় এই লব্ধি বল দুইটি পরস্পরের সহিত সমকোণে নত।

সুতরাং এই লব্ধিবল দুইটির অর্থাৎ প্রদত্ত বল চারিটির লব্ধিবলের পরিমাপ $\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$ একক এবং এই বলের ক্রিয়ারেখা $\overrightarrow{AD}$-র সহিত $\tan^{-1}\frac{2}{3}$ কোণে নত।

মনে কর এই লব্ধিবল $\overrightarrow{AD}$কে E-বিন্দুতে ছেদ করে।

এক্ষণে, প্রদত্ত বলগুলির E বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক সমূহের বৈজিক যোগফল = লব্ধিবল $2\sqrt{13}$-এর E বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক সমূহের যোগফল = 0.

$\therefore\quad 1.AE+2.AB-3.DE=0$ বা, $AE+2\times 2-3(2-AE)=0.$

$\therefore\quad AE=\frac{1}{2}\quad \therefore\quad ED=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.\quad AE : ED=1 : 3.$

প্রশ্নমালা 8A

1. প্রমাণ কর যে, একই সমতলে ক্রিয়াশীল কোন প্রদত্ত বলশ্রেণী সাম্যাবস্থায় না থাকিলে উহাদের দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বলে পরিণত করা যাইবে।

2. প্রমাণ কর যে, একই সমতলে ক্রিয়াশীল কোন প্রদত্ত বলশ্রেণী সাম্যাবস্থায় না থাকিলে, একটি কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে প্রযুক্ত এবং অপরটি একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় ক্রিয়াশীল এরূপ দুইটি বলে পরিণত করা যাইবে।

3. সাম্যাবস্থায় নাই এরূপ একই সমতলে প্রযুক্ত একটি বলশ্রেণীর ঐ সমতলের দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক সমূহের বৈজিক যোগফল শূন্য।

প্রমাণ কর যে, ঐ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার লম্ব সরলরেখার দিকে ঐ বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশ সমূহের বৈজিক যোগফল শূন্য।

4. একটি ত্রিভুজ ABC-র ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহু $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ ও $\vec{AB}$ রেখায় ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q, R-এর লব্ধি F. A, B, C বিন্দু তিনটির চারিদিকে F বলের ভ্রামক যথাক্রমে G, H ও K. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{P}{aG}=\frac{Q}{bH}=\frac{R}{cK}.$$

5. একটি ত্রিভুজের $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ বাহু বরাবর ক্রিয়াশীল দুইটি বলশ্রেণী P, Q, R ও P′, Q′, R′-এর লব্ধি বল দুইটি সমান্তরাল হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(QR'-Q'R)\sin A+(RP'-R'P)\sin B+(PQ'-P'Q)\sin C=0$$

[Lucknow, 1929]

6. P পরিমাপের তিনটি সমান বল ABC ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহুতে ক্রিয়াশীল ; প্রমাণ কর বল তিনটির লব্ধিবলের পরিমাপ

$$P\sqrt{(1-8\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)}.$$

7. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ ; 4, 2 ও 1 পাউণ্ড ভার পরিমাপের তিনটি বল যথাক্রমে $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ও $\overline{BC}$ রেখায় অক্ষরগুলির ক্রমের অভিমুখিতায় ক্রিয়াশীল ; বল তিনটির লব্ধিবলের মান, দিক ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর।

[P. U. 1932]

8. AB, BC এবং 2CA-র সহিত সমানুপাতিক তিনটি বল ABC ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহু তিনটিতে ক্রিয়াশীল ; প্রমাণ কর বল তিনটির লব্ধিবলের পরিমাপ এবং দিক $\overline{CA}$ দ্বারা প্রকাশিত হইবে এবং উহার ক্রিয়ারেখা $\vec{BC}$-র বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করিলে CD = BC হইবে।

[C. U. 1968]

9. সাম্যাবস্থায় নাই, একই সমতলে ক্রিয়াশীল তিনটি বলের একই সরলরেখায় অবস্থিত তিনটি বিন্দু A, B, C-র চারিদিকে ভ্রামক যথাক্রমে G_1, G_2, G_3. প্রমাণ কর যে যথাযথ চিহ্ন গণ্য করিলে,

$$G_1.BC+G_2.CA+G_3.AB=0$$

[P. U. 1939]

10. একটি সুষম ষড়ভুজ ABCDEF-এর ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহুগুলিতে ক্রিয়াশীল ছয়টি বল 1, 2, 3, 4, 5 ও 6-এর সহিত সমানুপাতিক ; প্রমাণ

কর যে বলসমূহের লব্ধিবলের পরিমাপ 6-এর সহিত সমানুপাতিক এবং ইহার ক্রিয়ারেখা ষড়ভুজের কেন্দ্রের যে কোন বাহু হইতে দূরত্বের $3\frac{1}{2}$ গুণ দূরত্বে অবস্থিত 5-এর সহিত সমানুপাতিক বলটির সমান্তরাল রেখায় ক্রিয়াশীল।

[M. T. 1908]

11. একটি বর্গাকার পাত ABCD-র সমতলে ক্রিয়াশীল একটি বলশ্রেণীর A, B, ও C-র চারিদিকে ভ্রামকসমূহের বৈজিক যোগফল যথাক্রমে G_1, G_2 ও G_3. প্রমাণ কর যে বলশ্রেণীর D বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকসমূহের বৈজিক যোগফল $G_1 - G_2 + G_3$. [Burdwan 1969]

12. একই সমতলে ক্রিয়াশীল ছয়টি বল ABCDEF সুষম ষড়্‌ভুজের $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ ও FA বাহুতে ক্রিয়াশীল ; $AB = 1$ ফুট এবং বল ছয়টির পরিমাপ যথাক্রমে 10, 20, 30, 40 P ও Q পাউণ্ড-ভার। বলসমূহ একটি যুগ্মবল হইলে P এবং Q-এর মান নির্ণয় কর। [P. U. 1930]

§ 8·8. একই সমতলে ক্রিয়াশীল তিনটি বলের সাম্যাবস্থার শর্ত :

উপপাদ্য। একই সমতলে একটি দৃঢ়বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিলে বল তিনটি হয় সমবিন্দু নতুবা পরস্পর সমান্তরাল।

[If three coplanar forces acting on a rigid body be in equilibrium, then they are either concurrent or are parallel to one another].

প্রমাণ। মনে কর, একটি দৃঢ়বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে।

এক্ষণে, P, Q বল দুইটি হয় (i) পরস্পরচ্ছেদী নতুবা (ii) সমান্তরাল।

প্রথমে মনে করা যাক P, Q বল দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করে।

সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী O বিন্দুগামী উহাদের একটি লব্ধিবল R′ নির্ণয় করা যায়। এক্ষণে, P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকায় $R = R'$ এবং R ও R′ একই রেখায় বিপরীতদিকে ক্রিয়মান হইবে।

∴ R-বলটি O বিন্দুগামী হইবে অর্থাৎ P, Q, R বল তিনটি O বিন্দুতে সমবিন্দু।

এইবার মনে করা যাক P, Q বল দুইটি সমান্তরাল।

P ও Q কখনও একটি যুগ্মবল গঠন করিতে পারে না; কারণ, সেক্ষেত্রে একটি যুগ্মবল ও একটি বল R সাম্যাবস্থায় থাকিবে, ইহা সম্ভব নয়।

সুতরাং P ও Q-এর একটি লব্ধিবল R′ নির্ণয় করা যাইবে এবং R′ বলটি P ও Q-এর সমান্তরাল হইবে। যেহেতু P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে। অতএব R′=R এবং উহারা একই সরলরেখায় বিপরীত দিকে ক্রিয়মান হইবে। সুতরাং R বলটি P ও Q বল দুইটির সমান্তরাল হইবে।

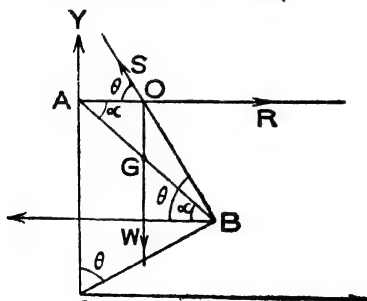
∴ বল তিনটি হয় সমবিন্দু নতুবা পরস্পরের সমান্তরাল হইবে।

দ্রষ্টব্য ঃ যদি বল তিনটি সমবিন্দু হয়, তবে বিভিন্ন প্রশ্নের সমাধানে নিম্নের যে কোন পদ্ধতির সাহায্য গ্রহণ করা যাইতে পারে; (1) পরস্পর সমকোণে নত দুইটি দিকে বল তিনটির বিশ্লেষণ (2) বলের ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞা (3) ল্যামির উপপাদ্য (4) কোন বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক নির্ণয়।

উদাহরণ 1. একটি ভারী সমদণ্ডের একপ্রান্ত একটি উল্লম্ব মসৃণ দেওয়ালে এবং অপরপ্রান্ত দেওয়ালের সহিত θ-কোণে নত একটি মসৃণতলে ঠেকান অবস্থায় সাম্যাবস্থায় আছে। অনুভূমিক দিকের সহিত দণ্ডটির নতি α হইলে প্রমাণ কর যে, $\tan\alpha = \frac{1}{2}\tan\theta$. [C. U. 1963]

মনে কর দণ্ডটি হইল AB; দণ্ডটির উপর ক্রিয়াশীল বল তিনটি হইল

(i) উহার ভারকেন্দ্র G বিন্দুতে উল্লম্ব রেখায় নিম্নাভিমুখী বল W,

(ii) A বিন্দুতে অনুভূমিক দিকে দেওয়ালের প্রতিক্রিয়ায় R এবং (iii) B বিন্দুতে নত তলটির প্রতিক্রিয়া S.

চিত্র 92

যেহেতু R ও W সমান্তরাল নয় এবং বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে, অতএব W, R ও S এর ক্রিয়ারেখা তিনটি একটি বিন্দু O-এ সমবিন্দু।

এক্ষণে O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল W, R ও S বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং লামির উপপাদ্য হইতে পাই,

$$\frac{W}{\sin(180^\circ-\theta)} = \frac{R}{\sin(90^\circ+\theta)} = \frac{S}{\sin 90^\circ}$$

বা, $\frac{W}{\sin\theta} = \frac{R}{\cos\theta}$ $\therefore$ $\frac{W}{R} = \tan\theta$ ...(i)

আবার B বিন্দুর চারিদিকে বল তিনটির ভ্রামক লইয়া পাই,

$$Wl \cos \alpha = R.\ 2l \sin \alpha \text{ (দণ্ডের দৈর্ঘ্য } 2l \text{ মনে করিয়া)}$$

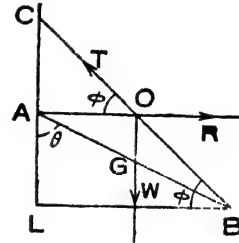
$$\frac{W}{R} = 2 \tan \alpha \qquad \cdots\cdots\text{(ii)}$$

এক্ষণে, (i) ও (ii) হইতে পাই,

$$\tan \theta = 2 \tan \alpha \quad \text{বা,} \quad \tan \alpha = \tfrac{1}{2} \tan \theta.$$

উদা. 2. একটি ভারী সমদণ্ড AB, A বিন্দুতে এক মসৃণ প্রাচীরে ঠেস দিয়া আছে এবং ইহাকে একটি দড়ি BC-র সাহায্যে বাঁধিয়া সাম্যাবস্থায় রাখা হইয়াছে ; C বিন্দু A বিন্দুর উল্লম্ব উপরে। যদি $AB = \sqrt{2}AC$ হয় তাহা হইলে উল্লম্বের সহিত দণ্ডের নতি এবং দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

[H. S. 1963]

মনে কর দণ্ডটি হইল AB এবং ইহা CL প্রাচীরের A বিন্দুতে ঠেস দিয়া আছে। এক্ষণে দণ্ডটির উপর ক্রিয়াশীল বল তিনটি হইল (1) দণ্ডের ভার W, দণ্ডের মধ্যবিন্দু Gতে উল্লম্ব রেখায় নিম্নাভিমুখে ক্রিয়মাণ ; (2) A বিন্দুতে অনুভূমিক দিকে দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R এবং (3) দড়ির টান T.

চিত্র 93

যেহেতু W ও R বল দুইটি পরস্পর সমান্তরাল নয়, সুতরাং বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকায় দড়িটির টানের ক্রিয়ারেখা অর্থাৎ দড়িটি প্রথম বল দুইটির ক্রিয়ারেখা দুইটির ছেদ বিন্দু O দিয়া যাইবে।

এক্ষণে, $\triangle BAC$-তে G বিন্দু BA বাহুর মধ্যবিন্দু এবং GO, AC-র সমান্তরাল। ∴ O বিন্দু BC-র মধ্যবিন্দু। আবার BCL ত্রিভুজে O বিন্দু BC-র মধ্যবিন্দু এবং OA, BL-এর সমান্তরাল। ∴ A বিন্দু CL-এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ AL = AC. এক্ষণে দণ্ডটির উল্লম্ব দিকের সহিত নতি θ হইলে,

$$\cos \theta = \frac{AL}{AB} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{\sqrt{2}AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45°$$

$$\therefore \quad \theta = 45°. \qquad [\because \ AB = \sqrt{2}AC \text{ (প্রদত্ত)}]$$

সুতরাং $m\angle ABL = 45°$ এবং BL = AL, ; $AL = \frac{1}{2}CL$

এখন মনে কর $m\angle AOC = m\angle LBO = \phi$

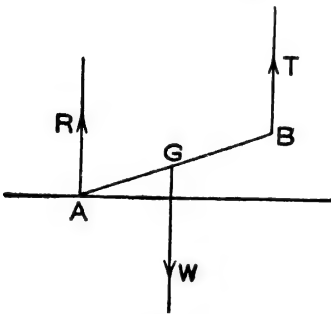
$\therefore \quad \tan\phi = \frac{CL}{BL} = \frac{2BL}{BL} = 2$

এক্ষণে, O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল W, R ও T সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং ল্যামির সূত্র অনুযায়ী

$$\frac{W}{\sin(180^\circ - \phi)} = \frac{R}{\sin(90^\circ + \phi)} \; ; \quad \text{বা,} \quad \frac{W}{\sin\phi} = \frac{R}{\cos\phi}$$

$$R = W\cot\phi = W.\tfrac{1}{2} = \frac{W}{2}.$$

উদা. 3. একটি ভারী সমদণ্ডের ভার W এবং ইহার একটি প্রান্ত একটি মসৃণ অনুভূমিক তলে ঠেস দিয়া রাখা হইয়াছে এবং অপর প্রান্তটি ঐ তলের উপর দিকের একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সহিত একটি দড়ি দ্বারা বাঁধিয়া দণ্ডটিকে সাম্যাবস্থায় রাখা হইয়াছে। দড়িটির টান নির্ণয় কর। [C. U. 1967]

মনে কর W ভারের দণ্ডটি হইল AB এবং ইহার ভার দণ্ডটির মধ্যবিন্দু G-তে উল্লম্বরেখায় নিম্নাভিমুখে ক্রিয়াশীল। আবার A বিন্দুতে অনুভূমিক তলের প্রতিক্রিয়া R উল্লম্বরেখায় উর্ধাভিমুখে ক্রিয়মাণ। মনে কর দড়িটির টান T. সুতরাং W, R ও T বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। এক্ষণে W ও R সমান্তরাল বল। সুতরাং T বল, W ও R-এর সমান্তরাল। অতএব দড়ির টান T-ও উর্ধাভিমুখে ক্রিয়াশীল।

চিত্র 94

সুতরাং W বলটি R ও T বলের লব্ধি বল।

$\therefore \quad R + T = W.$

এবং $\frac{R}{T} = \frac{BG}{AG} = 1 \quad \therefore \quad R = T$

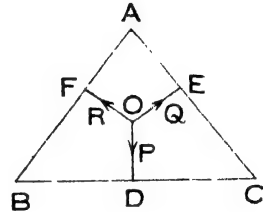
সুতরাং $W = 2T$ অর্থাৎ $T = \frac{W}{2}$.

উদা. 4. প্রমাণ কর যে একটি ভারী দণ্ডের প্রান্তদ্বয়ের একটি প্রান্ত অনুভূমিক মসৃণ সমতলে এবং অপর প্রান্তটি অনুভূমিক তলের সহিত যে কোন নতিতে অবস্থিত অপর কোন মসৃণ সমতলে ঠেস দিয়া সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে না।

এখানে, মসৃণ অনুভূমিক তলের প্রতিক্রিয়া এবং দণ্ডের ভার উভয়েই উল্লম্ব রেখায় ক্রিয়মাণ হওয়ায় পরস্পর সমান্তরাল। আবার যেহেতু তল দুইটি মসৃণ

ও পরস্পর ছেদী এবং উহাদের প্রতিক্রিয়া দুইটি উহাদের সহিত লম্বরেখায় ক্রিয়া করে, সুতরাং প্রতিক্রিয়া দুইটিও পরস্পর ছেদী। অতএব দণ্ডটির উপর ক্রিয়াশীল বল তিনটির দুইটি পরস্পর ছেদী এবং দুইটি সমান্তরাল ; সুতরাং বল তিনটি সমবিন্দু বা পরস্পর সমান্তরাল হইতে পারে না। সুতরাং বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে না অর্থাৎ দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে না।

উদা. 5. ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বাভিমুখে ক্রিয়াশীল (সকলেই অন্তর্মুখী অথবা সকলেই বহির্মুখী) তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। দেখাও যে বল তিনটি sin A, sin B ও sin C-র সমানুপাতী।

মনে কর ABC ত্রিভুজের $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$-র লম্বভাবে (সকলেই অন্তর্মুখী অথবা সকলেই বহির্মুখী) ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং কোন দুইটি বল পরস্পর সমান্তরাল নহে। অতএব বল তিনটি পরস্পর একটি বিন্দু O-এ ছেদ করিবে।

চিত্র 95

এক্ষণে, O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকায় ল্যামির সূত্র অনুযায়ী

$$\frac{P}{\sin EOF}=\frac{Q}{\sin FOD}=\frac{R}{\sin DOE}\cdots(1)$$

এক্ষণে, যেহেতু $m\angle OEA$ ও $m\angle OFA$ প্রত্যেকে সমকোণ,

$\therefore$ AFOE চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ এবং $m\angle A+m\angle EOF=180^\circ$

বা, $m\angle EOF=180^\circ-m\angle A.$

অনুরূপে $m\angle FOD=180^\circ-m\angle B$ এবং $m\angle DOE=180^\circ-m\angle C.$

অতএব (1) হইতে পাই,

$$\frac{P}{\sin(180^\circ-A)}=\frac{Q}{\sin(180^\circ-B)}=\frac{R}{\sin(180^\circ-C)}$$

বা, $\frac{P}{\sin A}=\frac{Q}{\sin B}=\frac{R}{\sin C}.$

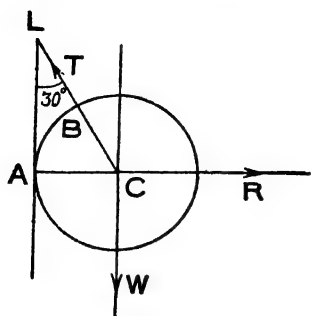
উদা. 6. একটি ভারী গোলক একটি মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালে স্পর্শ করিয়া আছে এবং গোলকের ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যের একটি সূতার এক প্রান্ত গোলকের একটি বিন্দুতে এবং অপর প্রান্ত দেওয়ালের সঙ্গে বাঁধা হইয়াছে। উল্লম্বের সহিত সূতার নতি ও টান এবং দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

মনে কর গোলকের ব্যাসার্ধ r ; $\therefore$ সূতার দৈর্ঘ্য $=r.$

গোলকের উপর ক্রিয়াশীল তিনটি বল হইল

চিত্র 96

(1) গোলকের কেন্দ্র C-তে তাহার ভার W উল্লম্ব রেখায় নীচের দিকে ;

(2) B বিন্দুতে দড়ির টান T এবং

(3) A বিন্দুতে দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R. যেহেতু গোলকটি A বিন্দুতে দেওয়ালকে স্পর্শ করিয়াছে, অতএব $\overrightarrow{AC}$, দেওয়ালের উপর লম্ব এবং দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া $\overrightarrow{AC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল। সুতরাং বল তিনটির দুইটি C বিন্দুগামী ; অতএব বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকায় T বলও C বিন্দু দিয়া যাইবে।

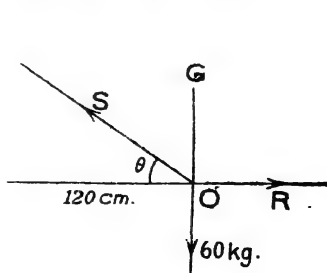
এখানে $\sin ALC = \frac{CA}{CL} = \frac{CA}{CB+BL} = \frac{r}{r+r} = \frac{1}{2} = \sin 30°$

$\therefore$ $m\angle ALC = 30°$, সুতরাং সুতার উল্লম্বের সহিত নতি 30°. উল্লম্ব এবং অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষণ করিয়া পাই,

$T \cos ALC = W$ বা, $T = \frac{W}{\cos 30°} = \frac{W}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$

এবং $R = T \sin 30° = \frac{2W}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{W}{\sqrt{3}}$.

উদা. 7. একটি কবাটের ভার 60 কে. জি. এবং উহার কব্জা দুইটি 90 সে. মি. তফাতে আছে ; কব্জা দুইটি একটি উল্লম্ব রেখায় আটকান এবং এই রেখাটি কবাটের ভারকেন্দ্র হইতে 120 সে. মি. দূরে। যদি উপরের কব্জা সমস্ত ভার বহন করে, তবে প্রত্যেক কব্জায় প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

মনে কর কব্জা দুইটি A ও B এবং AB = 90 সে. মি. ; কবাটের ভার 60 কে. জি. কবাটের ভারকেন্দ্র G বিন্দুতে উল্লম্ব রেখায় নিম্নাভিমুখে ক্রিয়াশীল ; নীচের কব্জা কোন ভার বহন করে না বলিয়া ঐ কব্জার A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া অনুভূমিক রেখায় ক্রিয়াশীল ; সুতরাং 60 কে.জি. ও R বল দুইটি পরস্পর ছেদ করিবে। মনে কর ছেদ বিন্দু O. সুতরাং B কব্জায় প্রতিক্রিয়া S-এর ক্রিয়ারেখা $\overrightarrow{OB}$.

চিত্র 97

এক্ষণে, B বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই,

$R.90=60.120 \quad \therefore \quad R=\frac{60\times120}{90}=80$ কে. জি. ভার ;

আবার উল্লম্বরেখায় বিশ্লেষণ করিয়া পাই,

$S. \sin\theta=60$ কে. জি.$\cdots(1)$

এক্ষণে $OB=\sqrt{OA^2+AB^2}=\sqrt{90^2+120^2}=150.$

$\therefore \quad \sin\theta=\frac{AB}{OB}=\frac{90}{150}=\frac{3}{5}.$

এক্ষণে (1) হইতে পাই, $S=\frac{60 \text{ কে. জি.}}{\sin\theta}$

$=\frac{60 \text{ কে. জি.}}{\frac{3}{5}}=100$ কে. জি. ভার।

উদা. 8. $2a$ দৈর্ঘ্যের একটি ভারী সমদণ্ডের একপ্রান্ত একটি উল্লম্ব মসৃণ প্রাচীরে ঠেকান আছে এবং উহা দেওয়াল হইতে b দূরত্বে দেওয়ালের সমান্তরাল একটি মসৃণ দণ্ডের উপর রক্ষিত হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে। দেখাও যে, উল্লম্বরেখার সহিত দণ্ডটির নতি $\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$. [C. U. 1968]

মনে কর দণ্ডটি হইল AB, G ইহার মধ্যবিন্দু বা ভারকেন্দ্র এবং উল্লম্বের সহিত ইহার নতি θ. দণ্ডটির উপর ক্রিয়াশীল বল তিনটি হইল (*i*) G বিন্দুতে উল্লম্বরেখায় নীচের দিকে ক্রিয়াশীল দণ্ডটির ভার W, (*ii*) মসৃণ দণ্ডটির C বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া S ও (*iii*) দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R.

যেহেতু W ও R যথাক্রমে উল্লম্বরেখায় এবং অনুভূমিক রেখায় ক্রিয়াশীল সুতরাং উহারা একটি বিন্দুতে ছেদ করে। মনে কর এই ছেদ বিন্দু O, সুতরাং S বলের ক্রিয়ারেখা O বিন্দুগামী।

চিত্র 98

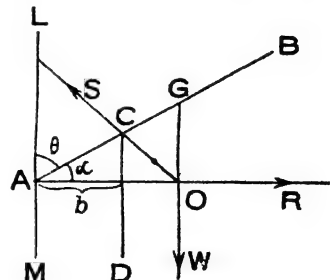
এক্ষণে উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া পাই,

$S\sin\theta-W=0$

বা, $S\sin\theta=W\cdots(1)$

আবার A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই,

$S.b\operatorname{cosec}\theta-W.a\sin\theta=0$

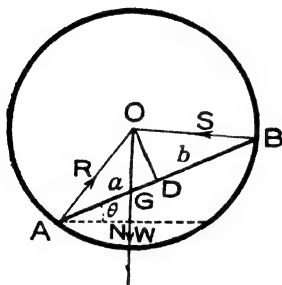
অতএব, $S=\frac{Wa\sin^2\theta}{b}$

বা, $\frac{W}{\sin\theta}=\frac{Wa\sin^2\theta}{b}$ [(1) হইতে]

$\therefore\quad \sin^3\theta=\frac{b}{a}$ বা, $\sin\theta=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$.

উদা. 9. একটি দণ্ডের ভারকেন্দ্র দণ্ডটি a ও b দুইটি অংশে বিভক্ত করে। দণ্ডটিকে একটি মসৃণ গোলকের অভ্যন্তরে স্থাপন করা হইল। সাম্যাবস্থায় দণ্ডটির অনুভূমিক দিকে নতি θ এবং দণ্ডটি কর্তৃক গোলকের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ 2α হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\tan\theta=\frac{b-a}{a+b}\tan\alpha$$ [C. U. 1924]

মনে কর দণ্ডটি হইল AB এবং G উহার ভার কেন্দ্র। এখানে দণ্ডটি নিম্নলিখিত তিনটি বলের ক্রিয়ায় সাম্যাবস্থায় আছে।

চিত্র 99

(i) A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া R

(ii) B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া S এবং

(iii) G বিন্দুতে উল্লম্বরেখায় নিম্নাভিমুখে ক্রিয়াশীল বস্তুটির ভার W.

এখানে, যেহেতু R এবং S বল দুইটির ক্রিয়ারেখা গোলকের কেন্দ্র O বিন্দু দিয়া যায়, সুতরাং W-এর ক্রিয়ারেখাও O বিন্দুগামী হইবে অর্থাৎ G বিন্দু O বিন্দুর নীচের দিকে একই উল্লম্ব রেখায় অবস্থিত হইবে।

মনে কর A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত অনুভূমিক রেখাকে OG, N বিন্দুতে ছেদ করে। $\therefore$ $m\angle GAN=\theta$ এবং $m\angle GNA=90^\circ$ মনে কর OD, দণ্ডটির উপর লম্ব।

$\therefore\quad m\angle AOD=m\angle BOD=\alpha$.

এবং $m\angle DOG=90^\circ-m\angle DGO=90^\circ-m\angle AGN=\theta$.

সুতরাং $\frac{a}{b}=\frac{AG}{GB}=\frac{AD-GD}{BD+GD}=\frac{OD\tan AOD-OD\tan GOD}{OD\tan BOD+OD\tan GOD}$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{\tan\alpha+\tan\theta}$$

এক্ষণে, যোগ ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই,

$$\frac{b-a}{b+a}=\frac{\tan\theta}{\tan\alpha}$$

$$\therefore \quad \tan\theta=\frac{b-a}{b+a}\tan\alpha.$$

প্রশ্নমালা 8 (B)

1. একটি ভারী সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য a এবং ইহার একটি প্রান্ত একটি মসৃণ উল্লম্ব প্রাচীরে ঠেকান আছে। দণ্ডটির অপর প্রান্ত l দৈর্ঘ্যের একটি দড়ি দ্বারা ঐ প্রাচীরের একটি বিন্দুতে বাঁধা আছে। যদি সাম্যাবস্থায় দণ্ডটি প্রাচীরের সহিত θ-কোণে নত থাকে, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\cos^2\theta=\frac{l^2-a^2}{3a^2}$$ [C. U. 1941]

2. একটি সমদণ্ডের দুই প্রান্তে একটি স্থির বিন্দুতে সংলগ্ন দুইটি দড়ি বাঁধিয়া দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় ঝুলান হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, দড়ি দুইটির টান উহাদের দৈর্ঘ্যের সহিত সমানুপাতী।

3. একটি ভারি সমদণ্ড AB উহার A প্রান্তের চারিদিকে ঘুরিতে পারে। অপর প্রান্তে দণ্ডের সহিত 45° কোণে নত একটি দড়ির সাহায্যে দণ্ডটি অনুভূমিক রাখা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে দড়ির টান এবং A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া সমান।

4. একটি সমদণ্ড AB উল্লম্বরেখার সহিত 60° কোণে নত এবং উহার A প্রান্ত একটি উল্লম্ব প্রাচীরে ঠেকিয়া আছে। B প্রান্ত হইতে 1 ফুট দূরে অবস্থিত দণ্ডের একটি বিন্দু একটি দড়ির সাহায্যে A-র উপর দিকে অবস্থিত একটি আংটির সহিত আবদ্ধ। দণ্ডের দৈর্ঘ্য 4 ফুট এবং A বিন্দু ও আংটিটি একই উল্লম্বরেখায় থাকিলে আংটিটির অবস্থান এবং দড়িটির টান ও প্রাচীরের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

5. একটি বর্গাকার সমপাতের দুইটি ধার একই অনুভূমিকরেখায় অবস্থিত দুইটি মসৃণ কীলকের সহিত সংলগ্ন হইয়া একটি উল্লম্বতলে সাম্যাবস্থায় আছে। কীলক দুইটির দূরত্ব c এবং পাতটির প্রত্যেক ধারের দৈর্ঘ্য $2a$ ও পাতটির একটি ধারের অনুভূমিকতলের সহিত নতি θ. যদি সাম্যাবস্থায় পাতটির অবস্থান প্রতিসম না হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $c(\sin\theta+\cos\theta)=a$ [C. U. 1946]

6. একটি সমদণ্ড উহার এক প্রান্তের চারিদিকে স্বাধীনভাবে ঘুরিতে পারে এবং উহার ভারের অর্ধাংশের সমান একটি অনুভূমিক বল উহার অপর প্রান্তে প্রয়োগ করিয়া দণ্ডটিকে স্থির রাখা হইল। প্রমাণ কর যে সাম্যাবস্থায় দণ্ডটির উল্লম্বের সহিত নতি 45°. [C. U. 1951]

7. একটি সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য 40 সে.মি. এবং ভার 50 কে. জি.। ইহাকে দুই প্রান্তে দুইটি দড়ি বাঁধিয়া উপরের একটি পেরেক হইতে ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে; দড়ি দুইটির দৈর্ঘ্য 32 এবং 24 সে. মি. হইলে দড়ি দুইটির টান নির্ণয় কর।

8. একটি দণ্ডের ভারকেন্দ্র উহাকে a ও b দৈর্ঘ্যের দুইটি অংশে বিভক্ত করে। দণ্ডটির দুই প্রান্তের সহিত l দৈর্ঘ্যের একটি দড়ি বাঁধা আছে এবং দড়িটি একটি কীলকের উপর দিয়া গিয়াছে। দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় উল্লম্ব তলে না থাকিলে দণ্ডটির অনুভূমিকতলের সহিত নতি এবং দড়িটির টান নির্ণয় কর।

9. একটি ভারি সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য 150 সে. মি. এবং উহা একটি স্থির বিন্দু হইতে উহার প্রান্তদ্বয়ে বাঁধা 90 সে. মি. ও 120 সে. মি. দৈর্ঘ্যের দুইটি দড়ি দ্বারা ঝুলান হইল। যদি সাম্যাবস্থায় দণ্ডটির উল্লম্বের সহিত নতি θ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $25 \sin \theta = 24$.

10. তিন মিটার দীর্ঘ একটি ভারহীন অনুভূমিকভাবে অবস্থিত দণ্ডের এক প্রান্ত একটি উল্লম্ব দেওয়ালে একটি কব্জার সহিত আটকানো, অপর প্রান্ত একটি দড়ির সাহায্যে কব্জার 4 মিটার উপরে দেওয়ালের একটি বিন্দুতে আবদ্ধ এবং দণ্ডের দড়ি বাঁধা প্রান্ত হইতে 180 কে. জি. ভার ঝুলানো হইয়াছে। দড়ির টান এবং দণ্ডের উপর চাপ নির্ণয় কর।

11. একটি ছবির দুইটি আংটিতে দড়ি বাঁধিয়া দড়িটিকে একটি পেরেকে লাগাইয়া ছবিটিকে প্রতিসম অবস্থায় ঝোলান হইল। দড়ির দৈর্ঘ্য 36 সে. মি. এবং পেরেকটি আংটি দুইটির সংযোজক অনুভূমিক রেখা হইতে 12 সে. মি. উপরে থাকিলে এবং ছবির ভার 16 কে. জি. হইলে দড়ির টান নির্ণয় কর।

12. একটি দড়ির দুই প্রান্ত একটি 10 কে. জি. ভারের একটি ছবির উপরের দুই কোণে বাঁধিয়া ছবিটিকে একটি পেরেক হইতে এরূপে ঝোলান হইল যে দড়িটি উল্লম্ব সমতলে থাকে। দড়িটি পেরেকে 120° কোণ উৎপন্ন করিলে দড়ির টান নির্ণয় কর।

13. একটি সমদণ্ড AB-র উপরের প্রান্ত A একটি মসৃণ কীলকের উপর ঠেকান আছে এবং নীচের প্রান্ত B একটি ভারহীন দড়ির সহিত বাঁধা হইল। দড়িটির অপর প্রান্ত A-র সহিত একই অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত একটি বিন্দু C-তে সংযুক্ত করা হইল। যদি অনুভূমিক তলের সহিত দণ্ড ও দড়ির নতি যথাক্রমে α ও β হয়, তবে প্রমাণ কর $\tan\beta = 2\tan\alpha + \cot\alpha$.

14. অনুভূমিক তলের সহিত α ও β নতি বিশিষ্ট দুইটি মসৃণ নততল একটি অনুভূমিক রেখায় পরস্পরকে ছেদ করে। একটি W ভারের সমদণ্ডের দুইটি প্রান্ত এই নততল দুইটিতে ঠেকান থাকিলে এবং সমদণ্ডের উল্লম্বের সহিত নতি θ হইলে প্রমাণ কর যে, $2\cot\theta = \cot\beta - \cot\alpha$ এবং দণ্ডটির প্রান্তদ্বয়ের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর। [P.U. 1933]

15. $2l$ দৈর্ঘ্যের একটি সমদণ্ডের নিম্নপ্রান্ত একটি মসৃণ উল্লম্ব প্রাচীরে ঠেকান আছে এবং একটি a দৈর্ঘ্যের দড়ি দ্বারা দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় রাখা হইল। দড়িটির এক প্রান্ত সমদণ্ডের নিম্নপ্রান্ত হইতে b দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুতে এবং অপর প্রান্ত প্রাচীরের সহিত বাঁধা হইল। দড়িটির উল্লম্বের সহিত নতি θ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\cos^2\theta = \frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2 l\,(2b-l)}$$ [C.U. 1940]

16. পরস্পর b দূরত্বে একই অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে আবদ্ধ l ও l' দৈর্ঘ্যের দুইটি দড়ির সহিত একটি a দৈর্ঘ্যের সমদণ্ডের দুই প্রান্ত বাঁধিয়া দণ্ডটিকে ঝোলান হইল। দড়ি দুইটি যদি পরস্পর সমকোণে নত দুইটি সরলরেখায় থাকে এবং দণ্ডটির সাম্যাবস্থায় উহাদের টান T_1 ও T_2 হয়,

তবে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{al+bl'}{al'+bl}$.

বিবিধ উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. দুইটি বল P ও Q, $AB\dot{C}$ ত্রিভুজের $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ বাহুদ্বয় দ্বারা প্রকাশিত হয়। D বিন্দু BC বাহুর মধ্যবিন্দু; অপর একটি বল R, $\overline{AD}$ মধ্যমাদ্বারা প্রকাশিত।

প্রমাণ কর যে, $R^2=\frac{1}{4}(P^2+Q^2+2PQ\cos A)$.

যেহেতু P ও Q বল দুইটি $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ দ্বারা প্রকাশিত, সুতরাং উহাদের লব্ধিবল $(1+1)\ \overline{AD}$ দ্বারা যেখানে D, BC-র মধ্যবিন্দু দ্বারা প্রকাশিত হয়।

সুতরাং প্রদত্ত বল P ও Q-এর লব্ধিবল 2R.

$\therefore\quad (2R)^2=P^2+Q^2+2PQ\cos A$

বা, $4R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos A$

অর্থাৎ, $R^2=\frac{1}{4}(P^2+Q^2+2PQ\cos A)$.

উদা. 2. E, ABCD সামান্তরিকের DC বাহুর মধ্যবিন্দু। A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বলত্রয় $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ এবং $2\overline{AE}$ দ্বারা সূচিত হইলে দেখাও যে উহাদের লব্ধিবলের পরিমাণ $3\overline{AC}$.

(চিত্র নিজে অঙ্কন কর)

বলের ত্রিভুজ সূত্র হইতে পাই,

$\overline{AE}+\overline{ED}=\overline{AD}$ এবং $\overline{AE}+\overline{EC}=\overline{AC}$

$\therefore\quad 2\overline{AE}+\overline{ED}+\overline{EC}=\overline{AD}+\overline{AC}$ (যোগ করিয়া) … …(1)

এক্ষণে, যেহেতু E, CD-র মধ্যবিন্দু,

$\therefore\quad \overline{ED}+\overline{EC}=0.$

সুতরাং (1) হইতে পাই,

$2\overline{AE}=\overline{AD}+\overline{AC}$

আবার, যেহেতু $\overline{AD}$ ও $\overline{BC}$ সমান, সমান্তরাল ও একই অভিমুখিতা-বিশিষ্ট, $\therefore\ \overline{AD}=\overline{BC}$

$\therefore\quad 2\overline{AE}=\overline{BC}+\overline{AC}$

$\therefore\quad 2\overline{AE}+\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}+\overline{AC}$

$=\overline{AC}+\overline{AC}+\overline{AC}=3\overline{AC}.$

উদা. 3. 60° নতিতে ক্রিয়াশীল দুইটি বল P ও Q-এর লব্ধিবল R. প্রমাণ কর যে, $2Q+P=\sqrt{4R^2-3P^2}$.

যেহেতু প্রদত্ত বলদ্বয় P ও Q-এর লব্ধিবল R,

$\therefore \quad R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos 60°$

$\qquad = P^2 + Q^2 + PQ \quad [\because \cos 60° = \frac{1}{2}]$

$\therefore \quad 4R^2 = 4P^2 + 4Q^2 + 4PQ$

বা, $4R^2 - 3P^2 = P^2 + 4Q^2 + 4PQ = (P+2Q)^2$

$\therefore \quad P + 2Q = \sqrt{4R^2 - 3P^2}.$

উদা. 4. α কোণে নত, দুইটি বল P ও Q-এর লব্ধিবল R হইলে দেখাও যে, $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(P+Q+R)(P+Q-R)}{(P-Q+R)(Q+R-P)}$

যেহেতু P ও Q বল দুইটির লব্ধিবল R,

$\therefore \quad R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$

বা, $\cos \alpha = \frac{R^2 - P^2 - Q^2}{2PQ}$

$\therefore \quad \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2PQ - R^2 + P^2 + Q^2}{2PQ + R^2 - P^2 - Q^2}.$

বা, $\frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{(P+Q)^2 - R^2}{R^2 - (P-Q)^2}$

বা, $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(P+Q+R)(P+Q-R)}{(R+P-Q)(R-P+Q)}.$

উদা. 5. দুইটি নির্দিষ্ট পরিমাপের বল P ও Q-এর ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম লব্ধিবল যথাক্রমে R ও S. যদি P, Q এবং $\sqrt{RS}$ কোন কণায় ক্রিয়াশীল হইয়া উহাকে সাম্যাবস্থায় রাখে, তবে প্রমাণ কর যে, বল সমূহের দুইটি পরস্পর লম্ব। [Nagpur, 1940]

যেহেতু R ও S যথাক্রমে P ও Q বলদ্বয়ের ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম লব্ধি,

$\therefore \quad R = P - Q$ এবং $S = P + Q$, ($P > Q$ ধরিয়া)

$\therefore \quad RS = P^2 - Q^2$ এবং $\sqrt{RS} = \sqrt{P^2 - Q^2}.$

এক্ষণে, P, Q ও $\sqrt{RS}$ বল তিনটি একটি কণায় ক্রিয়াশীল হইয়া সাম্যাবস্থায় থাকে। সুতরাং বল তিনটি একটি ত্রিভুজ ABC-র ক্রমান্বয়ে গৃহীত তিনটি বাহু $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ও $\overline{AB}$ দ্বারা প্রকাশ করা যাইবে। মনে কর $BC = P$, $CA = Q$ এবং $AB = \sqrt{RS}$ [একক দৈর্ঘ্য, একক বলকে প্রকাশ করে, মনে করিয়া]

∴ $AB^2 = RS = P^2 - Q^2 = BC^2 - CA^2$ বা, $AB^2 + CA^2 = BC^2$

সুতরাং ABC ত্রিভুজটি সমকোণী এবং $\angle BAC$ সমকোণ।

∴ AB ও AC পরস্পর লম্ব। সুতরাং $\sqrt{RS}$ ও Q বলদ্বয় পরস্পর লম্ব।

উদা. 6. $\overline{PA}$ এবং $\overline{PB}$ দ্বারা প্রকাশিত দুইটি বলের লব্ধিবল Q বিন্দুগামী হইলে, প্রমাণ কর যে $\overline{QA}$ ও $\overline{QB}$ দ্বারা প্রকাশিত বল দুইটির লব্ধিবল P বিন্দুগামী হইবে।

মনে কর AB-র মধ্যবিন্দু C.

∴ $\overline{PA} + \overline{PB} = 2\overline{PC}$. আবার $\overline{PA}$ ও $\overline{PB}$ দ্বারা প্রকাশিত বল দুইটির লব্ধিবল Q বিন্দুগামী হওয়ায়, Q বিন্দু PC সরলরেখার একটি বিন্দু অর্থাৎ P বিন্দু QC সরলরেখার একটি বিন্দু।

এক্ষণে $\overline{QA} + \overline{QB} = 2\overline{QC}$. কিন্তু P বিন্দু QC সরলরেখার একটি বিন্দু।

∴ $\overline{QA}$ ও $\overline{QB}$ দ্বারা প্রকাশিত বল দুইটির লব্ধিবল P বিন্দুগামী।

উদা. 7. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q এবং R একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়া করে। তাহাদের লব্ধিবল সর্বদা ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রগামী হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C} \quad \text{বা,} \quad \frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}.$$

B এবং C বিন্দুতে ক্রিয়মাণ Q এবং R সদৃশ সমান্তরাল বল দুইটির লব্ধি Q+R, BC-র D বিন্দুতে ক্রিয়মাণ হইলে $\frac{BD}{DC} = \frac{R}{Q}$ ... ...(1)

এখন D বিন্দুতে ক্রিয়মাণ Q+R এবং A বিন্দুতে ক্রিয়মাণ P বলের লব্ধি AD-র একটি বিন্দু I' দিয়া যাইবে এবং $\frac{AI'}{DI'} = \frac{Q+R}{P}$ ... ...(2)

এক্ষণে যেহেতু P, Q. R এর লব্ধিবল ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দু দিয়া যায়, সুতরাং এই লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা $\overleftrightarrow{II'}$. আবার লব্ধিবল P, Q R-এর সমান্তরাল। সুতরাং P, Q, R যে দিকেই প্রযুক্ত হউক না কেন উহার লব্ধিবল $\overleftrightarrow{II'}$ রেখায় ক্রিয়াশীল হইবে। কিন্তু ইহা সম্ভব হয় যদি I এবং I' একই বিন্দু হয়।

∴ I এবং I' পরস্পর সমাপতিত হইবে। ∴ AD, $\angle BAC$-র সমদ্বিখণ্ডক।

∴ $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}$.

সুতরাং (1) হইতে পাই, $\frac{R}{Q}=\frac{\sin C}{\sin B}$ বা, $\frac{Q}{\sin B}=\frac{R}{\sin C}$..

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়

$$\frac{P}{\sin A}=\frac{Q}{\sin B} \quad \therefore \quad \frac{P}{\sin A}=\frac{Q}{\sin B}=\frac{R}{\sin C}$$

বা, $\frac{P}{\frac{a}{2R'}}=\frac{Q}{\frac{b}{2R'}}=\frac{R}{\frac{c}{2R'}}$ [R′, △ABC-র পরিব্যাসার্ধ]

বা, $\frac{P}{a}=\frac{Q}{b}=\frac{R}{c}$.

উদা. 8. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি তাহাদের লব্ধি সর্বদা ত্রিভুজের লম্ববিন্দুর ভিতর দিয়া যায়, তাহা হইলে $\frac{P}{\tan A}=\frac{Q}{\tan B}=\frac{R}{\tan C}$.

বা, $P(b^2+c^2-a^2)=Q(c^2+a^2-b^2)=R(a^2+b^2-c^2)$

মনে কর, O, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু। AO যোগ করিয়া বর্ধিত করিলে, বর্ধিত $\overrightarrow{AO}$, BCকে D বিন্দুতে ছেদ করে। এক্ষণে, B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে প্রযুক্ত বল Q ও R-এর লব্ধিবল Q+R, BC-র এরূপ একটি বিন্দু E-এ প্রযুক্ত যে, Q.BE = R.CE ··· ···(1)

আবার A ও E বিন্দুতে যথাক্রমে প্রযুক্ত P ও Q+R বল দুইটির লব্ধিবলের প্রয়োগবিন্দু AE-র একটি বিন্দু O′ এবং P.AO′ = Q.BO′ ··· ···(2)

এক্ষণে, যেহেতু P, Q, R-এর লব্ধিবল O বিন্দুগামী, সুতরাং এই লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা $\overleftrightarrow{OO'}$. আবার লব্ধিবল P, Q, R এর সমান্তরাল।

সুতরাং P, Q, R যে দিকেই প্রযুক্ত হউক না কেন উহার লব্ধিবল $\overleftrightarrow{OO'}$ রেখায় ক্রিয়া করিবে ; কিন্তু ইহা সম্ভব হয় যদি O এবং O′ একই বিন্দু হয়। ∴ O এবং O′ পরস্পর সমাপতিত হইবে। সুতরাং D ও E বিন্দু দুইটি সমাপতিত হইবে।

∴ (1) হইতে পাই, $\frac{R}{Q}=\frac{BD}{DC}=\frac{AD \cot B}{AD \cot C}=\frac{\tan C}{\tan B}$

∴ $\frac{Q}{\tan B}=\frac{R}{\tan C}$.

অনুরূপে প্রমাণ করা যাইবে যে, $\frac{P}{\tan A}=\frac{}{\tan B}$

$$\therefore \quad \frac{P}{\tan A}=\frac{Q}{\tan B}=\frac{R}{\tan C}.$$

বা, $$\frac{P}{\dfrac{\sin A}{\cos A}}=\frac{Q}{\dfrac{\sin B}{\cos B}}=\frac{R}{\dfrac{\sin B}{\cos C}}$$

বা, $$\frac{P}{\dfrac{a}{2R'}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}}=\frac{Q}{\dfrac{b}{2R'}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}}=\frac{R}{\dfrac{c}{2R'}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}}$$

[R′, $\triangle$ABC-র পরিব্যাসার্ধ]

বা, $$\frac{P(b^2+c^2-a^2)}{abc}=\frac{Q(c^2+a^2-b^2)}{abc}=\frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}$$

বা, $$P(b^2+c^2-a^2)=Q(c^2+a^2-b^2)=R(a^2+b^2-c^2)$$

উদা. 9. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ; তিনটি বল P, Q, R যথাক্রমে $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{AB}$ রেখায় ক্রিয়াশীল এবং উহাদের লব্ধিবল ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রগামী P-র সমান্তরাল একটি বল। প্রমাণ কর যে, $Q=R=\frac{1}{2}P$.

যেহেতু ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং Q ও R-এর ক্রিয়ারেখা $\overrightarrow{CA}$ ও $\overrightarrow{AB}$, সুতরাং Q ও R-এর অন্তর্গত কোণ 120°. আবার P, Q, R-এর লব্ধিবল P-র সমান্তরাল হওয়ায়, Q ও R বল দুইটির লব্ধিবল, P বলের অর্থাৎ BC-র সমান্তরাল। সুতরাং এই লব্ধিবল Q বলের সহিত $\angle$B-র সমান কোণে অর্থাৎ 60° কোণে নত। $\therefore$ এই লব্ধিবল, R বলের সহিত ও 60° কোণে ও সুতরাং Q ও R বলের সহিত সমান কোণে নত। $\therefore$ Q=R এবং লব্ধিবলের পরিমাপ $2Q\cos\frac{120^\circ}{2}=2Q\cos 60^\circ$ [§ 2·3 অনুসিদ্ধান্ত 5 দেখ]

$$=2Q.\tfrac{1}{2}=Q$$

মনে কর G, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র। AG যোগ কর। মনে কর বর্ধিত AG, BCকে D বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু P বলের ক্রিয়ারেখা $\overrightarrow{BC}$, সুতরাং D বিন্দুকে P বলের প্রয়োগবিন্দু মনে করা যায়। এক্ষণে প্রশ্নানুসারে, D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P বল এবং A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল সমান্তরাল বল Q (Q ও R-এর লব্ধিবল) G বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$$\therefore \quad \frac{P}{AG}=\frac{Q}{DG} \quad \therefore \quad \frac{Q}{P}=\frac{DG}{AG}=\frac{1}{2}$$

[$\because$ ভরকেন্দ্র, মধ্যমার সমত্রিখণ্ডক বিন্দু]

$\therefore$ $Q=\frac{1}{2}P$. সুতরাং $Q=R=\frac{1}{2}P$.

উদা. 10. 5 মিটার দীর্ঘ এবং 4 কে. জি. ভারের একটি সমদণ্ড একপ্রান্ত হইতে 1 মিটার দূরে একটি বিন্দুর উপর ঘুরিতে পারে ; ঐ প্রান্ত হইতে 10 কে.জি. ভার ঝুলান হইয়াছে। অপর প্রান্তে কত ভার প্রয়োগ করিলে দণ্ডটি অনুভূমিক থাকিবে ?

মনে কর, নির্ণেয় ভার W এবং P বিন্দুর উপর দণ্ডটি ঘুরিতে পারে।

P বিন্দুর চারিদিকে দণ্ডের ভারের ভ্রামক এবং W-এর ভ্রামক=ঐ বিন্দুর চারিদিকে 10 কে.জি. ভারের ভ্রামক।

$\therefore \quad 4\times1\frac{1}{2}+W\times4=10\times1$ বা, $4W=10-6=4$;

$\therefore \quad W=1$ কে. জি. ভার।

উদা. 11. 20 মিটার দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ড 10 মিটার ব্যবধানে দুইটি কীলকের উপর রক্ষিত হইয়াছে, ইহার দুইপ্রান্তে 8 কে. জি. এবং 12 কে. জি. ওজনের দুইটি ভার ঝুলান হইয়াছে। যদি কীলক দুইটির উপর সমান ভার পড়ে, তাহা হইলে দণ্ডটির প্রান্ত দুইটি হইতে কীলক দুইটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

মনে কর যে প্রান্ত হইতে 8 কে. জি. ভার ঝুলান হইয়াছে, সে প্রান্ত হইতে উহার নিকটতম কীলকের দূরত্ব x ইঞ্চি। এক্ষণে, কীলক দুইটির প্রতিক্রিয়া এবং ঝুলান ভার দুইটি সাম্যাবস্থায় আছে। মনে কর, সমান প্রতিক্রিয়া দুইটির প্রত্যেকটি R.

$\therefore \quad R+R=8+12$ বা, $2R=20 \quad \therefore \quad R=10$ কে. জি.।

এক্ষণে, যে প্রান্তে 8 কে. জি. ভার ঝুলান হইয়াছে, তাহার নিকটতম কীলকের চারিদিকে ভ্রামক লইয়া, বল চারিটির সাম্যাবস্থার জন্য পাই,

$$8x+0+10\times10-12\,(20-x)=0$$

বা, $20x+100-240=0$, বা, $20x=140$

$\therefore \quad x=7$ মিটার। সুতরাং যে প্রান্ত হইতে 8 কে. জি. ভারটি ঝুলান হয়, তাহার নিকটতম কীলকটি ঐ প্রান্ত হইতে 7 মিটার দূরে। অনুরূপে দেখান যাইবে যে অপর কীলকটির দূরত্ব উহার নিকটবর্তী প্রান্ত হইতে 3 মিটার।

উদা. 12. 16 ফুট দীর্ঘ একটি দণ্ড 10 ফুট ব্যবধানে মধ্যবিন্দু হইতে সমদূরবর্তী দুইটি কীলকের উপর স্থাপিত হইয়াছে। দণ্ডের একপ্রান্ত হইতে 4 পা. ভার অথবা অপর প্রান্ত হইতে 6 পা. ভার ঝুলাইলে দণ্ডটি উল্টাইয়া যাইবার উপক্রম হয়। দণ্ডের ভার নির্ণয় কর এবং ভার কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করে নির্ণয় কর।

মনে কর দণ্ডটি হইল AB এবং C উহার মধ্যবিন্দু এবং উহার ভার W, মধ্যবিন্দু হইতে x ফুট দূরে G বিন্দুতে ক্রিয়া করে। মনে কর কীলক দুইটি

হইল P ও Q. A প্রান্তে 4 পা. ভার ঝুলাইলে দণ্ডটি P বিন্দুকে অবলম্বন করিয়া উল্টাইতে চাহিবে এবং Q বিন্দুর সহিত উহার সংস্পর্শ আলগা হইবার উপক্রম করিবে ; ফলে তখন Q বিন্দুতে কোন প্রতিক্রিয়া থাকিবে না। সুতরাং এইক্ষেত্রে দণ্ডটির সাম্যাবস্থার জন্য P বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই, $4AP - W.GP = 0$ বা, $4.AP = W.GP \cdots\cdots$ (A)

এক্ষণে, $PC = QC = 5$ ফুট এবং $AP = BQ = 3$ ফুট।

$\therefore \quad PG = (5 - x)$ ফুট।

সুতরাং (A) হইতে পাই, $4 \times 3 = W\ (5 - x) \cdots\cdots (1)$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে B হইতে 6 পা. ভার ঝুলাইলে দণ্ডটি Q বিন্দুকে অবলম্বন করিয়া উল্টাইবার উপক্রম করিবে এবং P বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া শূন্য হইবে। সুতরাং পূর্বের ন্যায় Q বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া দণ্ডটির সাম্যাবস্থার জন্য $6.QB = W.GQ$, বা, $6 \times 3 = W.(5 + x) \cdots\cdots (2)$

এক্ষণে, (1)-কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{12}{18} = \frac{5-x}{5+x} \quad \text{বা,} \quad \frac{2}{3} = \frac{5-x}{5+x}$$

বা, $10 + 2x = 15 - 3x$ বা, $5x = 5$

$\therefore \quad x = 1$ ফুট। $\therefore \quad AG = AC - CG = 8 - 1 = 7$ ফুট।

আবার (1) হইতে পাই, $12 = W(5 - 1)$

বা, $12 = 4W \quad \therefore \quad W = 3.$

সুতরাং দণ্ডের ভার 3 পাউণ্ড এবং ইহা 4 পাউণ্ড ভারের প্রান্ত হইতে 7 ফুট দূরে ক্রিয়াশীল।

উদা. 18. 24 ফুট লম্বা একটি সমভার তক্তার 16 ফুট একটি পাটাতনের উপর এবং বাকী 8 ফুট পাটাতনের বাহিরে আছে। তক্তাটির ভার 200 পাউণ্ড হইলে, উহার যে প্রান্ত পাটাতনের উপর আছে, সেই প্রান্তে ক্ষুদ্রতম কি ভার স্থাপন করিলে 150 পাউণ্ড ওজনের এক ব্যক্তি, তক্তাটি না উল্টাইয়া উহার অপর প্রান্ত পর্যন্ত হাঁটিয়া যাইতে পারিবে ?

মনে কর তক্তাটি হইল AB এবং ইহার CB অংশ পাটাতনের বাহিরে আছে ও G, তক্তাটির মধ্যবিন্দু। সুতরাং $GC = 4$ ফুট।

মনে কর A প্রান্তে W পাউণ্ড ভার স্থাপন করার ফলে, ঐ ব্যক্তি B প্রান্ত পর্যন্ত হাঁটিয়া যাইতে সমর্থ হ'ন। এক্ষণে তক্তাটি উল্টাইয়া পড়িবে না যদি W এবং তক্তার ভারের (G বিন্দুতে ক্রিয়াশীল) C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক দুইটির বৈজিক যোগফল $>$ ঐ ব্যক্তির ভারের C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক হয়।

অর্থাৎ যদি $W \times 16 + 200 \times 4 > 150 \times 8$

বা, $W \times 16 > 400$ বা, $W > 25$

সুতরাং W-এর ক্ষুদ্রতম মান 25.

সুতরাং A প্রান্তে অন্ততঃ 25 পাউণ্ড ভার স্থাপন করিতে হইবে।

উদা. 14. একটি গাছকে উপড়াইয়া ফেলিবার জন্য এক ব্যক্তি গাছটির উল্লম্ব কাণ্ডের কোন একস্থানে একটি 30 ফুট দীর্ঘ দড়ির একপ্রান্ত বাঁধিয়া এবং অপর প্রান্ত ভূমিতে রাখিয়া ঐ প্রান্ত ধরিয়া টানিতে লাগিলেন। গাছটিকে উপড়াইয়া ফেলিবার জন্য উহার পাদদেশের চারিদিকে প্রয়োজনীয় ভ্রামকের ক্ষুদ্রতম মান 1200 ফুট পাউণ্ড। ঐ ব্যক্তিকে ক্ষুদ্রতম কি পরিমাণ বল প্রয়োগ করিতে হইবে, নির্ণয় কর।

মনে কর, গাছটি হইল AB এবং A হইল গাছটির নিম্নপ্রান্ত ও উহার C বিন্দুতে দড়ি (CD)-টি বাঁধিয়া অপর প্রান্ত D বিন্দুতে লোকটি টানিতেছে।

সুতরাং CD=30 ফুট। A বিন্দু হইতে CD-র উপর AH লম্ব টান এবং মনে কর $\angle ADC=\theta$. মনে কর $\vec{DC}$ বরাবর প্রযুক্ত বল P.

A বিন্দুর চারিদিকে P বলের ভ্রামক $=P.AH=P.AD\sin\theta=P.CD\cos\theta\sin\theta=P.30.\frac{1}{2}\sin 2\theta=15P\sin 2\theta$.

এখন গাছটিকে উপড়াইতে হইলে প্রয়োজনীয় ভ্রামক 1200 ফুট পাউণ্ড।

$\therefore\quad 15P\sin 2\theta=1200$ ফুট পাউণ্ড ; বা, $P=\dfrac{1200}{15\sin 2\theta}=\dfrac{80}{\sin 2\theta}$.

এক্ষণে P-র মান ক্ষুদ্রতম হইবে যখন $\sin 2\theta$-র মান বৃহত্তম অর্থাৎ 1 হইবে।

$\therefore\quad P=80$ পাউণ্ড। সুতরাং নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম বল 80 পাউণ্ড।

উদা. 15. 14 ফুট দীর্ঘ এবং 120 পাউণ্ড ওজনের একটি সমদণ্ড অনুভূমিকভাবে দুইটি কীলকের উপর রক্ষিত হইয়াছে। কীলক দুইটি দণ্ডের দুই প্রান্ত হইতে 5 ফুট এবং 3 ফুট দূরে অবস্থিত। যদি কোন কীলকই 200 পাউণ্ড ভারের অধিক চাপ বহন করিতে না পারে, তাহা হইলে দুই প্রান্তে কি পরিমাণ সমান ভার রাখা যায়? [C. U. 1938]

মনে কর কীলক দুইটি হইল P এবং Q. মনে কর দুই প্রান্তে W, W সমান ভার রাখা যায়। ইহাদের লব্ধি 2W দণ্ডের মধ্যবিন্দু C-এ ক্রিয়া করে। সুতরাং দণ্ডের মধ্যবিন্দুতে (120+2W) পাউণ্ড ক্রিয়া করে। ইহা খুঁটি দুইটির উপর চাপ T_1 এবং T_2-এর লব্ধি ; $\therefore\quad T_1+T_2=120+W$.

PC=2 ফুট এবং QC=4 ফুট। এক্ষণে দণ্ডটির সাম্যাবস্থার জন্য C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই, $T_1.PC=T_2.QC$,

বা, $T_1\times 2=T_2\times 4$, $\quad\therefore\quad T_1=2T_2$.

যেহেতু কোন কীলকই 200 পাউণ্ডের অধিক ভার বহন করিতে পারে না,

$\therefore\quad T_1$-এর বৃহত্তম মান 200 পা. এবং T_2-এর বৃহত্তম মান 100 পা.।

এখন, $T_1+T_2=120+2W$, বা, $3T_2=120+2W\quad[\because T_1=2T_2]$

এক্ষণে, যেহেতু T_2-এর বৃহত্তম মান 100 পাউণ্ড,

$\therefore$ বৃহত্তম ভার W হইলে,

$3.100=120+2W\quad\therefore\quad 2W=300-120=180$ পা.

$\therefore\quad W=90$ পা.।

উদা. 16 (a) ABC ত্রিভুজের $\vec{AD}$, $\vec{BE}$ ও $\vec{CF}$ মধ্যমাত্রয় বরাবর ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q ও R সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে, বল তিনটির পরিমাপ ঐ মধ্যমাত্রয়ের দৈর্ঘ্যের সহিত সমানুপাতী।

(b) $l.\overline{BC}$, $m,\overline{CA}$ ও $n.\overline{CA}$ বলত্রয়ের লব্ধিবল ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রগামী হইলে $l+m+n=0$.

(a) BE ও CF-এর উপর A বিন্দু হইতে লম্ব অঙ্কন কর। মনে কর এই লম্ব দুইটির দৈর্ঘ্য y ও z.

এক্ষণে $BE.y = 2\triangle BAE = \triangle ABC$. [কারণ কোন ত্রিভুজের প্রত্যেক মধ্যমা ত্রিভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত কার।]

অনুরূপে, $CF.z = \triangle ABC \quad \therefore \quad BE.y = CF.z \quad \cdots \quad \cdots (1)$

এখানে যেহেতু বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং A বিন্দুর চারিদিকের ভ্রামক লইয়া পাই,

$$Q.y - R.z = 0 \quad \text{বা,} \quad Qy = Rz \quad \cdots \quad \cdots (2)$$

এখন, (1) ও (2) হইতে পাই, $\dfrac{Q}{BE} = \dfrac{R}{CF}$.

অনুরূপে B বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই, $\dfrac{P}{AD} = \dfrac{R}{CF}$.

$\therefore \quad \dfrac{P}{AD} = \dfrac{Q}{BE} = \dfrac{R}{CF}$, অর্থাৎ বল তিনটির পরিমাপ মধ্যমা তিনটির দৈর্ঘ্যের সহিত সমানুপাতী।

(b) ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G হইলে, G বিন্দুর BC, CA ও AB হইতে দূরত্ব যথাক্রমে $\dfrac{2}{3}.\dfrac{\triangle}{a}$, $\dfrac{2}{3}.\dfrac{\triangle}{b}$. $\dfrac{2}{3}.\dfrac{\triangle}{c}$ (উদা 9(i) পঞ্চম অধ্যায় দেখ)। এক্ষণে বল তিনটির লব্ধিবল G বিন্দুগামী হইলে, G বিন্দুর চারিদিকে বলসমূহের ভ্রামক লইয়া পাই,

$$l.BC.\frac{2}{3}.\frac{\triangle}{a} + m.CA.\frac{2}{3}.\frac{\triangle}{b} + n\, AB.\frac{2}{3}.\frac{\triangle}{c} = 0$$

বা, $\frac{2}{3}\triangle(l+m+n) = 0 \qquad [\because \quad BC = a,\ CA = b$ এবং $AB = c\ ]$

বা, $l+m+n=0$

উদা. 17. একটি সমকোণী ত্রিভুজাকার সমপাতের সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটি হইতে ইহার ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

মনে কর, সমকোণী ত্রিভুজটি হইল ABC এবং B সমকোণ ও ত্রিভুজটির ভার ω.

এক্ষণে, ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র এবং ইহার কৌণিক বিন্দু তিনটিতে স্থাপিত তিনটি সমভারের ভারকেন্দ্র একই বিন্দু। সুতরাং ABC ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র এবং A, B, C কৌণিক বিন্দু তিনটির প্রত্যেকটিতে স্থাপিত $\frac{\omega}{3}$, $\frac{\omega}{3}$, $\frac{\omega}{3}$ পরিমাপের ভার তিনটির ভারকেন্দ্র একই বিন্দু। সুতরাং যদি BC হইতে ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র G-র দূরত্ব GL হয়, তবে BC-র চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই, $\omega.GL=\frac{\omega}{3}.AB$. $\therefore$ $GL=\frac{AB}{3}$. সুতরাং BC বাহু হইতে ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{AB}{3}$. অনুরূপে AB বাহু হইতে ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{BC}{3}$.

উদা. 18. r-ব্যাসার্ধের একটি সমবৃত্তাকার পাত হইতে একটি বৃত্তাকার অংশ কাটিয়া ফেলা হইয়াছে। এই অংশের পরিধি পাতের কেন্দ্রের ভিতর দিয়া গিয়াছে এবং ব্যাস $\frac{1}{3}r$; অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমগ্র বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi r^2$ এবং কর্তিত বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi\left(\frac{r}{6}\right)^2=\frac{\pi r^2}{36}$.
সুতরাং সমগ্র পাতের ভার W হইলে কর্তিত অংশের ভার $\frac{1}{36}W$ এবং অবশিষ্ট অংশের ভার $W-\frac{1}{36}W=\frac{35}{36}W$.

সমগ্র বৃত্তের ভারকেন্দ্র উহার কেন্দ্র O এবং মনে কর, অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র G. এই ভারকেন্দ্র G সমগ্র বৃত্তের কেন্দ্র এবং কাটিয়া ফেলা অংশের কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখার উপর কর্তিত অংশের অপর দিকে আছে।

$$\therefore \quad \frac{35}{36}W.\ OG=\frac{W}{36}.\ \frac{r}{6} \quad \therefore \quad OG=\frac{r}{6\times 35}=\frac{r}{210}.$$

উদা. 19. 3 ফুট ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার সমপাতে এক ফুট ব্যাসার্ধের এমন একটি বৃত্তাকার ছেঁদা করিতে হইবে যেন অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র বৃত্তের কেন্দ্র হইতে 2 ইঞ্চি দূরে হয় ; ছেঁদার কেন্দ্র নির্ণয় কর।

মনে কর, সমগ্র বৃত্তের কেন্দ্র O, ছেঁদার কেন্দ্র C এবং অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র G. সুতরাং O, G, C একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে। প্রশ্নানুসারে, $OG=2$ ইঞ্চি $=\frac{1}{6}$ ফুট।

এক্ষণে, W সমগ্র সমপাতের ভার হইলে, যে অংশে ছেঁদা করা হইয়াছে, তাহার ভার $\frac{\pi.(1)^2}{\pi.(3)^2}W=\frac{1}{9}W$. সুতরাং অবশিষ্ট অংশের ভার $W-\frac{1}{9}W=\frac{8}{9}W$. সুতরাং O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই, $\frac{8}{9}W.OG=\frac{1}{9}W.OC$.

বা, $8OG=OC$, $\therefore$ $OC=8OG=8.\frac{1}{6}$ ফুট $=\frac{4}{3}$ ফুট।

$\therefore$ ছেঁদার কেন্দ্র বৃত্তের কেন্দ্র হইতে $1\frac{1}{3}$ ফুট দূরে অবস্থিত।

উদা. 20. ABCDEF একটি সমষড়ভুজ। ইহার A, B, C, D, E বিন্দুতে পাঁচটি সমান ভারের কণা রাখা হইয়াছে ; ইহাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

মনে কর সমান ভারসমূহের প্রত্যেকটি ω. প্রতিসাম্য বিবেচনা করিয়া A, B এবং D, Eতে চারিটি সমভারের ভারকেন্দ্র ষড়ভুজটির কেন্দ্র O বিন্দুতে অবস্থিত। এক্ষণে, O বিন্দুতে 4ω এবং C বিন্দুতে ω ভারের ভারকেন্দ্র G হইলে $4\omega.OG=\omega.GC=\omega(OC-OG)$ বা, $5OG=OC$ $\therefore$ $OG=\frac{1}{5}OC$.

উদা. 21. একটি সরু সমতারকে দুইটি সমতলীয় বৃত্তাকার বলয়ের আকারে বাঁকান হইল। বৃত্তাকার বলয় দুইটির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r এবং r', এবং তাহারা একে অপরকে বহিঃস্থ বিন্দুতে স্পর্শ করে। যদি $r'>r$ হয়, তাহা হইলে ঐ বৃত্তাকার বলয় দুইটির স্পর্শবিন্দু হইতে বলয়দ্বয়ের দ্বারা গঠিত বস্তুটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর। [H. S. 1978]

মনে কর, r এবং r' ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তাকার বলয় দুইটির কেন্দ্র যথাক্রমে A এবং B এবং উহারা পরস্পরের O বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে। এক্ষণে, A কেন্দ্রযুক্ত বলয়ের ভারকেন্দ্র উহার কেন্দ্র A এবং ভার $=2\pi r\rho$, যেখানে $\rho=$একক দৈর্ঘ্যের তারের ভার। B কেন্দ্রযুক্ত বলয়ের ভারকেন্দ্র উহার কেন্দ্র B এবং ভার$=2\pi r'\rho$.

$\because$ $r'>r$, দ্বিতীয় বলয়ের ভার প্রথম বলয়ের ভার অপেক্ষা অধিক। $\therefore$ উহাদের ভারকেন্দ্র A বিন্দু অপেক্ষা B বিন্দুর নিকটবর্তী হইবে। এক্ষণে, G বিন্দু সম্পূর্ণ তারের ভারকেন্দ্র হইলে $2\pi r\rho$ এবং $2\pi r'\rho$ এই দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি $2\pi(r+r')\rho$, G বিন্দুগামী। $\therefore$ O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া পাই, $2\pi r\rho.OA-2\pi r'\rho OB=-2\pi(r+r')\rho OG$.

$$\therefore \quad OG=\frac{2\pi r'^2\rho-2\pi r^2\rho}{2\pi(r+r')\rho} \qquad [\because \quad OA=r,\ OB=r']$$

$$=\frac{r'^2-r^2}{r'+r}=r'-r.$$

সুতরাং বলয়দ্বয়ের স্পর্শবিন্দু হইতে উহাদের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $(r'-r)$ এবং উহা B বিন্দুর নিকটবর্তী।

উদা 22. একটি সমভার পিতলের পাত একটি আয়তক্ষেত্র ABCD এবং আয়তক্ষেত্রের বাহিরে একটি সমদ্বিবাহু CDE লইয়া গঠিত। AB বাহু হইতে পাতের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে যে—

AB=10 সে.মি., AD=4 সে.মি. এবং CE=DE=13 সে.মি.।

মনে কর L এবং M যথাক্রমে CD এবং AB-র মধ্যবিন্দু। প্রতিসাম্য বিবেচনা করিয়া, পাতটির ভারকেন্দ্র ELM রেখার উপর অবস্থিত। মনে কর, G_1 ও G_2 যথাক্রমে আয়তক্ষেত্র এবং সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র।

$\therefore$ $MG_1=2$ সে.মি. এবং $EL=\sqrt{13^2-5^2}=12$ সে.মি.

$\therefore$ $MG_2=ML+\frac{1}{3}EL=4+4=8$ সে.মি.

মনে কর, পাতের ভারকেন্দ্রের AB হইতে দূরত্ব $\bar{x}$.

একণে, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 10 \times 4 = 40$ বর্গ সে.মি.

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60$ বর্গ সে.মি.

সুতরাং সমপাতটির একক ক্ষেত্রফলের ভার ρ হইলে,

$$\bar{x} = \frac{40.\rho \times 2 + 60.\rho \times 8}{40.\rho + 60.\rho} = \frac{80 + 480}{100} = \frac{560}{100} = 5{\cdot}6 \text{ সে.মি. ।}$$

উদা. 23. ABC একটি ত্রিভুজাকৃতি সমপাত। পাতটি হইতে ত্রিভুজটি অন্তর্বৃত্তাকার অংশ অপসারিত হইল। দেখাও যে ত্রিভুজের BC বাহু হইতে অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{S}{3as} \cdot \frac{2s^3 - 3\pi a S}{s^2 - \pi S}$. যেখানে, S ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল এবং s ইহার অর্ধ-পরিসীমা। [U.P. 1953 ; C.H. 1965]

মনে কর, ω, পাতটির একক ক্ষেত্রফলের ভার।

$\therefore$ ত্রিভুজের ভার $W = S.\omega$, অন্তর্বৃত্তের ভার $= \pi r^2 \omega = \pi \left(\frac{S}{s}\right)^2 .\omega$.

[ত্রিকোণমিতি হইতে]

মনে কর, A হইতে BC-র উপর লম্বের দৈর্ঘ্য p. সুতরাং G_1 যদি সমগ্র ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র হয়, তবে BC হইতে G_1 বিন্দুর দূরত্ব $\frac{p}{3}$।

একণে অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্রের BC হইতে দূরত্ব যদি $\bar{x}$ হয়, তবে

$$\bar{x} = \frac{S\omega \times \frac{p}{3} - \pi\left(\frac{S}{s}\right)^2 .\omega \times \frac{S}{s}}{S\omega - \pi\left(\frac{S}{s}\right)^2 .\omega}$$

$$= \frac{\frac{pS}{3} - \pi\frac{S^3}{s^3}}{S - \pi\frac{S^2}{s^2}} = \frac{\frac{2S}{a}\cdot\frac{S}{3} - \pi\frac{S^3}{s^3}}{S - \pi\frac{S^2}{s^2}} \qquad \left[\because \tfrac{1}{2}p.a = S\right]$$

$$= \frac{S^2\left(\frac{2}{3a} - \pi\frac{S}{s^3}\right)}{S\left(1 - \pi\frac{S}{s^2}\right)} = \frac{S\left(\frac{2s^3 - 3\pi a S}{3as^3}\right)}{\frac{s^2 - \pi S}{s^2}} = \frac{S}{3as} \cdot \frac{2s^3 - 3\pi a S}{s^2 - \pi S}.$$

উদা. 24. একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর উপর বহির্দিকে তিনটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত হইয়াছে। এইরূপে গঠিত ক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

মনে কর, সমকোণী ত্রিভুজটি হইল ABC এবং A সমকোণ।

মনে কর, $AB = AC = a$, সুতরাং $BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

AB ও AC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটি সমান এবং প্রত্যেকটির ভার W (মনে কর)। $\therefore$ BC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ভার 2W এবং

$\triangle ABC$-র ভার $=\frac{1}{2}W$ [$\because$ $\triangle ABC$-র ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}a^2$], AB এবং AC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র G_1 এবং G_2 ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হইতে সমদূরবর্তী [উদা. 17 দেখ, এখানে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু সমকোণী।] সুতরাং এই দুই বর্গক্ষেত্রের মোট ভার 2W এই A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। AD, ত্রিভুজটির একটি মধ্যমা এবং AD-র উপর ABC ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র G_3 এবং বর্ধিত $\overrightarrow{AD}$-র উপর BC-র উপর অঙ্কিত চতুর্ভুজের ভারকেন্দ্র G_4 অবস্থিত। মনে কর বর্ধিত $\overrightarrow{AD}$, BC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রকে E বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং সমগ্রক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র ADE সরলরেখার উপর আছে। মনে কর, A হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\bar{x}$.

$$\therefore \quad \bar{x}=\frac{2W\times 0+\frac{1}{2}W.\frac{2}{3}AD+2W\left(AD+\frac{DE}{2}\right)}{2W+\frac{1}{2}W+2W}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}AD+2AD+2AD}{\frac{9}{2}}=\frac{26}{27}AD.$$

উদা. 25. একটি ত্রিভুজ ABC হইতে ADE অংশ অপসারিত হইয়াছে; DE সরলরেখা BC-র সমান্তরাল। যদি BC এবং DE হইতে A-র দূরত্ব যথাক্রমে a এবং b হয়, দেখাও যে BC হইতে অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\dfrac{a^2+ab-2b^2}{3(a+b)}$. [C. U. 1938]

মনে কর, BC হইতে নির্ণেয় ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\bar{y}$; A সমগ্র ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, A_1 অপসারিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

এখন, $\dfrac{A_1}{A}=\dfrac{DE^2}{BC^2}=\dfrac{b^2}{a^2}$; $\therefore$ $A_1=\dfrac{b^2}{a^2}A$.

$$\therefore \quad \bar{y}=\frac{A.\frac{1}{3}a-\frac{b^2}{a^2}A\left\{(a-b)+\frac{b}{3}\right\}}{A.\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}a-\frac{b^2}{3a^2}(3a-2b)}{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{1}{3}\,\frac{a^3-3ab^2+2b^3}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(a-b)(a^2+ab-2b^2)}{(a+b)(a-b)}=\frac{1}{3}\,\frac{a^2+ab-2b^2}{a+b}.$$

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1 : 1. 1 সে.মি.=5 কে.জি. ; 3. (ii) সত্য। 5. না।

প্রশ্নমালা 2A

1. (i) 16 কে.জি. (ii) 23·6 কে.জি. (iii) 60° (iv) 45 কে.জি.
2. (*a*) 60°. (*b*) 90° (*f*) 3 পা, 1 পা ;
3. 48 কে.জি. ও 14 কে.জি.। 4. 79 কে. জি. ও 21 কে. জি.
5. (*a*) 12 কে. জি. ও 5 কে. জি. 6. 120°
8. 90°. 13. P+Q ; S≠P−Q ধরিয়া।

প্রশ্নমালা 2B

1. লব্ধিবল 2 কে. জি. ভার এবং ইহা প্রদত্ত 2 কে. জি. বলটির অভিমুখিতার সহিত 120° কোণে নত।

2. 14·64 কে. জি. ও 10·35 কে. জি.।

3. $150\sqrt{5}$ কে. জি. এবং প্রদত্ত 300 কে. জি. বলের অভিমুখিতার সহিত $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ কোণে নত। 4. 50 পাউণ্ড।

5. উপাংশদ্বয় প্রত্যেকটি $\frac{100}{3}\sqrt{3}$ গ্রাম হইবে ; প্রত্যেকটি বিশ্লেষিতাংশ $50\sqrt{3}$ গ্রাম হইবে।

6. 65 কে. জি. ; পূর্বের দিকের সহিত $\tan^{-1}\frac{5}{12}$ কোণে নত।

7. অপর বলের মান $10\sqrt{5}$ পা. এবং উহা উল্লম্ব দিকের সহিত $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে।

8. লব্ধিবলের মান 1 এবং উহা $\overline{AD}$-র সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করে।
(প্রশ্নে, তৃতীয়টি BC বাহুর উপর লম্ব $\overrightarrow{DA}$ বরাবর ক্রিয়মাণ পড়।)

9. লব্ধিবলের মান 10 পা. এবং উহা $\overline{AB}$-র সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করে।

10. P বলের সহিত 210° কোণে নত $P\sqrt{3}$ পা. বল।

11. $\sqrt{3}\,S$, উহা R-এর সহিত 90° কোণ উৎপন্ন করে।

12. $F\sqrt{2}$, 135°.

17. $\sqrt{277}a$. $\overline{AB}$-র সহিত $\tan^{-1}\frac{19\sqrt{3}}{5}$.

প্রশ্নমালা 3A

1. (i) ; (ii) 2. বল তিনটি একই সরলরেখায় ক্রিয়াশীল হইলে এবং বৃহত্তম বলটির বিপরীত অভিমুখিতায় অপর বল দুইটি ক্রিয়া করিলে বল তিনটির সাম্যাবস্থা সম্ভব। 4. 48 কে.জি.. 64 কে.জি.। 5. $133\frac{1}{3}$ কে.জি.।

6. প্রতিক্রিয়া $\frac{20}{3}\sqrt{3}$ কে. জি এবং টান $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ কে. জি.।

7. $Q = 12{\cdot}25$ কে. জি. (আসন্ন) ; $13{\cdot}7$ কে. জি. (আসন্ন)।

প্রশ্নমালা 3B : 11. 60 কে. জি. ও 25 কে. জি.। 17. 48 পা ও 64 পা

প্রশ্নমালা 4

1. (i) 10 কে.জি. ; 4 কে.জি. বলের প্রয়োগ বিন্দু হইতে 18 সে.মি. দূরে।

(ii) 800 গ্রাম ; 600 গ্রাম বলের প্রয়োগ বিন্দু হইতে 20 সে.মি. দূরে।

(iii) 14 পাউণ্ড ; 3 পাউণ্ড বলের প্রয়োগ বিন্দু হইতে 44 ইঞ্চি দূরে।

2. (i) 6 কে. জি. ; $7\frac{1}{2}$ কে. জি. বলের ক্রিয়ারেখা হইতে $1\frac{1}{2}$ কে. জি. বলের ক্রিয়ারেখার বিপরীত দিকে 24 সে. মি. দূরে।

(ii) 12 কে. জি. ; 16 কে. জি. বলের ক্রিয়ারেখা হইতে 4 কে. জি. বলের ক্রিয়ারেখার বিপরীত দিকে 30 সে. মি. দূরে।

(iii) 200 পাউণ্ড ; 1000 পাউণ্ড বলের ক্রিয়ারেখা হইতে 800 পাউণ্ড বলের ক্রিয়ারেখার বিপরীত দিকে 1800 ফুট দূরে।

3. (*a*) 8 কে. জি. বল হইতে 2 মিটার দূরে। (*b*) অপরপ্রান্তে।

4. 5P বলের সদৃশ সমান্তরাল, লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা 5P বলের ও 4P বলের ক্রিয়ারেখা দুইটি হইতে যথাক্রমে 72 সে. মি. ও 90 সে. মি. দূরে। (বল দুইটি 5P ও 4P মনে করিয়া)

5. বৃহত্তর বলের পরিমাপ 20 ডাইন এবং উহার ক্রিয়ারেখা ক্ষুদ্রতর বলের ক্রিয়ারেখা হইতে $7\frac{1}{8}$ সে. মি. দূরে।

6. বৃহত্তর ভারটি হইতে 13 সে. মি. দূরে।

7. চাপ তাহার হাত ও স্কন্ধের দূরত্বের সহিত ব্যস্ত অনুপাতিক হইবে।

8. 96 কে.জি. 9. $8\frac{1}{3}$ কে. জি., $3\frac{1}{3}$ কে. জি. 10. $\frac{2}{3}$ মি. ও $\frac{4}{3}$ মি.

11. দুর্বল ব্যক্তি হইতে 4 ফুট দূরে।

12. একটি আলম্বের উপর চাপ 20 কে. জি. হ্রাস পাইবে, অপরটির উপর চাপ 20 কে. জি. বৃদ্ধি পাইবে।

15. 20 কে. জি. ; $\frac{1}{3}$ মি., $\frac{2}{3}$ মি.। 26. $R\left(1-\frac{Q}{P}\right)$.

প্রশ্নমালা 5

1. (i) 5000 কে. জি. মিটার (ii) 285 পাউণ্ড ফুট।

2.

	বল	A-র চারিদিকে	B-র চারিদিকে	C-র চারিদিকে
A বিন্দুতে	2 Kg	0	+ 40 Kg m	+20 Kg m
D বিন্দুতে	12 Kg	+ 48 Kg m	−192 Kg m	− 72 Kg m
E বিন্দুতে	4 Kg	+ 48 Kg m	− 32 Kg m	+ 8 Kg m
B বিন্দুতে	6 Kg	− 120 Kg m	0	− 60 Kg m

3. $10\sqrt{3}$ Kg. cm, $20\sqrt{3}$ Kg. cm, $40\sqrt{3}$ Kg. cm (প্রত্যেকটি একই চিহ্নযুক্ত)।

5. A বিন্দু হইতে $7\frac{3}{31}$ মিটার দূরে অবস্থিত বিন্দুটির চারিদিকে।

6. $100\frac{1}{3}$ কে. জি., $89\frac{2}{3}$ কে. জি.।

8. দণ্ডটির মধ্যবিন্দু হইতে উভয়দিকে $1\frac{1}{2}$ ফুটের মধ্যে।

9. দণ্ডটির মধ্যবিন্দু হইতে উভয়দিকে x ফুটের মধ্যে যেখানে
$x=$ দণ্ডটির দৈর্ঘ্যের $\frac{1}{10}$.

10. ভারটি $3\frac{1}{2}$ পাউণ্ড এবং বিন্দুটি 5 পাউণ্ড ভার হইতে $8\frac{1}{2}$ ইঞ্চি দূরে।

11. 4 টন ও 5 টন।

12. দড়ির দৈর্ঘ্য l হইলে, $\frac{1}{2} l\sqrt{2}$ উচ্চে দড়িটি বাঁধিতে হইবে।

13. লরির নিকটবর্তী স্তম্ভে $4\frac{1}{2}$ টন এবং অপর স্তম্ভে $3\frac{1}{2}$ টন।

14. $2\sqrt{2}$R, CA রেখার সমান্তরাল এবং A বিন্দু হইতে
$-\frac{5}{2}l$ দূরে (l বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য)।

15. পিতা হইতে $2\frac{5}{12}$ মিটার দূরে। 16. ইহাকে 2 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

17. 37 (আসন্ন) একক পরিমাপের বল, বলটি A বিন্দুগামী এবং ইহার অভিমুখিতা $\vec{AB}$-সহিত $\sin^{-1}\frac{25}{111}$ কোণে নত। 18. (5, 0), 3 গ্রাম ও 4 গ্রাম।

প্রশ্নমালা 6

1. 80 কে. জি. সে. মি. 2. a বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য হইলে, $8a$ ভ্রামকের একটি যুগ্মবল। 5. $Pa \sim Qb$.

8. প্রদত্ত বলের ক্রিয়ারেখা হইতে 2 একক দূরে অবস্থিত প্রদত্তবলের সমান্তরাল একটি 5 একক বল।

9. প্রত্যেকটি বলের পরিমাপ P এবং সুষম ষড়্‌ভুজের একটি বাহু a হইলে, যুগ্মবলের ভ্রামক $3\sqrt{3}a.P$ 13. 5 সে.মি. 16. 700 কে.জি. সে.মি.

17. $P=1$, $Q=4$ ষড়ভুজটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a হইলে যুগ্মবলের ভ্রামক $\frac{13\sqrt{3}}{2}a$.

প্রশ্নমালা 7A

1. $\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$.

2. (i) মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু; (ii) মনে কর, C বিন্দুতে অসদৃশ একটি বল প্রযুক্ত হইল এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু F ; বর্ধিত $\overrightarrow{CF}$-এর G বিন্দু নির্ণেয় ভারকেন্দ্র, যেখানে $CF=FG$.

3. AB-র উপর E বিন্দু এবং CD-র উপর F বিন্দু এরূপ যে $BE=\frac{1}{3}AB$ এবং $DF=\frac{4}{5}CD$. ভারকেন্দ্র G, $\overline{EF}$-এর উপর এরূপ একটি বিন্দু যে $\frac{EG}{FG}=\frac{3}{1}$.

4. প্রত্যেকে $\frac{1}{3}$ W ভার বহন করে।

10. উপবৃত্তটির পরাক্ষের উপর উপবৃত্তের কেন্দ্র হইতে $\frac{4a}{3\pi}$ দূরে অবস্থিত বিন্দুটি ভারকেন্দ্র।

11. অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a$ হইলে, অধিবৃত্তের শীর্ষ হইতে $\frac{12}{5a}$ দূরে অক্ষের উপর অবস্থিত বিন্দুটি ভারকেন্দ্র।

12. ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{3}{5}h, \frac{3}{4}\sqrt{ah})$.

13. দণ্ডের উপর A বিন্দু হইতে $\frac{2}{3}a$ দূরত্বে অবস্থিত ভারকেন্দ্র।

14. ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.

15. ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{9\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}, \frac{15}{4}\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}\right)$

16. বৃত্তচাপের কেন্দ্র ও মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখাংশের উপর কেন্দ্র হইতে $\frac{4}{\alpha}$ (যেখানে $\sin \alpha = \frac{4}{5}$) দূরে অবস্থিত বিন্দুটি ভারকেন্দ্র।

প্রশ্নমালা 7B

1. CD-র উপর লম্ব OE, CDকে E বিন্দুতে ছেদ করিলে, ভারকেন্দ্র G, OE-র একটি বিন্দু এবং OG $= \frac{1}{3}$CD.

2. A বিন্দু হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{2h_1 + h_2}{3}$.

3. যে অংশ অপসারিত করিতে হইবে, তাহার কেন্দ্র বৃত্তের কেন্দ্র হইতে 16 সে. মি. দূরে অবস্থিত হইতে হইবে।

7. ABC ত্রিভুজের BC ভূমির মধ্যবিন্দু D হইলে, ভারকেন্দ্র G, AD-র উপর অবস্থিত হইবে এবং DG $= \frac{2}{3}$AD.

8. G, ABC ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র হইলে অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র $\overline{GA}$কে $(\sqrt{n}-1) : (n\sqrt{n}-3\sqrt{n}+1)$ অনুপাতে বিভক্ত করিবে। 9. $7\frac{3}{8}$ সে.মি.

10. অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র G হইলে GO = বর্গক্ষেত্রের যে কোন বাহুর দৈর্ঘ্যের $\frac{2}{9}$ অংশ যেখানে, OGE, AD-র উপর লম্ব।

প্রশ্নমালা 8A

7. BC-কে 1 : 2 অনুপাতে বিভক্ত করে এরূপ বিন্দুতে BC-র লম্ব অভিমুখিতায় $3\sqrt{3}$ পাউণ্ড ভার।

12. P = 10 পাউণ্ড-ভার, Q = 60 পাউণ্ড-ভার।

প্রশ্নমালা 8B

4. টান $= W.\frac{2}{\sqrt{3}}$; প্রতিক্রিয়া $= W.\frac{1}{\sqrt{3}}$ (W সমদণ্ডের ভার). আংটির অবস্থান D হইলে AD = 3 ফুট।

7. 40 কে. জি. ও 30. কে. জি.।

8. দণ্ডের ভার W এবং কীলকে দণ্ডটি 2α কোণ উৎপন্ন করিলে এবং দণ্ডের নির্ণেয় নতি θ হইলে $\cos\theta=\frac{l\sin\alpha}{a+b}$ এবং নির্ণেয় টান$=\frac{W}{2}\sec\alpha$.

10. 225 এবং 135 কে.জি. ভার 11. 12 কে.জি. 12. 10 কে.জি.।

14. প্রতিক্রিয়া দুইটি যথাক্রমে $W\frac{\text{sia }\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ এবং $W\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

Group A

1. (a) একটি অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞা নিম্নে দেওয়া হইল :

$f(x) = -x$ যখন $x < 0$,

x যখন $0 < x < 1$.

$f(x)$-এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

এই লেখচিত্র হইতে $x = -\frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$-এর মান নির্ণয় কর এবং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত (continuous) কিনা বল।

(b) নিম্নলিখিত যে কোন একটি সীমার মান নির্ণয় কর :

(*i*) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$; (*ii*) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1}{x}\left\{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right\}$.

(a) দ্বিতীয় অধ্যায় উদা. 3. $|x|$-এর লেখচিত্র দেখ। এই ক্ষেত্রে লেখচিত্রটি (1, 1) বিন্দুর পর্যন্ত অঙ্কন কর এবং দেখাও যে (1, 1) বিন্দুটি লেখচিত্রের অংশ নহে। লেখচিত্রের y-অক্ষের বামদিকে অবস্থিত অংশ অপরিবর্তিত থাকিবে। লেখচিত্রটি লেখ কাগজে অঙ্কন করিবে। লেখ কাগজের সাহায্যে দেখাও যে $x = -\frac{1}{2}$ বিন্দুতে অঙ্কিত কোটি লেখচিত্রকে $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং যখন $x = -\frac{1}{2}$ তখন, $f(x) = \frac{1}{2}$.

যেহেতু লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন এবং মূলবিন্দুগামী।

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত।

(b) (i) $$\underset{x \to 0}{Lt} \frac{1-\cos x}{x^2} = \underset{x \to 0}{Lt} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \underset{x \to 0}{Lt} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \underset{y \to 0}{Lt} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2$$

$\left[y=\frac{x}{2}\right.$ বসাইয়া, যখন $x\to 0$, তখন $\left.y\to 0\right]$

$$=\frac{1}{2}.\ 1^2\left[\because \underset{y\to 0}{Lt}\ \frac{\sin y}{y}=1\right]=\frac{1}{2}.$$

(ii) উত্তর. পৃষ্ঠা 77 দেখ।

2. (*a*) $y=\frac{1}{x}$ হইলে $\frac{dy}{dx}$-এর মান বাহির কর।

x-এর কোন্ মানের জন্য এই $\frac{dy}{dx}$-এর মান বাহির করা সম্ভব হইবে না।

(*b*) নিম্নলিখিত যে কোন দুইটি ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(i) $y=e^x \sec x$ (ii) $y=\frac{\sin x}{\log x}$;

(iii) $y=\frac{x+2}{(x-1)(x+5)}$; (iv) $y=x^5+\frac{6}{x}-\tan x^2$.

(*a*) $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)=-1.\ x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}$,

$\left[\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}\right.$ সূত্র ব্যবহার করিয়া$\left.\right]$

যখন $x=0$, $\frac{dy}{dx}$-এর মান বাহির করা সম্ভব নহে, কারণ, $x=0$-তে, $y=\frac{1}{x}$ অসংজ্ঞেয়।

() *b*(i) $\frac{dy}{dx}=\left(e^x.\ \sec x\right)=e^x.\ \frac{d}{dx}\left(\sec x\right)+\frac{d}{dx}\left(e^x\right).\ \sec x$,

[গুণের সূত্র অনুযায়ী]

$$=e^x.\ \sec x.\ \tan x+e^x.\ \sec x$$
$$=e^x \sec x\ (\tan x+1).$$

(ii) $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\log x}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(\sin x).\ \log x-\sin x.\ \frac{d}{dx}(\log x)}{(\log x)^2}$,

[ভাগের সূত্র অনুযায়ী]

$$=\frac{\cos x.\ \log x-\sin x.\ \frac{1}{x}}{(\log x)^2}=\frac{x \cos x.\ \log x-\sin x}{x(\log x)^2}$$

(iii) $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{x+2}{(x-1)(x+5)}\right\}$

$$=\frac{(x-1)(x+5)\frac{d}{dx}(x+2)-(x+2)\frac{d}{dx}(x^2+4x-5)}{(x-1)^2(x+5)^2}$$

$$=\frac{(x-1)(x+5).1-(x+2)(2x+4)}{(x-1)^2(x+5)^2}$$

$$=\frac{x^2+4x-5-(2x^2+8x+8)}{(x-1)^2(x+5)^2}=-\frac{x^2+4x+13}{(x-1)^2(x+5)^2}$$

(iv) $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^5+\frac{6}{x}-\tan x^2\right)=\frac{d}{dx}(x^5)+\frac{d}{dx}\left(\frac{6}{x}\right)-\frac{d}{dx}(\tan x^2)$

$=5x^4+6.\frac{-1}{x^2}-\frac{d}{dx}(\tan u).\frac{du}{dx}$, [$u=x^2$ ধরিয়া,]

$=5x^4-\frac{6}{x^2}-\sec^2 u.\ 2x=5x^4-\frac{6}{x^2}-2x\sec^2 x^2.$

৪. (*a*) $y=x^6$ হইলে সংজ্ঞা অবলম্বন করিয়া $\frac{dy}{dx}$-এর মান বাহির কর।

(*b*) $x=4\cos 5x$ হইলে প্রমাণ কর যে $\frac{d^2y}{dx^2}=-25y.$

(*c*) $x>\frac{1}{2}$ হইলে দেখাও যে $x(4x^2-3)$-এর মান ক্রমবর্ধমান হইবে।

(*a*) সংজ্ঞানুসারে $y=f(x)$ হইলে, $\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

এখানে $f(x)=x^6$ $\quad\therefore\quad f(x+h)=(x+h)^6$

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে. $y=x^6$ হইলে,

নির্ণেয় $\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^6-x^6}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^6+6x^5h+15x^4h^2+20x^3h^3+15x^2h^4+6xh^5+h^6-x^6}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(6x^5+15x^4h+\cdots+h^6)=6x^5.$$

(*b*) $y=4\cos 5x.\quad\therefore\quad\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(4\cos 5x)$

$=4.\frac{d}{dx}(\cos 5x)=4.(-5\sin 5x)=-20\sin 5x.$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(-20 \sin 5x)=-20\frac{d}{dx}(\sin 5x)$

$=-20(5.\cos 5x)=-100 \cos 5x=-100.\frac{y}{4}=-25y.$

(c) মনে কর, $y=x(4x^2-3)=4x^3-3x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=12x^2-3=3(4x^2-1).$

$x>\frac{1}{2}$ হইলে, $\frac{dy}{dx}>3.\left(4.\frac{1}{2^2}-1\right)$

বা, $\frac{dy}{dx}>0.$ অর্থাৎ, $\frac{dy}{dx}$-এর মান ধনাত্মক।

এক্ষণে আমরা জানি, x-এর যে সকল মানের জন্য $\frac{dy}{dx}$ ধনাত্মক, সেই সকল বিন্দুতে $y=f(x)$ ক্রমবর্ধমান।

$\therefore \quad y=x(4x^2-3)$, $\frac{1}{2}$ হইতে বৃহত্তর x-এর যে কোন মানের জন্য ক্রমবর্ধমান।

GROUP—B

4. নিম্নলিখিত যে কোন দুইটির মান নির্ণয় কর :

(i) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; (ii) $\int x^2 \cos x^3\, dx$

(iii) $\int\frac{xdx}{\sqrt{(3x^2+1)}}$; (iv) $\int\frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

(i) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^x.dx}{e^x(e^x+e^{-x})}=\int\frac{e^x.dx}{1+e^{2x}}$

$=\int\frac{dz}{1+z^2}$, $e^x=z$ ধরিয়া পাই, $e^x dx=dz$

$=\tan^{-1}z+c=\tan^{-1}(e^x)+c$

(ii) $\int x^2 \cos x^3\, dx=\int\frac{1}{3}dz.\cos z$

[$x^3=z$ ধরিয়া পাই, $3x^2dx=dz$ বা, $x^2dx=\frac{1}{3}dz$]

$=\frac{1}{3}\int\cos z.dz=\frac{1}{3}\sin z+c=\frac{1}{3}\sin x^3+c$

(iii) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}dx = \int \frac{\frac{dz}{6}}{\sqrt{z}}$ [$3x^2+1=z$ ধরিয়া পাই $xdx=\frac{dz}{6}$]

$=\frac{1}{6}\int z^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{6}.\ 2\sqrt{z}+c=\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+1}+c$

(iv) $\int\frac{dx}{\sin^2x.\cos^2x}=\int\frac{\sec^4x}{\tan^2x}dx,$

$=\int\frac{\sec^2x.\sec^2x\ dx}{\tan^2x}=\int\frac{(1+z^2)dz}{z^2}$

[$\tan x=z$ ধরিয়া পাই $\sec^2xdx=dz$]

$=\int(z^{-2}+1)dz=-\frac{1}{z}+z+c=\tan x-\cot x+c$

[বিকল্প পদ্ধতি : $\int\frac{dx}{\sin^2x.\cos^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}$

$=\int(\sec^2x+\text{cosec}^2x)dx=\tan x-\cot x+c$]

5. নিম্নলিখিত যে কোন দুইটির মান নির্ণয় কর :

(i) $\int_0^1 x^2e^xdx$; (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\ dx$

(iii) $\int_1^2 \log xdx$; (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{1+\sin^2x}$.

(i) এক্ষেত্রে, $\int x^2e^xdx=x^2\int e^xdx-\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2).\int e^xdx\right\}dx$

[অংশতঃ সমাকলন দ্বারা]

$=x^2e^x-\int 2xe^xdx=x^2.e^x-2[xe^x-\int 1.e^xdx]$

$=x^2e^x-2(xe^x-e^x)=e^x.(x^2-2x+2)$

$\therefore\ \int_0^1 x^2e^xdx=\left[e^x(x^2-2x+2)\right]_0^1$

$=e^1(1-2+2)-e^0(0-0+2)=e-2.$

(ii) $\int x\cos xdx=x\int\cos xdx-\int\left\{\frac{d}{dx}(x).\int\cos xdx\right\}dx$

$=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx = \Big[x \sin x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} - (0 + \cos 0)$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\pi + 4) - 1.$$

(iii) $\int \log x\, dx = \log x . \int 1 dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(\log x) . \int 1 dx \right\} dx$

$= \log x . x - \int \frac{1}{x} . x dx = x \log x - x.$

$\therefore \int_1^2 \log x dx = \Big[x \log x - x\Big]_1^2$

$= 2 \log 2 - 2 - (1 . \log 1 - 1) = 2 \log 2 - 1 = \log \frac{4}{e}.$

$\left[\because \quad 1 = \log_e^e\right]$

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x} = \int_0^1 \frac{dz}{1+z^2}$ $z = \sin x$ ধরিয়া $dz = \cos x dx$

যখন $x = 0$; $z = \sin 0 = 0$

এবং $x = \frac{\pi}{2}$, $z = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$= \Big[\tan^{-1} z\Big]_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$

6. (a) যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকলের (definite integral) সংজ্ঞা দাও।

(b) যদি $c = \int e^x \cos x dx$ এবং $s = \int e^x \sin x dx$ হয়,

তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $c + s = e^x \sin x$.

(c) একটি সমতল ক্ষেত্র $y = x^2$, $y = 0$ এবং $x = 1$ এই তিনটি রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ; ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(a) মনে কর $f(x)$ অপেক্ষক, $a < x < b$ বিস্তারে সীমাবদ্ধ (bounded).

(a, b) বিস্তারে $f(x)$-এর নির্দিষ্ট সমাকল এর সংজ্ঞা হইতেছে,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{h \to 0} \sum_{r=1}^{n} h . f(a + rh), \quad \text{যেখানে} \quad nh = b - a,$$

(b) $c=\int e^x. \cos xdx=e^x\int\cos xdx-\int\left\{\frac{d}{dx}(e^x).\int\cos xdx\right\}dx,$

[অংশতঃ সমাকল করিয়া]

$=e^x. \sin x-\int e^x. \sin xdx=e^x. \sin x-s$

পক্ষান্তর করিয়া পাই, $c+s=e^x. \sin x.$

(c) নির্ণেয় ক্ষেত্রফল$=\int_0^1 ydx=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}.$

7. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির যে কোন দুইটির সমাধান কর :

(i) $y(1+x)dx+x(1+y)dy=0$;

(ii) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{3x+3y+1}$; (iii) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}$;

(iv) $\frac{dy}{dx}=-2y$($x=0$ হইলে $y=2$ হইবে, এই শর্তাধীনে)।

(i) $y(1+x)dx+x(1+y)dy=0$

বা, $\frac{1+x}{x}dx+\frac{1+y}{y}dy=0$

সমাকলন্ করিয়া পাই, $\int\frac{1+x}{x}dx+\int\frac{1+y}{y}dy=\log c$

বা, $\log x+x+\log y+y=\log c$

বা, $x+y+\log (xy)=\log c$

বা, $x+y=\log\frac{c}{xy}$, বা, $\frac{c}{xy}=e^{x+y}$ $\therefore$ $xy\, e^{x+y}=c.$

(ii) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{3x+3y+1}.$

$x+y=z$ ধরিয়া পাই $1+\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$ বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইতে পাই,

$\frac{dz}{dx}-1=\frac{z+1}{3z+1}$ বা, $\frac{dz}{dx}=\frac{z+1}{3z+1}+1=\frac{4z+2}{3z+1}$

বা, $dx=\frac{3z+1}{4z+2}dz.$ সমাকলন করিয়া পাই,

$$x+c=\int\frac{3z+1}{4z+2}dz=\frac{3}{4}\int\frac{4z+2-\frac{2}{3}}{4z+2}dz$$

$$=\frac{3}{4}\int dz-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{4z+2}=\tfrac{3}{4}z-\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}\log(4z+2$$

$$=\tfrac{3}{4}(x+y)-\tfrac{1}{8}\log(4x+4y+2).$$

(iii) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}$ মনে কর $y-x=z^2$, $\therefore\ \frac{dy}{dx}=1+2z.\frac{dz}{dx}$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই, $1+2z.\frac{dz}{dx}=\sqrt{z^2}=z$

বা, $2z.\frac{dz}{dx}=z-1$, বা, $dx=\frac{2z}{z-1}dz$

সমাকলন্ করিয়া পাই,

$$x+c=\int\frac{2z}{z-1}dz=\int\left(2+\frac{2}{z-1}\right)dz=2z+2\log(z-1)$$

বা, $x+c=2\sqrt{y-x}+2\log(\sqrt{y-x}-1)$.

(iv) $\frac{dy}{dx}=-2y$, বা, $\frac{dy}{y}=-2dx$.

সমাকলন্ করিয়া পাই, $\log y=\log c-2x$

বা, $y=c.e.^{-2x}$

এক্ষণে যখন $x=0$, $y=2$ (দেওয়া আছে)

$\therefore\ 2=ce^0=c\quad\therefore\ c=2\quad\therefore\ y=2e^{-2x}$.

Group—C

8. নিম্নলিখিত বিবৃতিগুলির যে কোন দুইটি যুক্তি দিয়া সংশোধন কর অথবা সমর্থন কর।

(i) একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল, P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় আছে; প্রত্যেকটি বলের পরিমাপ সমভাবে বর্ধিত করিলেও তাহারা সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

(ii) কোন একটি বস্তুর ভারকেন্দ্র, বস্তুটির অন্তর্গত কোন একটি বিন্দু হইতে বাধ্য।

(iii) মাথায় একটি ভারী বাক্স লইয়া একটি বাড়ীর ছাদ হইতে কোন চোর লাফ দিল ; যতক্ষণ সে বাতাসের মধ্য দিয়া পড়িতে থাকিবে ততক্ষণ সে মাথায় বাক্সটির ভার অনুভব করিবে না।

(iv) কোন ট্রেন সমগতিতে চলিলে ইঞ্জিনের টান ও বাধা বল সাম্যাবস্থায় থাকে।

(i) মনে করি Q বল, R বলের সহিত α কোণে নত। অনুরূপে R বল P বলের সহিত β কোণে এবং P বল, Q বলের সহিত γ কোণে নত।

∵ P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে, ল্যামির সূত্র অনুযায়ী,

$\frac{P}{\sin\alpha}=\frac{Q}{\sin\beta}=\frac{R}{\sin\gamma}\cdots(1)$. এক্ষণে মনে কর বলগুলির পরিমাপ x পরিমাণে বৃদ্ধি করা হইল, অর্থাৎ বলগুলি হইল $P+x$, $Q+x$, এবং $R+x$. যদি বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে,

$\frac{P+x}{\sin\alpha}=\frac{Q+x}{\sin\beta}=\frac{R+x}{\sin\gamma}\cdots(2)$. এক্ষণে (1) এবং (2) হইতে পাই,

$$\frac{P+x}{P}=\frac{Q+x}{Q}=\frac{R+x}{R}, \quad \text{বা,} \quad \frac{x}{P}=\frac{x}{Q}=\frac{x}{R} \quad \text{বা,} \quad P=Q=R.$$

∴ সমপরিমাণে বর্ধিত করিলেও বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকিবে যদি $P=Q=R$ হয়, নচেৎ তাহারা সাম্যাবস্থায় আর থাকিবে না।

(ii) বিবৃতিটি সত্য নহে। কারণ অনেক বস্তুর উদাহরণ দেওয়া যায় যাহাদের ভারকেন্দ্র বস্তুর বাহিরে। যেমন, তার দ্বারা প্রস্তুত একটি বৃত্তাকার বলয়-এর ভারকেন্দ্র হইতেছে ঐ বৃত্তের কেন্দ্র যাহা বলয়াকার বস্তুর বাহিরের একটি বিন্দু। অনুরূপে, ফাঁপা অর্ধগোলক, গোলক, শঙ্কু, স্তম্ভ প্রভৃতি বস্তুর ভারকেন্দ্র বস্তুটির কোন বিন্দু নহে।

(iii) বিবৃতিটি সত্য। কারণ, যদি চোরের মাথার উপর বাক্সটির প্রতিক্রিয়া R হয়, তবে বাক্সের উপরও চোরের মাথার প্রতিক্রিয়া R হইবে। যদি বাক্সের ভর m হয়, তবে বাক্সের উপর $mg-R$ বল ক্রিয়া করে। এই বলের ফলে বাক্সটি g ত্বরণে নীচের দিকে পড়িতেছে।

$$\therefore \; R-mg=mg \quad \therefore \; R=0$$

অর্থাৎ চোরটি পতনকালে বাক্সের ভার অনুভব করিবে না।

(iv) বিবৃতিটি সত্য। কারণ যদি ট্রেনের উপর ইঞ্জিনের টান P হয়, এবং বাধা বল R হয় তবে, ট্রেনের উপর ক্রিয়মাণ বলের পরিমাপ P−R. এই বলের ফলে যদি ইঞ্জিনটি ত্বরণ f হয় তবে,

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র হইতে পাই,

$P-R=Mf$, যেখানে $M=$ইঞ্জিনের ভর।

$\because$ ইঞ্জিনটি সমবেগে চলে, $\therefore\ f=0\quad \therefore\ P=R$

অর্থাৎ ইঞ্জিনের টান ও বাধা বল সাম্যাবস্থায় আছে।

9. (*a*) দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও R একটি দৃঢ় বস্তুর উপরিস্থিত দুইটি বিন্দু A ও Bতে ক্রিয়মান। বল দুইটির লব্ধি সম্পূর্ণভাবে নির্ণয় কর।

(*b*) একই বিন্দুতে ক্রিয়মান দুইটি বল 3P এবং 2P-এর লব্ধি R; প্রথম বলটির পরিমাপ দ্বিগুণিত হইলে লব্ধির পরিমাপও দ্বিগুণিত হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর।

(*a*) স্থিতিবিদ্যা—§ 4·2 দেখ (এখানে Q স্থলে R হইবে এবং লব্ধিবল$=F=P+R$ মনে কর।)

(*b*) মনে কর বল দুইটির মধ্যে অন্তর্গত কোণ α.

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে,

$R^2=(3P)^2+(2P)^2+2.3P.2P.\cos\alpha=13P^2+12P^2\cos\alpha.$

$$\therefore\quad \frac{R^2}{P^2}=13+12\cos\alpha\cdots(1)$$

আবার $(2R)^2=(6P)^2+(2P)^2+2.6P.2P\cos\alpha$

$\therefore\quad 4R^2=40P^2+24P^2\cos\alpha.$

বা, $\dfrac{R^2}{P^2}=10+6\cos\alpha\cdots(2)$

(1) ও (2) হইতে পাই,

$$13+12\cos\alpha=10+6\cos\alpha$$

বা, $3=-6\cos\alpha$, বা, $\cos\alpha=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}=\cos 120^\circ$

$$\therefore\quad \alpha=120^\circ$$

সুতরাং বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ হইতেছে 120°.

10. (a) একটি দৃঢ় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত তিনটি বল P, Q ও R সাম্যাবস্থায় আছে। জানা আছে যে Q এবং R, C বিন্দুতে মিলিত হয়; এক্ষণে প্রমাণ কর যে P বলের ক্রিয়ারেখা C বিন্দুগামী।

(b) একটি সরু সমতারকে দুইটি সমতলীয় বৃত্তাকার বলয়ের আকারে বাঁকান হইল। বৃত্তাকার বলয় দুইটির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r এবং r', এবং তাহারা একে অপরকে বহিঃস্থ বিন্দুতে স্পর্শ করে। যদি $r' > r$ হয়, তাহা হইলে ঐ বৃত্তাকার বলয় দুইটির স্পর্শ বিন্দু হইতে বলয়দ্বয়ের দ্বারা গঠিত বস্তুটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

(a) স্থিতিবিদ্যা—§ 8·3 দেখ।

(b) স্থিতিবিদ্যা—বিবিধ উদাহরণমালা—উদা. 21 দেখ।

11. (a) নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র লিখ ও $P = mf$ সূত্রটি প্রমাণ কর।

(b) দুইটি বস্তুকণা একই বিন্দু হইতে একসঙ্গে একটি প্রদত্ত সরলরেখা অবলম্বন করিয়া যাত্রা করিল। প্রথমটি u সমবেগে ও দ্বিতীয়টি স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণসহ চলিতে লাগিল। প্রমাণ কর যে দ্বিতীয় কণাটি প্রথমটিকে ধরিয়া ফেলিবার পূর্বে উভয়ের মধ্যে সর্বাধিক দূরত্ব হইবে $\frac{u^2}{2f}$, এবং তখন যাত্রারম্ভ হইতে $\frac{u}{f}$ সময় অতিক্রান্ত হইয়াছে।

(a) গতিবিদ্যা—§ 5·4 ও § 5·5 দেখ।

(b) অন্তরকলন—বিবিধ উদাহরণমালা 4—উদা. 23 দেখ।

12. (a) একটি কেল্লার শীর্ষ হইতে একটি কণাকে অনুভূমিক দিকে নিক্ষেপ করা হইল। প্রমাণ কর যে প্রক্ষেপ পথটি অধিবৃত্তাকার।

(b) একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে a দূরত্বে অবস্থিত একটি বস্তুকণা স্থির অবস্থা হইতে শুরু করিয়া একটি বলের প্রভাবে চলিতে আরম্ভ করিল। ঐ বলটি সর্বদাই O অভিমুখী এবং O হইতে দূরত্বের সহিত সমানুপাতী। চলিতে আরম্ভ করিবার t সময় পরে বস্তুকণাটির O বিন্দু হইতে দূরত্ব নির্ণয় কর।

(a) গতিবিদ্যা—§ 7·5 দেখ।

(b) গতিবিদ্যা—§ 8·2 দেখ।